

## Геометрические преобразования II: Классификация движений

- ▷ **Определение 1.** *Движением* (изометрией) называется биективное отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния.

**Задача 0\*.** Отображение плоскости сохраняет расстояния. Обязательно ли оно является движением?

- ▷ **Определение 2.** Преобразование плоскости вида  $x \mapsto Ax + b$  (т.е. композиция линейного отображения и параллельного переноса) называется *аффинным*.

**Задача 1.** а) Движение, сохраняющее начало координат, является линейным отображением. б) Любое движение является аффинным преобразованием.

в) При каких  $A$  и  $b$  аффинное преобразование  $x \mapsto Ax + b$  является движением?

**Задача 2.** Движение а) переводит прямые в прямые; б) сохраняет параллельность прямых; в) сохраняет углы между прямыми.

**Задача 3.** Движение определяется образами трех не лежащих на одной прямой точек.

**Задача 4.** а) Композиция движений — движение; б) обратное к движению — движение.

**Задача 5.** Любое движение может быть представлено как композиция не более 3 симметрий (относительно прямых).

- ▷ **Определение 3.** Если движение является композицией четного числа симметрий, то говорят, что это движение *сохраняет ориентацию*. Если же движение является композицией нечетного числа симметрий, то говорят, что это движение *меняет ориентацию*.

**Задача 6.** а) Существует ли “квадратный корень из симметрии” (такое движение  $\phi$ , что  $\phi \circ \phi$  является симметрией)?

б\*) Существует ли “квадратный корень из транспозиции” (такая перестановка  $\sigma$ , что  $\sigma^2$  является транспозицией)?

**Задача 7.** Если движение сохраняет ориентацию, то это либо параллельный перенос, либо поворот.

- ▷ **Определение 4.** Композиция отражения относительно прямой и параллельного переноса вдоль той же прямой называется *скользящей симметрией*.

**Задача 8.** а) Композиция симметрий относительно любых трех прямых равна композиции симметрий относительно трех прямых, две из которых параллельны.

б) Композиция трех симметрий равна некоторой композиции параллельного переноса и симметрии.

**Задача 9.** Любое движение плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо скользящей симметрией (“теорема Шалля”).

**Задача 10\*.** Движение пространства, сохраняющее ориентацию и имеющее неподвижную точку, является поворотом вокруг некоторой оси.

**Задача 11\*.** а) Любое движение пространства является композицией не более 4 симметрий (относительно плоскостей).

б) Сформулируйте и докажите трехмерный аналог теоремы Шалля.