Множества I: Операции над множествами

▷ *Множество* — одно из основных неопределяемых понятий математики. Задать множество — значит указать, из каких *элементов* оно состоит. Утверждение «элемент x *принадлежит* множеству A» записывают как «$x \in A$».

Один из способов записать множество — перечислить в фигурных скобках его элементы через запятую. Например, $A = \{1, \{2, 3\}, \text{крокодил}\}$.

▷ **Определение 1.** *Пустым множеством* называется множество, не содержащее элементов (обозначение: $\varnothing$).

Задача 1. Сколько элементов в каждом из следующих множеств?
а) $\{2, 3, 5\}$; б) $\{2, \{3, 5\}\}$; в) $\{\varnothing\}$; г) множество имен учеников вашего класса.

▷ **Определение 2.** Множество A называется *подмножеством* множества B, если любой элемент множества A принадлежит множеству B. Обозначение: $A \subset B$.

Один из способов задать подмножество — выделить его из всего множества условием. Например, $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \geqslant 0\} \subset \mathbb{Z}$ — подмножество неотрицательных целых чисел.

Задача 2. а) Сформулируйте, что значит, что множество A не является подмножеством множества B.
б) Убедитесь, что множество фиолетовых крокодилов в Москва-реке является подмножеством множества натуральных чисел.

Задача 3. Докажите, что $A \subset B$ и $B \subset A$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

Задача 4. а) Найдите число подмножеств у каждого из множеств задачи 1.
б) Может ли у множества быть ровно 0 подмножеств? 5 подмножеств?
в*) Сколько подмножеств у множества из n элементов?

Задача 5*. Каких подмножеств у 2010-элементного множества больше: имеющих четное или нечетное число элементов?

▷ **Определение 3.** *Объединением* множеств A и B называется множество $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$; их *пересечением* называется множество $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Задача 6. Найдите пересечение множеств а) $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ четное}\}$, $\{b \in \mathbb{Z} \mid b \text{ делится на } 3\}$;
б) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq y, x \geq z\}$, $\{(x, y, z) \mid y \geq x, y \geq z\}$, $\{(x, y, z) \mid z \geq x, z \geq y\}$.

Задача 7. Можно ли в 6-элементном множестве выбрать а) 4 б) 5 подмножеств из 3 элементов, любые два из которых имеют не более одного общего элемента?
в*) А можно ли выбрать 7 таких 3-элементных подмножеств у 7-элементного множества?

Задача 8. Докажите, что а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (“дистрибутивность”).

▷ **Определение 4.** *Разностью* множеств A и B называется множество $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Задача 9. Существуют ли такие бесконечные подмножества A и B целых чисел, что все три множества $A \setminus B$, $B \setminus A$ и $A \cap B$ тоже бесконечны?

Задача 10. Верны ли следующие тожества?
а) $(A \setminus B) \cup B = A$; б) $(A \setminus B) \cap X = (A \cap X) \setminus (B \cap X)$;
в) $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$; г) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

Задача 11*. Докажите, что если в тождестве, использующем только знаки объединения и пересечения заменить все символы “$\cup$” на “$\cap$”, а “$\cap$” на “$\cup$”, то оно останется верным.

Задача 12. Для каждой из операций $\cup$, $\cap$, $\setminus$ выясните, выражается ли она через две остальные.