Знакомство

▷ Это занятие письменное. Стоит записать решения, не только ответы (естественно, это не относится к задаче 3, где по условию требуется лишь привести пример).

Задача 1. Вычислите $\left(7{,}4\cdot\dfrac{9}{20}+11{,}6:2\dfrac{2}{9}\right):0{,}57$.

Задача 2. Один торговец продает сливы по 150 рублей за килограмм, а второй — по 120 рублей. Но у первого косточка занимает треть веса каждой сливы, а у второго — половину. Чьи сливы выгоднее покупать?

Задача 3. Покажите, как разрезать прямоугольник 1×5 на пять частей и сложить из них квадрат.

Задача 4. Три друга — Степан, Иван и Кирсан — преподают арифметику, этику и эстетику в школах Казани, Рязани и Лозанны. Степан работает не в Рязани, Иван — не в Казани, казанец преподает эстетику, рязанец — не этику, Иван — не арифметику. Какой предмет и в каком городе преподает каждый из них?

Задача 5. У фальшивомонетчика есть 40 внешне одинаковых монет, среди которых 2 фальшивые — они легче, чем остальные и весят одинаково. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 20 настоящих монет?

Задача 6. Боря и Миша едут в поезде и считают столбы за окном: «один, два, …». Боря не выговаривает букву «Р», поэтому при счете он пропускает числа, в названии которых есть буква «Р», а называет сразу следующее число без буквы «Р». Миша не выговаривает букву «Ш», поэтому пропускает числа с буквой «Ш». У Бори последний столб получил номер «сто». Какой номер этот столб получил у Миши?

Не забудьте подписать и сдать работу.
И приходите на следующее занятие через неделю!
(Оно будет устным.)

* * *

18 октября проходит
открытая *устная* олимпиада 57 школы;
подробности и регистрация на сайте `sch57.ru`

Знакомство (продолжение)

▷ Прежде чем решать дополнительные задачи, советуем внимательно проверить решения основных.

Задача 7. Уменьшится или увеличится и во сколько раз число $1/1996$, если в десятичной записи этого числа зачеркнуть первую отличную от нуля цифру?

Задача 8. В каждой клетке квадрата 101×101, кроме центральной, стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Машинка въезжает извне в произвольную клетку на границе квадрата, после чего ездит параллельно сторонам клеток, придерживаясь двух правил:
— в клетке со знаком «прямо» она продолжает путь в том же направлении;
— в клетке со знаком «поворот» она поворачивает на $90°$.
Центральную клетку квадрата занимает дом. Можно ли расставить знаки так, чтобы у машинки не было возможности врезаться в дом?

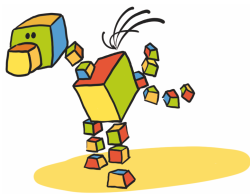
Длина, площадь, объем

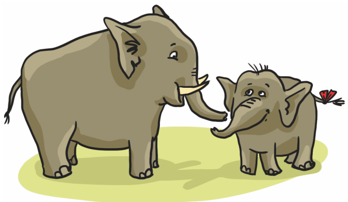
Задача 0. После 7 стирок длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько еще стирок хватит оставшегося куска? (На каждую стирку уходит одно и то же количество мыла.)

Задача 1. а) Как изменится площадь треугольника, если каждую из его сторон уменьшить в 2 раза?

б) Кубарик сложен из нескольких деревянных кубиков. Как изменится его масса, если каждый кубик уменьшить в 2 раза?

в) Как изменится масса слона, если уменьшить его (по всем размерам) в 2 раза?



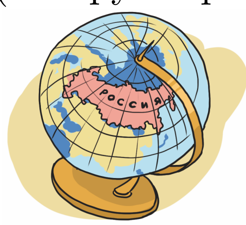


Задача 2. а) Обозначим площадь круга радиуса 1 через V_2. Чему равна площадь круга радиуса R?

