

Комбинаторика I: Умножение и деление

Задача 1. На карточке для игры «Сет» имеется от одной до трех одинаковых фигур — ромбов, эллипсов или «волн» красного, зеленого или синего цвета со сплошной заливкой, со штриховкой или без заливки. Сколько всего таких карточек?

▷ **Определение 1.** Отображение $f: X \rightarrow Y$, при котором каждый элемент имеет не более одного прообраза, называется *инъекцией*¹ (или *вложением*).

Задача 2. а) Сколько существует вложений из k -элементного множества в n -элементное²? б*) Сколько существует сюръекций k -элементного множества на n -элементное?

Задача 3. а) Пусть $Y \subset Z$ — k -элементное подмножество n -элементного множества. Сколькими способами можно представить его как образ вложения $X = \{1, \dots, k\}$ в Z ? б) Сколько у n -элементного множества k -элементных подмножеств?

Задача 4*. Отображение называется *монотонным*, если $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

а) Сколько существует *монотонных* вложения множества $\{1, 2\}$ в множество $\{1, 2, \dots, n\}$?

б) А из множества $\{1, 2, \dots, k\}$ в множество $\{1, 2, \dots, n\}$?

в) А сколько всего существует монотонных отображений из первого множества во второе?

Задача 5. а) Сколькими способами можно разбить n человек на пары? б) А на команды по 3 человека?

Задача 6. а) Сколько у выпуклого n -угольника диагоналей? б) А сколькими способами в него можно вписать треугольник (так чтобы вершины треугольника лежали в вершинах многоугольника)?

Задача 7*. На двух параллельных прямых отметили n и m точек соответственно, после чего провели все соединяющие их отрезки. Сколько точек пересечения получилось?

Задача 8. Сколькими способами можно раскрасить жезл из а) 5; б) n полосок в два цвета?

Задача 9. Сколькими способами можно раскрасить в два цвета карусель из а) 4; б) 5; в*) 57 вагончиков? г*) А бусы из 5 бусинок? из 57 бусинок?

Задача 10. а) Сколько всего перестановок граней куба можно получить, вращая его? б) Сколько существует различных «игральных кубиков» (кубиков, на гранях которых расставлены числа от 1 до 6)?

в) Сколько из них «правильных» игральных кубиков (таких, что сумма чисел на противоположных гранях равна 7)?

г*) Два правильных игральных кубика склеивают по грани. Сколько различных объектов можно так получить?

д) Сколько существует различных кубиков, грани которых раскрашены в черный и белый цвета?

е*) А если цветов n ?

¹А отображение, при котором каждый элемент имеет не менее одного прообраза — сюръекцией.

²Это число иногда обозначается $n^{\downarrow k}$.