Арифметика I: Делимость

Соглашение. Все числа в этом листке предполагаются целыми.

▷ **Определение 1.** Говорят, что число *a делит* число b (или что *b делится* на a, или что *b кратно a*), если существует такое целое число k, что $ak = b$. Обозначения: $a \mid b$ или $b \,\vdots\, a$.

Множество чисел, кратных a (т. е. $\{ak : k \in \mathbb{Z}\}$), обозначается (a).

Задача 1. $a \mid b \iff (a) \supset (b)$.

Задача 2. Докажите следующие свойства делимости.
а) $a \mid a$ *(рефлексивность)*;
б) если $a \mid b$ и $b \mid c$, то $a \mid c$ *(транзитивность)*;
в) если $a \mid b$ и $b \mid a$, то $a = \pm b$ *(антисимметричность)*.

Задача 3. Какие из следующих утверждений верны?
а) $\forall a \in \mathbb{Z}\ 0 \mid a$; б) $\forall a \in \mathbb{Z}\ a \mid 0$; в) $\forall a \in \mathbb{Z}\ 1 \mid a$; г) $\forall a \in \mathbb{Z}\ a \mid 1$;
д) если $c \mid a$ и $d \mid a$, то $c + d \mid a$; е) если $d \mid a$ и $d \mid b$, то $d \mid a + b$;
ж) если $d \mid a$ или $d \mid b$, то $d \mid ab$; з) если $d \mid ab$, то $d \mid a$ или $d \mid b$.

Задача 4. а) Если $a + b \mid a^2$, то $a + b \mid b^2$; б*) $x + y + z \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Задача 5. а) $4^n - 1 \,\vdots\, 3$; б) $4^n - 3n - 1 \,\vdots\, 9$;
в*) $4^n - \ldots - 1 \,\vdots\, 27$ (сформулируйте и докажите).

Задача 6. Произведение k последовательных натуральных чисел делится на $k!$.

Задача 7*. Пусть $[n]$ — число из n единиц. Тогда произведение k идущих подряд чисел из этой последовательности делится на произведение первых k членов этой последовательности.

Задача 8. Сформулируйте и докажите признак а) делимости на 9; б) делимости на 11; в) признак делимости на 17 для чисел, записанных в 16-ричной системе счисления.

Задача 9. Определите устно, делится ли число 140359156002848 на 4206377084.

Задача 10 (деление с остатком). Пусть a и b целые числа, $a \neq 0$. Тогда b ровно одним образом можно представить в виде $aq + r$, так что $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r < |a|$.

▷ **Определение 2.** Числа q и r из предыдущей задачи называются, соответственно, *неполным частным* и *остатком* при делении числа b на число a.

Задача 11. Разделите с остатком ± 17 на ± 4.

Задача 12. Найдите остаток от деления
а) a^2 на $a + 1$; б) a^3 на $a^2 + a + 1$; в*) a^n на $a + 1$;
г) $[n]$ на $[m]$ (где $[n]$ — число из n единиц); д) $2^n - 1$ на $2^m - 1$.

▷ **Определение 3.** Целое число $p \neq \pm 1$ называется *простым*, если у него нет делителей кроме ± 1 и $\pm p$. Остальные ненулевые целые числа, не равные ± 1, называются *составными*.

Задача 13. Найдите все такие простые числа p, что числа $p + 2$ и $p + 4$ тоже простые.

Задача 14. а) Простых чисел бесконечно много. Указание: для любого набора чисел $p_1, \ldots, p_n$ можно построить новое число, которое ни на одно из p_i не делится (как?).
б) Существует ли 10^{100} подряд идущих составных чисел?

Задача 15*. Путь p_n — n-е (положительное) простое число. Тогда $p_n < 2^{2^n}$.

Задача 16 (основная теорема арифметики). а) Любое целое число может быть разложено на простые множители. б*) Разложение целого числа на простые множители единственно. (Сформулируйте точное утверждение и докажите его.)

Задача 17*. Рассмотрим множество чисел вида $a + b\sqrt{-5}$. Разложите в нем число 6 на простые множители двумя различными способами.