б) Обозначим объем шара радиуса 1 через V_3. Чему равен объем шара радиуса R?

Задача 3. Из куба $3 \times 3 \times 3$ удалили центральный кубик и 8 угловых. Можно ли оставшуюся фигуру сложить из брусков $3 \times 1 \times 1$?

Задача 4. На рынке продается два вида арбузов одинакового диаметра. Первый — по 100 рублей, зато с очень тонкой коркой, а второй по 70 рублей, но 20% его радиуса занимает корка (которую придется выкинуть). Какие арбузы выгоднее покупать?



Задача 5. Длина экватора глобуса равна 1 м. а) Каков масштаб глобуса? б) Какую площадь на нем имеет Россия? (Площадь России — примерно 17 000 000 км^2.)

Задача 6*. На левую чашу весов положили две круглых монеты, а на правую — еще одну, так что весы оказались в равновесии. А какая из чаш перевесит, если каждую из монет заменить шаром того же радиуса?

Процессы

Задача 0. Котлету нужно жарить в течение 5 минут с каждой из двух сторон. На сковороде умещается только две котлеты. Можно ли пожарить 3 котлеты быстрее, чем за 20 минут?

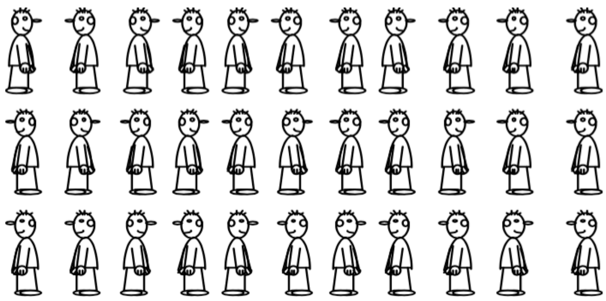
Задача 1. Хулиган Ваня порвал стенгазету на 11 частей. Некоторые из получившихся кусков он снова порвал на 11 частей, и так далее. Могло ли в некоторый момент получиться ровно 2015 кусков?

Задача 2. В точке 0 числовой прямой сидит кузнечик, который может прыгать на 6 или на 15 в ту или другую сторону. а) Сможет ли он попасть в точку 25? б) В какие точки он может попасть?

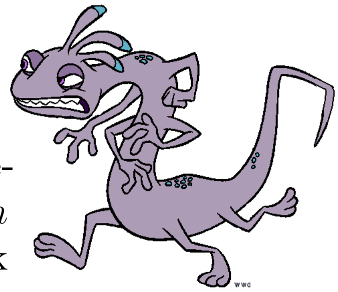
Задача 3. Волк и семеро козлят встали в ряд и играют в чехарду: каждую секунду двое из них, стоящие через одного, могут, прыгнув, поменяться местами. Если окажется, что они стоят в обратном порядке по сравнению с исходным, игра заканчивается. Закончится ли игра?

Задача 4. В пещере живет 2016-головая гидра. Геракл за один раз может срубить 10 или 7 голов. Если он срубит 10 голов, то у гидры вырастет 7 новых, а если 7, то 16 новых голов. Если в какой-то момент у гидры не остается ни одной головы, то она погибает. Может ли Геракл победить гидру?

Задача 5. На уроке физкультуры в первом классе учитель построил учеников в ряд и подал команду «направо!». От этого часть первоклассников действительно повернулась направо, а часть — налево. Через секунду те из первоклассников, которые оказались нос к носу, развернулись каждый на 180°. И дальше это стало повторяться каждую секунду. Можно ли утверждать, что это безобразие когда-нибудь закончится, и первоклассники будут стоять неподвижно?



Процессы (продолжение)



Задача 6. Фирма «Id Software» плодит монстров. Каждый день монстры мутируют. Если сегодня монстр имеет m ручек и n ножек, то назавтра он будет иметь $2m-n$ ручек и $2n-m$ ножек. Если число ручек или ножек становится отрицательным, монстр погибает. При каком начальном количестве ручек и ножек монстр сможет жить вечно?

