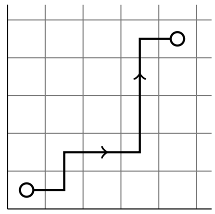
Комбинаторика II: Биномиальные коэффициенты



Задача 1. Запишем в каждой клетке таблицы число способов дойти до нее из левой нижней клетки, двигаясь только вправо или вверх.
а) Что за числа стоят в самой нижней строке? Следующей за ней строке?
б) Каждое число[1] является суммой левого и нижнего соседей.
в) Выпишите угловой квадрат 5×5 таблицы.

▷ **Определение 1.** *Числом сочетаний* из n по k называется количество k-элементных подмножеств у n-элементного множества. Обозначение: $\binom{n}{k}$ (или C_n^k).
Напомним, что $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Задача 2. Докажите, что в таблице из задачи 1 стоят в точности числа сочетаний. В какой клетке стоит число $\binom{n}{k}$?

Задача 3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Задача 4. а) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$; б) $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Задача 5. Найдите сумму $1^{\downarrow k} + 2^{\downarrow k} + \dots + n^{\downarrow k}$.
(Решив эту задачу, можно снова подумать над задачей 6 предыдущего листка.)

▷ **Определение 2.** Повернем таблицу из задачи 1 на $135°$. Результат называется *треугольником Паскаля.*
На краях этого треугольника стоят единицы, а каждое число внутри является суммой двух, стоящих над ним.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Задача 6. а) Выше выписаны первые 5 строк треугольника Паскаля. Выпишите следующие 5 строк. Найдите при помощи треугольника Паскаля число $\binom{9}{4}$.
б) Найдите сумму чисел в каждой из первых 6 строк треугольника Паскаля.
в) Найдите сумму чисел в n-й строке треугольника Паскаля. Запишите возникающее тождество для биномиальных коэффициентов.

Задача 7. Вычислите 101^7.

Задача 8. Вычислите $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots \pm \binom{n}{n}$.

Задача 9. а) У Тома Сойера есть забор из n досок и белая краска. Сколькими способами он может покрасить в этом заборе четное число досок?
б*) А сколькими способами он может покрасить кратное трем число досок?

Задача 10. а) Для каждой из первых 4 строчек треугольника Паскаля сложите квадраты стоящих в ней чисел и найдите полученное число в треугольнике Паскаля. Запишите полученную гипотезу. б) Докажите эту гипотезу.

Задача 11 (бином Ньютона). а) Раскройте скобки в выражении $(a+b)^n$ для $n = 1, 2, 3, 4$; результаты запишите друг под другом.
б) $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n$.

Задача 12. Найдите сумму $\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - \dots \pm 2^n\binom{n}{n}$.

[1] кроме числа, стоящего в левой нижней клетке

Задача 13 (свертка Вандермонда). Вычислите двумя способами коэффициент при x^k в выражении а) $(1+x)^n \cdot (1+x)$; б) $(1+x)^n \cdot (1+x)^m$ — какое тождество на биномиальные коэффициенты получается?
в*) Придумайте комбинаторное (не опирающееся на бином) доказательство этих тождеств.

Задача 14* (формула включений–исключений). Число элементов в объединении двух множеств можно вычислять по формуле $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$. Сформулируйте и докажите аналогичную формулу а) для трех множеств ($|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - \dots$); б) для n множеств.

Задача 15*. Сколькими способами можно выбрать неотрицательные числа $x_1, \dots, x_k$ такие, что $x_1 + \dots + x_k = n$.

Задача 16*. Напомним, что n-м числом Каталана называется число способов разбить выпуклый $(n+2)$-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями.
а) Число путей из левого нижнего угла квадрата $(n+1) \times (n+1)$ в правый верхний, не поднимающихся выше диагонали, равно n-му числу Каталана.
б) Придумайте и докажите формулу для n-го числа Каталана.

Задача 17*. а) Придумайте и докажите формулу для $(a+b+c)^n$.
б) Что будет в этом случае аналогом “путевой интерпретации” из задачи 1?