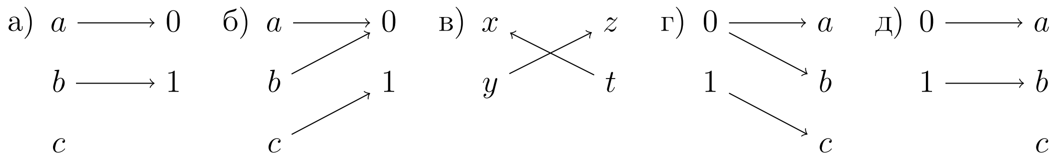
Множества II: Отображения множеств

▷ Если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие ровно один элемент множества Y, то говорят, что задано *отображение* из множества X в множество Y (обозначение: $f\colon X \to Y$).

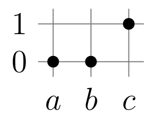
Задача 1. Какие из следующих картинок задают отображение?



Задача 2. Нарисуйте все отображения из множества $\{a, b, c\}$ в множество $\{0, 1\}$.

▷ **Определение 1.** *Произведением* множеств X и Y называется множество упорядоченных пар $\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

▷ **Определение 2.** *Графиком* отображения $f\colon X \to Y$ называется подмножество $\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subset X \times Y$.



Задача 3. На рисунке изображен график одного из отображений множества $\{a, b, c\}$ в множество $\{0, 1\}$. Нарисуйте остальные.

Задача 4* (определение отображения). Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие того, что подмножество $\Gamma \subset X \times Y$ является графиком некоторого отображения.

Задача 5. Сколько существует отображений а) из 1-элементного, 2-элементного; б) из k-элементного множества в n-элементное?

▷ **Определение 3.** Образом подмножества $A \subset X$ при отображении $f\colon X \to Y$ называется множество образов его элементов. Обозначение: $f[A]$.

Задача 6. Для каждого из следующих тождеств выясните, верно ли оно для произвольного отображения $f\colon X \to Y$ (A_i — подмножества в X).
а) $f[\varnothing] = \varnothing$; б) $f[X] = Y$; в) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f[A_1] \subset f[A_2]$; г) $f[A_1] \subset f[A_2] \Rightarrow A_1 \subset A_2$;
д) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$; е) $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$; ж) $f[X \setminus A] = Y \setminus f[A]$.

▷ **Определение 4.** *Полным прообразом* элемента $y \in Y$ при отображении $f\colon X \to Y$ называется множество $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$. *Полным прообразом* подмножества $B \subset Y$ при отображении $f\colon X \to Y$ называется множество $f^{-1}[B] := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Задача 7. Для каждого из следующих тождеств выясните, верно ли оно для произвольного отображения $f\colon X \to Y$ (A_i — подмножества в X, B_i — в Y).
а) $f^{-1}[Y] = X$; б) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2]$; в) $f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2] \Rightarrow B_1 \subset B_2$;
г) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$; д) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$;
е) $f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f^{-1}[B]$; ж) $f^{-1}[f[A]] = A$; з) $f[f^{-1}[B]] = B$;
и*) $f[A] \cap B = f[A \cap f^{-1}[B]]$.

▷ **Определение 5.** Отображение, при котором каждый элемент имеет ровно один прообраз, называется *взаимно-однозначным отображением* или *биекцией*.

Задача 8. а) Выпишите все биекции из множества $\{1, 2, 3\}$ на себя.
б) Сколько существует биекций из n-элементного множества на себя?

▷ **Определение 6.** Пусть f — отображение из X в Y, а g — из Y в Z. Их *композицией* называется результат их последовательного применения, т. е. отображение $g \circ f\colon X \to Z$, $x \mapsto g(f(x))$.

Задача 9. Найдите композицию в обоих порядках для следующих пар отображений.
а) Все пары отображений из задачи 1;
б) $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$; в) $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -x$, $g(x) = 2 - (x - 2)$.

Задача 10. Докажите, что $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (“ассоциативность композиции”).

▷ **Определение 7.** *Тождественным отображением* множества X называется отображение $Id_X\colon x \mapsto x$.

Обратным к отображению $f\colon X \to Y$ называется такое отображение $f^{-1}\colon Y \to X$, что $f^{-1} \circ f = Id_X$ и $f \circ f^{-1} = Id_Y$.

Задача 11. а) Выясните, есть ли обратные у отображений из задачи 1.
б) Докажите, что отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно взаимно-однозначно.
в*) Достаточно ли для взаимной однозначности существования лишь *левого обратного* (такого g, что $g \circ f = Id_X$)? лишь *правого обратного* (такого g, что $f \circ g = Id_Y$)?

Задача 12. Постройте биекцию между $(X \times Y) \times Z$ и $X \times (Y \times Z)$.

Задача 13*. Пусть $\mathrm{Map}(A, B)$ — множество отображений из A в B. Постройте биекцию между
а) $\mathrm{Map}(X, \{0, 1\})$ и множеством всех подмножеств в X;
б) $\mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ и $\mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$.

Задача 14. Для каждой пары из следующих множеств выясните, существует ли между ними биекция 1) натуральные числа; 2) четные натуральные числа; 3) целые числа.

Задача 15. Докажите, что композиция биекций — биекция.