

Отношения эквивалентности

- ▷ **Определение 1.** *Отношением* на множестве M называется подмножество $\mathcal{R} \subset M^2$. При этом вместо $(a, b) \in \mathcal{R}$ пишут $a\mathcal{R}b$.

Отношение \sim называется *отношением эквивалентности*, если выполнены следующие три условия (“аксиомы”):

- 1) $a \sim a$ (*рефлексивность*);
- 2) если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$ (*транзитивность*);
- 3) если $a \sim b$, то $b \sim a$ (*симметричность*).

Задача 1. Какие из следующих отношений являются отношениями эквивалентности?

- а) “иметь одинаковую последнюю цифру в десятичной записи” на \mathbb{Z} ;
- б) “иметь одинаковый образ при отображении f ” на множестве M (для фиксированного отображения $f: M \rightarrow X$);
- в) “лежать в одной компоненте связности” на вершинах некоторого графа;
- г) $a \sim b \Leftrightarrow a = \pm b$ на \mathbb{Z} ; д) $a \sim b \Leftrightarrow a = b \pm n$ на \mathbb{Z} ; е) $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in (n)$ на \mathbb{Z} ;
- ж) $a \sim b \Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$ на \mathbb{Z} ; з) $(p, q) \sim (p', q') \Leftrightarrow pq' = qp'$ на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
- и*) $a \sim b \Leftrightarrow ab = ba$ на \mathfrak{S}_n ; к*) $a \sim b \Leftrightarrow \exists x, y : a = xy, b = yx$ на \mathfrak{S}_n .

Задача 2. Следует ли какая-либо аксиом в определении отношения эквивалентности из остальных?

- ▷ **Определение 2.** Пусть \sim — отношение эквивалентности на множестве M , a — элемент этого множества. *Классом эквивалентности* этого элемента называется множество $[a] = \{x \in M : x \sim a\}$ (a элемент a называется *представителем* данного класса).

Задача 3. Классы эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

- ▷ **Определение 3.** Пусть \sim — отношение эквивалентности на множестве M . Множество классов эквивалентности называется *фактормножеством* и обозначается M/\sim .

Задача 4. Опишите классы эквивалентности и фактормножества для отношений эквивалентности из задачи 1.

- ▷ **Определение 4.** *Транзитивным замыканием* симметричного отношения \mathcal{R} на множестве M называется отношение “лежать в одной компоненте связности графа (M, \mathcal{R}) ”.

Задача 5*. а) Транзитивное замыкание симметричного отношения является отношением эквивалентности.

б) Опишите транзитивное замыкание для отношений из задачи 1.

в) Опишите транзитивное замыкание для отношения $(a, b) \sim (b, a)$, $(a, b) \sim (a, b \pm a)$ на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Задача 6*. Любое отношение эквивалентности является отношением эквивалентности из задачи 1б).

Задача 7*. Сколько существует отношений эквивалентности на 8-элементном множестве?