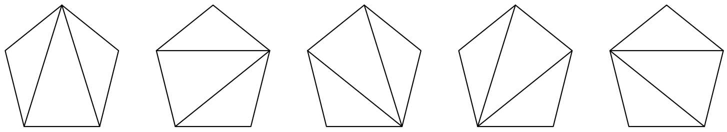
Комбинаторика IV: Числа Каталана

▷ **Определение 1.** Напомним, что число триангуляций $(n+2)$-угольника называется n-м *числом Каталана* и обозначается c_n.



Задача 0. Числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \cdots + c_n c_0$$

и начальным условием $c_0 = 1$.

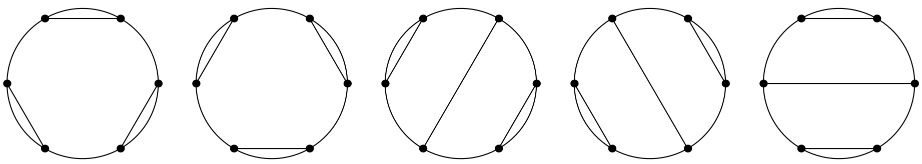
▷ В следующих задачах приведен ряд множеств и требуется доказать, что количество элементов в них равно c_n. Для этого есть два основных способа — построить явную биекцию или проверить рекуррентное соотношение. Полезно сделать и то, и другое.

В конце каждой из этих задач приведен список исследуемых объектов для $n = 3$.

Задача 1. Количество неассоциативных произведений $n+1$ переменной (иначе говоря, расстановок скобок, однозначно определяющих порядок умножения) есть n-е число Каталана.

`a(b(cd))   (ab)(cd)   ((ab)c)d   a((bc)d)   (a(bc))d`

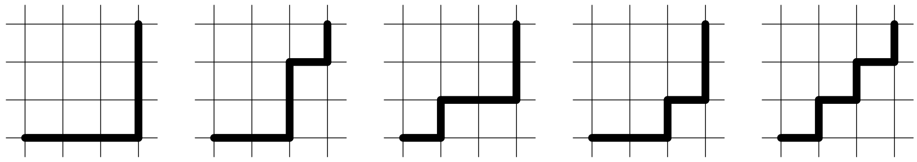
Задача 2. Количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами (из каждой точки выходит одна хорда) есть n-е число Каталана.



Задача 3. Количество способов корректно расставить в ряд n пар скобок есть n-е число Каталана.

`((()))   (())()   ()(())   (()())   ()()()`

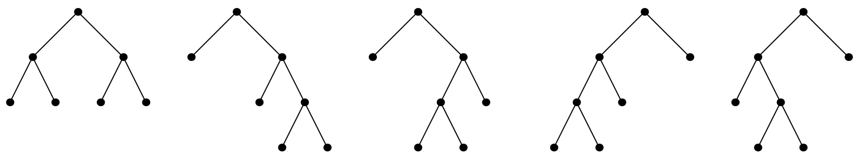
Задача 4. Количество путей по линиям сетки из точки $(0,0)$ в точку (n,n), не поднимающихся выше диагонали $y = x$, есть n-е число Каталана.



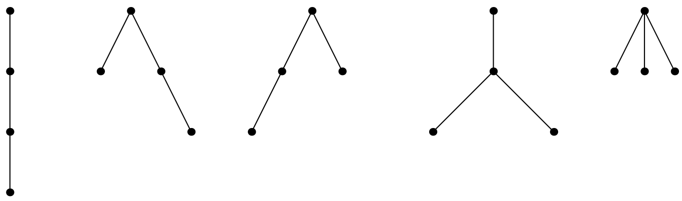
Задача 5. Количество таблиц $2 \times n$, заполненных натуральными числами от 1 до $2n$, так что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают, есть n-е число Каталана.

1 2 3	1 2 4	1 3 4	1 2 5	1 3 5
4 5 6	3 5 6	2 5 6	3 4 6	2 4 6

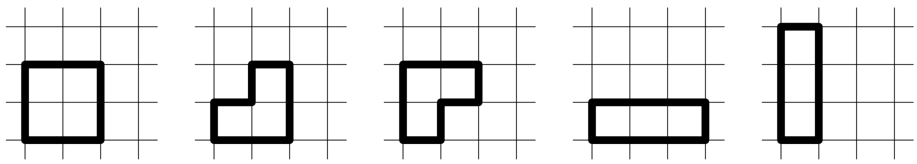
Задача 6. Количество *плоских корневых строго двоичных деревьев* с $n+1$ листом есть n-е число Каталана.



Задача 7. Количество *плоских корневых деревьев* с $n+1$ вершиной есть n-е число Каталана.



Задача 8*. Количество *параллеломино* (пар путей на клетчатой бумаге с началом $(0,0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра $2n+2$ есть n-е число Каталана.



Задача 9*. Количество последовательностей натуральных чисел $1, a_1, \ldots, a_n, 1$, в которых каждый член является делителем суммы двух соседей, есть n-е число Каталана.

1 4 3 2 1   1 3 5 2 1   1 3 2 3 1   1 2 5 3 1   1 2 3 4 1

Задача 10*. Количество наборов из n целых чисел от 0 до n, сумма которых делится на $n+1$ (числа могут повторяться, порядок чисел в наборе не важен), есть n-е число Каталана.

0 0 0   0 1 3   0 2 2   1 1 2   2 3 3

Метод отражений и стандартные таблицы

Задача 11. а) Количество путей по линиям сетки из точки $(0,0)$ в точку (n,n), поднимающихся выше диагонали $y=x$, равно количеству путей по линиям сетки из точки $(0,0)$ в точку $(n-1,n+1)$.
б) Найдите явную формулу для n-го числа Каталана.

Задача 12. а) Количество *стандартных таблиц* из двух строк длины a и b (заполнений числами от 1 до $a+b$, таких что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают) равно количеству путей по линиям сетки из точки $(0,0)$ в точку (a,b), не поднимающихся выше прямой $y=x$.

```
1 2 3     1 2 4     1 3 4     1 2 5     1 3 5
4 5       3 5       2 5       3 4       2 4
```

б) Найдите явную формулу для этих чисел.

Задача 13*. Сформулируйте и докажите аналог утверждений предыдущей задачи для таблиц из 3 строк.

Задача 14*. а) Найдите число всех путей длины n по линиями сетки из точки $(0,0)$, не поднимающихся выше диагонали $y=x$.
б) Найдите сумму

$$\sum_{i+j=n} \binom{2i}{i}\binom{2j}{j}.$$

в*) Найдите сумму

$$\sum_{i+j=n} (-1)^i \binom{2i}{i}\binom{2j}{j}.$$

Лемма Рени

Задача 15. а) Количество последовательностей из $n+1$ числа 1 и n чисел -1, все частичные суммы которых положительны, есть n-е число Каталана.
б) Для любой последовательности целых чисел, сумма которых равна 1, ровно у одного из ее циклических сдвигов все частичные суммы положительные.
в) Найдите явную формулу для n-го числа Каталана.

Задача 16*. Количество путей по линиям сетки из левого нижнего угла прямоугольника $n\times 2n$ в правый верхний, не поднимающихся выше диагонали, равно количеству
а) плоских корневых строго троичных деревьев с $2n+1$ листом;
б) разрезаний $2n+2$-угольника на четырехугольники.
в) Найдите явную формулу для этого числа.