Задача 7. В парламенте у каждого из его членов не более 3 врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в его палате окажется не более одного врага.

Задача 8. 25 коротышек в цветочном городе образовали садовый кооператив. Для строительства они получили 25 квадратных участка, образующих квадрат 5×5. При разделе участков коротышки перессорились, но каждый приобрел не более трех врагов. Докажите, что участки можно распределить так, что никакие два врага не будут иметь участки с общей стороной.

Процессы II

Задача 0. В новогоднюю ночь на подоконнике стояли в ряд (слева направо) герань, крокус и кактус. Каждое утро Маша, вытирая пыль, меняет местами цветок справа и цветок в центре. Днем Таня, поливая цветы, меняет местами тот, что в центре, с тем, что слева.
В каком порядке будут стоять цветы в следующую новогоднюю ночь?

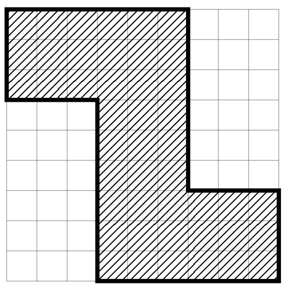
Задача 1. а) На какую цифру оканчивается число 2^{2015}?
б*) На какую цифру оканчивается число $333^{(333^{333})}$?

Задача 2. Один преподаватель оставил на дверях всех кабинетов в школе записки вида «Я в кабинете номер ...» и исчез в неизвестном направлении. Некоторый школьник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.

Задача 3. На отрезке AB отмечена точка X так, что $AX/AB = 1/10$. После этого отрезок AB разделили на 2^{2015} равных частей. В каком отношении точка X делит ту часть, на которую попадает?

Задача 4. Напомним, что числа Фибоначчи — это последовательность $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ (первые два числа — единицы, а каждое следующее есть сумма двух предыдущих). Докажите, что можно найти 100500 чисел Фибоначчи, делящихся а) на 5; б) на 10; в) на 100.

Задача 5. Разрежьте фигуру ниже на 3 части и сложите из них квадрат. Двумя способами.



Следующее занятие — **11 ноября**
(4 ноября занятия не будет!)

Процессы II (продолжение)

Задача 6. Существует ли число, которое оканчивается на 4 и увеличивается в 4 раза, если перенести четверку в начало?

Дополнительный вопрос: какую обыкновенную дробь нужно перевести в бесконечную десятичную, чтобы увидеть ответ?

Задача 7. а) Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в первоначальное состояние, выполнив эту комбинацию ещё несколько раз.

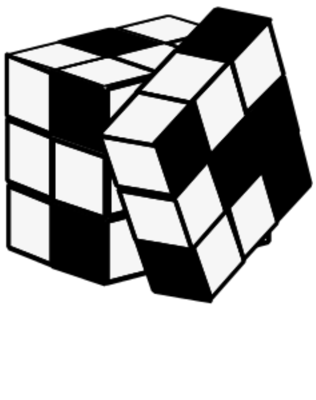
б*) Существует ли комбинация поворотов, повторяя которую можно собрать кубик рубика из любого состояния?

Задача 8. *Последовательность Морса–Туэ* нулей и единиц строится следующим образом. Сначала пишется 0, а на каждом следующем шаге к уже выписанному фрагменту приписывается новый фрагмент той же длины, полученный заменой всех 0 на 1 и наоборот:

$$0110\,1001\,1001\,0110\,1001\ldots$$

а) Какая цифра стоит на 2016-м месте?

б) Является ли эта последовательность периодической?



