Индукция

Аксиома. Каждое непустое подмножество множества натуральных чисел содержит наименьший элемент[1].

Задача 0* (Принцип математической индукции). Пусть имеется последовательность утверждений $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Тогда если

1) *(база индукции)* утверждение A_1 истинно,

2) *(шаг индукции)* из утверждения A_n следует утверждение A_{n+1},

то все утверждения A_n истинны.

Соглашение. Утверждением этой задачи можно пользоваться без доказательства.

Задача 1. Треугольник на плоскости разделили n прямыми на части. Докажите, что среди этих частей есть треугольник.

Задача 2 (Ханойская башня). Имеется три стержня, на первый из которых нанизана пирамида из n колец, а оставшиеся два пусты. За ход можно переложить верхнее кольцо с одного из стержней на другой, но запрещается класть большее кольцо на меньшее.

а) Все кольца можно переложить с первого стержня на второй.

б) Это можно сделать за $2^n - 1$ ход. в*) Можно ли это сделать быстрее?

Задача 3. а) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

Задача 4. Найдите сумму а) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$; б) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$.

Задача 5. Найдите сумму а) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$; б) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1)$.

Задача 6*. Найдите сумму а) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$; б*) $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.

Задача 7. а) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2$; б*) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$.

Задача 8*. $n^{n+1} > (n+1)^n$ при $n > 2$.

Задача 9. Любое натуральное число можно перевести в двоичную систему счисления (представить как сумму различных степеней двойки).

Задача 10. Какие суммы можно заплатить, имея неограниченный запас монет по 3 и по 5 рублей?

Задача 11. Для любого $n > 2$ единицу можно представить в виде суммы n различных дробей вида ${}^1\!/_k$.

Задача 12. Если число $a + \frac{1}{a}$ целое, то и число $a^n + \frac{1}{a^n}$ целое.

Задача 13*. Все последовательности нулей и единиц длины n можно занумеровать так, что соседние последовательности отличаются ровно в одном месте.

[1] т. е. элемент, который меньше любого другого элемента этого подмножества

Задача 14. *Утверждение.* В любом стаде все коровы одного цвета.

Доказательство. Индукция по числу коров. База (стадо из одной коровы) очевидна, докажем шаг. Возьмем в стаде из $N+1$ коровы произвольную корову . Оставшиеся N коров одного цвета. Теперь возьмем другую корову B. Оставшиеся N коров также одного цвета. В частности, одного цвета со всеми коровами, кроме A и B — но и B одного цвета со всеми этими коровами. Значит, все коровы в стаде одного цвета.

Задача 15. *Утверждение.* Если в стране из каждого города выходит хотя бы одна дорога, то из любого города можно попасть в любой другой.

Доказательство. Индукция по числу городов. База (страна из двух городов) очевидна, докажем шаг. Возьмем какую-нибудь страну из n городов и добавим к ней новый город (с выходящей из него дорогой). Между старыми городами можно проехать по старым дорогам, так что достаточно доказать, что из нового города можно добраться в любой из старых. Дорого из этого города ведет в один из старых городов. Следовательно, из него можно доехать в один из старых городов, а оттуда уже добраться до любого другого. Итак, в новой стране тоже можно из любого города доехать до любого другого.

Задача 16. а) Части, на которые делят плоскость несколько прямых, можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние (по отрезку) части были разного цвета.
б) То же для окружностей вместо прямых.

Задача 17. а) На сколько частей делят плоскость k прямых *в общем положении* (никакие две из которых не параллельны, а никакие три не пересекаются в одной точке)?
б*) На какое наибольшее число частей могут делить плоскость k окружностей? При каком условии этот максимум достигается?
в*) На какое наибольшее число частей могут делить пространство k плоскостей? При каком условии этот максимум достигается?

Задача 18. а*) Любой многоугольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники.
б) Какое максимальное число треугольников может получится при разрезании n-угольника на треугольники непересекающимися диагоналями?

Задача 19*. На кольцевой дороге расположено несколько бензоколонок, суммарное количество бензина в которых достаточно, чтобы автомобиль мог сделать полный круг. Докажите, что автомобиль с пустым баком может начать движение с некоторой бензоколонки и, заправляясь на встречающихся ему бензоколонках, сделать полный круг.