

Комбинаторика III: Перечисление с повторениями

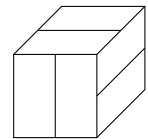
Задача 1. Прямоугольная таблица $m \times n$ заполнена плюсами и минусами. За ход разрешается поменять на противоположный все знаки в любой строке. Назовем две таблицы эквивалентными, если одна из другой получается последовательностью ходов.

- а) Докажите, что в любых двух классах эквивалентности одинаковое число элементов.
 б) Найдите это число.
 в) Найдите число этих классов.

Задача 2 (“правило деления”). Пусть отношение эквивалентности “ \sim ” на m -элементном множестве M таково, что каждый класс эквивалентности состоит ровно из f элементов. Сколько элементов в множестве M/\sim ?

Задача 3. Сколькими способами можно пронумеровать а) вершины; б) ребра куба?

Задача 4. а) Каждая грань кубика разбита пополам (см. рис.). Сколькими способами можно раскрасить получившиеся 12 прямоугольников в 12 различных цветов?



б*) Сколькими способами можно раскрасить 12 граней додекаэдра в 12 различных цветов?

Задача 5. Как изменится ответ в задаче 2, если для m' элементов соответствующие классы содержат не f , а f' элементов?

Задача 6. а) Пусть p — простое число. Сколькими способами можно раскрасить в a цветов карусель из p вагончиков? б) А карусель из p^2 вагончиков?

в*) Какое утверждение про делимость дает соответствующая задача для n вагончиков?

Задача 7*. Пусть p — простое число. Сколько существует замкнутых ориентированных p -звенных ломаных, проходящих по вершинам правильного p -угольника (ломаные, переходящие друг в друга при поворотах многоугольника считаются одинаковыми)?