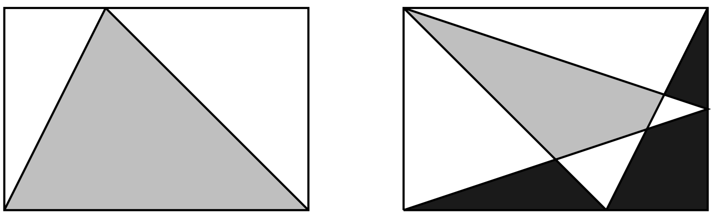
Разрезания и перекладывания

Задача 0. Можно ли разрезать квадрат 101×101 на прямоугольники 3×1?

Задача 1. Разрежьте прямоугольник 4×9 на два равных многоугольника и сложите их них квадрат.

Задача 2. Треугольник лежит в прямоугольной коробке (см. рис. слева). Какую часть площади коробки он занимает?

Задача 3. На двух сторонах прямоугольника отметили произвольным образом по точке. Какая часть площади прямоугольника больше: серая или черная (см. рис. справа)?



▷ Будем говорить, что один многоугольник можно *перекроить* в другой, если первый можно разрезать на многоугольные части и сложить из них второй.

Задача 4. Перекроите крест из 5 равных квадратов в один квадрат.

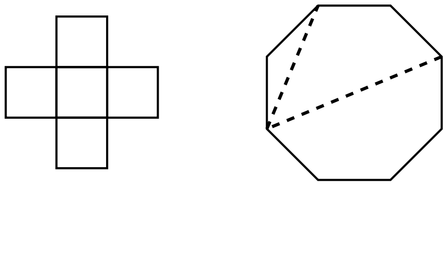
Задача 5. а) Треугольник можно перекроить в прямоугольник, одна из сторон которого равна одной из сторон треугольника.

б) Прямоугольник можно перекроить в равнобедренный треугольник.

в) Любой треугольник можно перекроить в равнобедренный.

Задача 6. Параллелограмм можно перекроить в прямоугольник, одна из сторон которого равна одной из сторон параллелограмма.

Задача 7. Правильный восьмиугольник можно перекроить в прямоугольник, длины сторон которого равны самой короткой и самой длинной диагоналям восьмиугольника.



Разрезания и перекладывания

Задача X (теорема Бойяи–Гервина). Если два многоугольника имеют одинаковую площадь, то один можно перекроить в другой.

Может быть полезно сначала доказать, что любой параллелограмм можно перекроить в эталонный:

Задача 8. Любой параллелограмм можно перекроить а) в параллелограмм со стороной 1; б) в прямоугольник со стороной 1.

Соответствия

Задача 0. Чего больше: способов выбрать 5 предметов из 12 или способов выбрать 7 предметов из 12?

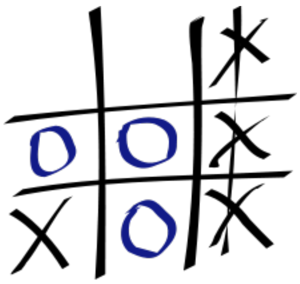
Задача 1. На окружности отмечено 1000 синих точек и одна красная точка. Чего больше: треугольников с вершинами в синих точках или четырехугольников, у которых одна вершина красная, а остальные синие?

Задача 2. В одном доме живут 12 мальчиков и одна девочка. Назовем «компанией» любую группу, состоящую из двух или более детей из этого дома. Каких компаний больше: с девочкой или без девочки? на сколько?

Задача 3. Постройте *соответствие* между двумя играми:

(1) Есть жетоны с числами от 1 до 9 (по одному жетону каждого вида). Два игрока по очереди берут по жетону. Если после какого-то хода у игрока нашлось 3 жетона с суммой чисел, равной 15, он выиграл.

(2) Двое играют в крестики-нолики на поле 3×3.



Соответствия (продолжение)

Задача 4. *Не решая* задачи ниже, постройте соответствие между объектами, количество которых требуется найти в каждом из пунктов а–е с одной из «эталонных задач» 1–3 (так, чтобы решив эталонные задачи, мы сразу получали решение остальных):

(1) Сколькими способами можно построить 57 школьников в шеренгу?

