Действительные числа I: Упорядоченные поля

▷ **Определение 1.** Отношение $\preccurlyeq$ на множестве M называется *отношением (частичного) порядка*, если оно
0) *рефлексивно* ($a \preccurlyeq a$),
1) *транзитивно* (если $a \preccurlyeq b$ и $b \preccurlyeq c$, то $a \preccurlyeq c$),
2) *антисимметрично* (если $a \preccurlyeq b$ и $b \preccurlyeq a$, то $a = b$).

Отношение порядка называется *отношением линейного порядка*, если, кроме того, любые два элемента сравнимы (либо $a \preccurlyeq b$, либо $b \preccurlyeq a$).

Задача 1. Какие из следующих отношений являются отношениями линейного порядка на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?
а) $(a, b) \preccurlyeq (a', b')$, если $a \leqslant a'$ и $b \leqslant b'$;
б) $(a, b) \preccurlyeq (a', b')$, если либо $a < a'$, либо ($a = a'$ и $b \leqslant b'$) *(лексикографический порядок)*;
в) $(a, b) \preccurlyeq (a', b')$, если $\max(a, b) \leqslant \max(a', b')$;
г) $(a, b) \preccurlyeq (a', b')$, если либо $a + b < a' + b'$, либо ($a + b = a' + b'$ и $a \leqslant a'$)?

Задача 2. а) В любом конечном линейно упорядоченном множестве есть наибольший элемент.
б) Сколько линейных порядков существует на n-элементном множестве?

▷ **Определение 2.** Пара из поля и линейного порядка на нем называется *упорядоченным полем*, если выполнены следующие условия согласованности порядка с операциями:
A) если $a \leqslant b$, то $a + x \leqslant b + x$;
M) если $0 \leqslant a$ и $0 \leqslant b$, то $0 \leqslant ab$.

Задача 3. а) Если $a \leqslant b$ и $a' \leqslant b'$, то $a + a' \leqslant b + b'$.
б) Если $0 \leqslant a \leqslant b$ и $0 \leqslant a' \leqslant b'$, то $aa' \leqslant bb'$.

Задача 4. В упорядоченном поле а) $0 \leqslant a^2$; б) $0 \leqslant 1$.

Задача 5. а) Упорядоченное поле бесконечно.
б) Упорядоченное поле содержит (копию) $\mathbb{Q}$ (т. е. имеет нулевую характеристику).

Задача 6. а) Задайте на $\mathbb{Q}$ структуру упорядоченного поля. Единственна ли она?
б*) При каких d на поле $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ существует структура упорядоченного поля? Единственна ли она?

▷ **Определение 3.** Подмножество A упорядоченного множества M называется *ограниченным сверху*, если $\exists S \in M : \forall a \in A\ a \preccurlyeq S$.

Задача 7. Подмножество A упорядоченного множества M таково, что $\forall a \in A\, \exists S \in M : a \preccurlyeq S$. Верно ли что A ограничено сверху?

Задача 8. Для каких из порядков из задачи 1 подмножество $\{0\} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ограничено?

▷ **Определение 4.** Упорядоченное поле называется *архимедовым*, если натуральные числа в нем неограничены сверху.

Задача 9*. Приведите пример неархимедова поля.

Задача 10. В архимедовом поле “рациональные числа всюду плотны”: между любыми двумя элементами поля лежит рациональное число.