Экспонента и факториал

Григорий Мерзон (МЦНМО, МИАН)

весна 2025

Есть формулы, в которых неожиданно соединяются понятия из, казалось бы, разных областей математики. Одна из таких замечательных формул — формула Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n.$$

Здесь присутствует и появляющийся в комбинаторике факториал, и «геометрическое» число π, и «число из анализа» e...

Знак «$\sim$» означает, что отношение левой и правой частей стремится к 1 с ростом n. Можно доказать, что это отношение отличается от 1 примерно на $^1/_{12n}$. В частности, для $n = 10$ правая часть отличается от факториала менее чем на 1%.

Мы докажем не буквально формулу Стирлинга, но более слабую оценку на факториал в таком же духе.

Ясно, что $n! < n^n$. Но как связать с факториалом число e? Известно, что экспонента разлагается в степенной ряд:

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + ... + x^k/k! + ... \qquad (*)$$

(см., например, статью А. Егорова «Площадь под гиперболой, логарифм и экспонента» в Кванте №6 за 1973 год). Отсюда сразу следует, что $e^n > n^k/k!$. В частности, $e^n > n^n/n!$ — другими словами, $n! > (n/e)^n$.

Насколько эта оценка далека от точной? Посмотрим на отношение соседних членов суммы (*):

$$\frac{n^{k+1}/(k+1)!}{n^k/k!} = \frac{n}{k+1}$$

Это значит, что самое большое слагаемое получается при $n = k$ — это как раз $n^n/n!$ — а каждое следующее слагаемое уменьшается хотя бы в $n/(n+1)$ раз. То есть сумма первых членов не больше чем $n \cdot (n^n/n!)$, а сумму оставшихся можно оценить сверху суммой геометрической прогрессии с первым членом $n^n/n!$ и знаменателем $n/(n+1)$, т.е. числом $(n+1) \cdot (n^n/n!)$. Таким образом, $e^n < (2n+1)n^n/n!$ — другими словами, $n! < (2n+1)(n/e)^n$.

Итак, мы доказали оценку $(n/e)^n < n! < (2n+1)(n/e)^n$. Наши верхние и нижние оценки отличаются от асимптотически правильной примерно в $C\sqrt{n}$ раз – для настолько быстро растущей величины это очень неплохо.

Такое доказательство слабой формы формулы Стрирлинга приводится, например, в книге «Аналитические функции» (А. Зигмунд, С. Сакс). Доказательство настоящей формулы Стирлинга можно прочитать в книге «Конкретная математика» (Д. Кнут, Р. Грэхем, О. Паташник) или в статье А. Егорова «Интеграл и оценки сумм» в Кванте №4 за 2015 год.

Задачи. 1. Докажите по индукции, что $(n/e) < n! < en(n/e)^n$ (указание: $(1+1/n)^n < e < (1+1/n)^{n+1}$).

2. Если построить график чисел $a(n,k) = n^k/k!$ при фиксированном n (попробуйте!), то видно, что он сосредоточен в полосе ширины порядка $\sqrt{n}$. Цель данного упражнения — понять, почему так происходит.
а) Докажите, что $a(n, n+\sqrt{n})$ хотя бы в полтора раза меньше, чем $a(n,n)$.
б) Докажите, что $a(n, n+\sqrt{n}) > \varepsilon a(n,n)$ для какой-то константы ε, не зависящей от n.

3. Докажите, что а) $A\sqrt{n}(n/e)^n < n!$; б) $n! < B\sqrt{n}(n/e)^n$.

4. Выведите из предыдущей задачи оценку $\frac{2^{2n}}{c_1\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < \frac{2^{2n}}{c_2\sqrt{n}}$ на центральный биномиальный коэффициент (лозунг: «в строке треугольника Паскаля порядка $\sqrt{n}$ больших биномиальных коэффициентов»).