(2) Сколькими способами можно из 57 участников собрания выбрать председателя и его заместителя?

(3) Сколькими способами можно выдать двумя из 57 семиклассников дополнительную задачу?

а) Сколько сторон и диагоналей у 57-угольника?

б) Сколькими способами можно расставить 57 ладей на шахматной доске размера 57×57 так, чтобы они не били друг друга?

в) Сколькими способами победитель олимпиады может выбрать два приза из 57 имеющихся?

г) Есть 57 разных конфет. Сколькими способами можно раздать их по одной 57 семиклассникам?

д) Сколькими способами можно расставить в таблице 3×19 числа от 1 до 57?

е) Сколькими способами можно отметить в таблице 3×19 две клетки?

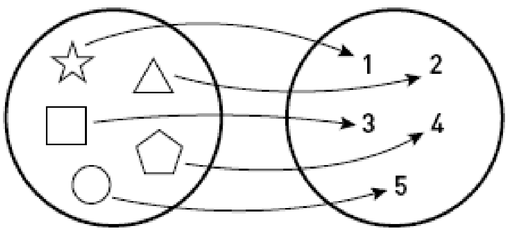
Задача 5. У Тома Сойера есть забор из n досок и белая краска. Сколькими способами он может покрасить нечетное число досок забора?

Задача 6. Постройте соответствие между следующими задачами:

(1) Сколькими способами можно представить число n в виде суммы единиц и двоек (порядок слагаемых учитывается)?

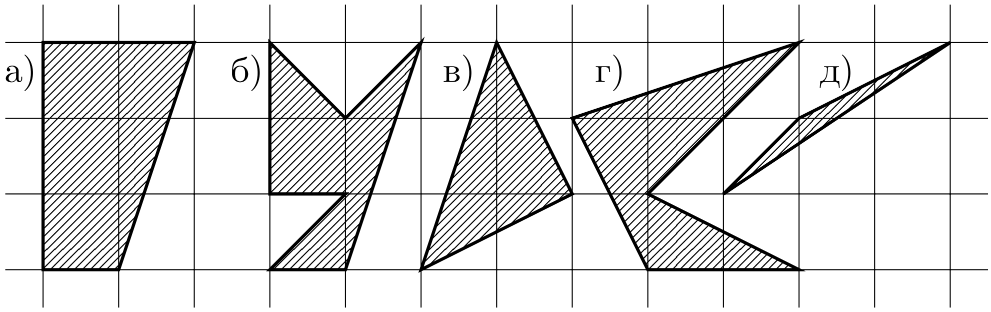
(2) Сколькими способами можно представить число $n+1$ в виде суммы нечетных слагаемых (порядок слагаемых учитывается)?

Задача 7. Докажите, что $2n$-значных чисе из n единиц и n двоек столько же, сколько n-значных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, в которых поровну цифр 1 и 2.



Площади на клетчатой бумаге

Задача 1. Найдите площади (в клеточках) фигур на рисунке.



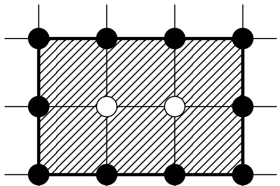
Задача 2. На клетчатой бумаге отмечены вершины квадрат 4×4. Отметьте еще два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник площади 6 клеток.

Задача 3. Докажите, что площадь а) треугольника; б) четырехугольника с вершинами в узлах сетки либо целая, либо полуцелая.

Площадь треугольника может быть найдена по формуле $S = ah/2$. Но эта формула утверждение предыдущей задачи совершенно не объясняет: сторона и высота треугольника могут быть и не целыми.

Оказывается, для многоугольников на клетчатой бумаге есть другая формула для площади, в которой (полу)целочисленность сразу видна. Сначала обсудим ее в простейшем случае.

