Множества III: Счетные и несчетные множества

▷ **Определение 1.** Два множества называются *равномощными*, если между ними существует биекция (обозначение: $|A| = |B|$).

Задача 1. Отношение равномощности обладает следующими свойствами:
а) $|A| = |A|$ *(рефлексивность)*;
б) $|A| = |B|, |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$ *(транзитивность)*;
в) $|A| = |B| \Leftrightarrow |B| = |A|$ *(симметричность)*.

▷ **Определение 2.** Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется *счетным.*

Задача 2. Объединение счетного и конечного множеств счетно.

▷ **Определение 3.** Говорят, что мощность множества A не превосходит мощности множества B, если существует вложение из A в B (обозначение: $|A| \leq |B|$).

Задача 3. Если множество A *не более чем счетно*[1], то A либо счетно, либо конечно.

Задача 4. Произведение двух счетных множеств счетно.

Задача 5. а) Конечное; б) счетное объединение счетных множеств счетно.

Задача 6. У любого бесконечного множества есть счетное подмножество.

Задача 7 (определение конечности). Множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно своему собственному подмножеству.

Задача 8. Пусть A — бесконечное множество, N — не более чем счетное множество. Что можно сказать о мощности а) $A \cap N$; б) $A \cup N$; в) $A \setminus N$; г*) $A \times N$?

Задача 9. Следующие множества равномощны единичному интервалу
а) произвольный интервал; б) полуокружность без концов; в) прямая; г) отрезок; д*) квадрат.

Задача 10. Обозначим через 2^X — множество подмножеств X. Тогда $|X| < |2^X|$. *(Следствие: для любого множества существует большее его по мощности.)*

▷ **Определение 4.** Говорят, что множество C имеет мощность континуум, если $|C| = |2^{\mathbb{N}}|$.

Задача 11. Найдите мощности следующих множеств
а) конечные б) бесконечные последовательности нулей и единиц;
в*) рациональные числа; г*) действительные числа[2];
д) финитные[3] перестановки натуральных чисел; е) все перестановки натуральных чисел;
ж) отображения $\mathbb{N}$ в себя; з) полиномиальные отображения $\mathbb{N}$ в себя.

Задача 12. Пусть C — множество мощности континуум. Докажите, что $|C^2| = |C|$.

Задача 13* (теорема Кантора–Бернштейна). Пусть $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$. Тогда $|A| = |B|$.

Задача 14*. Верно ли, что для любых бесконечных множеств а) $|A \cup B| = \max(|A|, |B|)$; б) $|A \times B| = \max(|A|, |B|)$?

---

[1] т. е. $|A| \leq |\mathbb{N}|$
[2] понимаемые, например, как бесконечные десятичные дроби
[3] т. е. переставляющие лишь конечное множество чисел