Задача 4. а) Выразите площадь клетчатого прямоугольника со стороной 1 через количество узлов сетки, через которые он проходит.
б) Выразите площадь клетчатого прямоугольника через количество i узлов сетки внутри него и количество b узлов сетки на его границе.

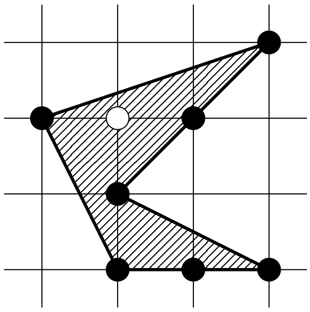


$i = 2$, $b = 10$

Задача 5. Белка за 20 минут приносит орех в гнездо (убегает из гнезда и через 20 минут возвращается с орехом). Каково расстояние от орешника до гнезда, если налегке белка бежит со скоростью 5 м/с, а с орехом — 3 м/с?

Формула Пика

▷ **Формула Пика** состоит в том, что площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки есть $i + \frac{b}{2} - 1$, где i — количество узлов сетки внутри многоугольника, b — количество узлов на его границе.



$i = 1$, $b = 7$

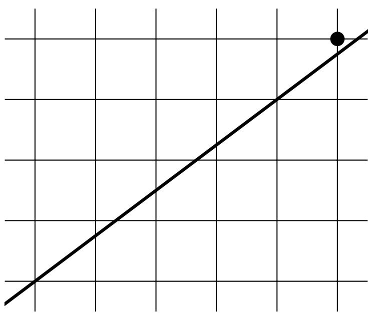
Задача 6. Докажите формулу Пика а) для прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки; б) для любого треугольника, одна из сторон которого идет по линиям сетки.

Задача 7. а) Если многоугольник с вершинами в узлах сетки разрезан на две части, для каждой из которых верна формула Пика, то формула Пика верна и для всего многоугольника.

б) Формула Пика верна для любого треугольника.

в) Формула Пика верна для любого многоугольника.

Задача 8. Найдите расстояние от точки до прямой на картинке ниже.



Сумма и среднее

Задача 0. С начала полугодия Вовочка успел получить 21 оценку по математике, из них 4 тройки, а остальные двойки. Какое наименьшее количество троек ему нужно получить в декабре, чтобы троек стало не меньше 1/3 от всех оценок?

Задача 1. Альбрехт составил из первых 16 чисел (полу)магический квадрат 4×4 (т. е. так расставил эти числа в таблице 4×4, что сумма по каждой строке и по каждому столбцу одна и та же).

а) Чему может быть равна эта сумма?

б) Приведите пример такого квадрата.

Задача 2. А бывают ли “магические прямоугольники” 4×5 (таблицы 4×5 из натуральных чисел, в которых сумма по каждой строке и по каждому столбцу одна и та же)?

Задача 3. Кое-кто в классе смотрит футбол, кое-кто — мультики, но нет таких, кто не смотрит ни то, ни другое. У любителей мультиков средний балл по математике меньше 4, у любителей футбола тоже. Может ли средний балл всего класса по математике быть больше 4?

Задача 4. Братья Витя и Сережа ходят в школу. Витя половину *времени* идет пешком, половину — бежит, а Сережа половину *пути* идет пешком, половину — бежит. Кто из них добирается быстрее? (Ходят и бегают братья с одинаковой скоростью.)

Задача 5. Две хозяйки покупали молоко каждый день в течение месяца. Цена на молоко ежедневно менялась. Средняя цена молока за месяц оказалась равной 20 рублям за литр. Ежедневно первая хозяйка покупала по литру, а вторая — на 20 рублей. Кто из них потратил за этот месяц больше денег и кто купил больше молока?

Сумма и среднее (продолжение)

Задача 6. В первом поселке живет 50 школьников, а во втором 100. Где надо построить школу, чтобы среднее расстояние, проходимое школьником, было наименьшим?

Задача 7. В Москве на некотором километровом участке Садового кольца средняя скорость движения машин в правом ряду — 5 км/ч, в двух средних — 6 км/ч, в левом — 7 км/ч (в каждом ряду помещается одинаковое количество машин). Найдите среднее время, за которое машины проезжают этот участок Садового кольца.

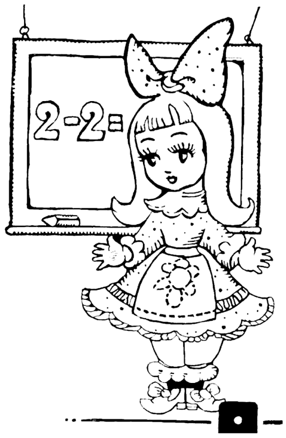
Задача 8. а) Что больше: $1 + 3 + 5 + \dots + 99$ или $50 \cdot 50$?

б) Что больше: $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2$ или $50 \cdot 50^2$?

в) Что больше: $\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \ldots + \frac{1}{300}$ или $201 \cdot \frac{1}{200}$?

Введение переменных

Задача 1. Один градус шкалы Цельсия равен 1,8 градусов шкалы Фаренгейта, при этом 0° по Цельсию соответствует 32° по шкале Фаренгейта. Может ли температура выражаться одинаковым числом градусов как по Цельсию, так и по Фаренгейту?

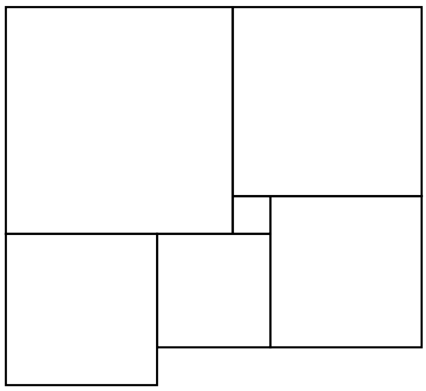


Задача 2. Мальвина велела Буратино разделить число на 2, а к результату прибавить 3. Он же по ошибке умножил число на 2, а от полученного произведения отнял 3. Но ответ все равно получился правильный. Какой?

Задача 3. На окружности отметили 100 точек и соединили каждые две отрезком. Сеня покрасил точки в два цвета. Какое наибольшее количество отрезков с концами в точках разного цвета могло получиться?

Решив эту задачу, подумайте про задачи 8б) и в) прошлого листка.

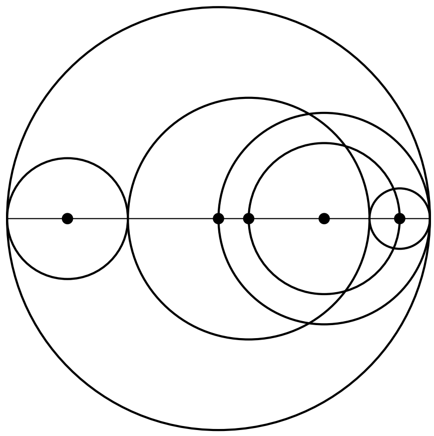
Задача 4. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего квадрата, если известно, что сторона самого маленького квадрата равна 1.



Введение переменных (продолжение)

Задача 5. В турнире Солнечного города по шахматам каждый из 100 участников сыграл с каждым ровно по одному разу (“турнир в один круг”). После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за победу действительно давалось 1 очко, но за ничью давалось не $1/2$ очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение — не 0 очков, а -1. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

Задача 6. Шесть окружностей расположили на плоскости как на рисунке (центры окружностей отмечены, все они лежат на одной прямой). Известно, что диаметр правой (самой маленькой) окружности равен 2. Какой радиус имеет самая левая из внутренних окружностей?



Задача 7. В турнире по волейболу несколько команд сыграли в один круг (каждая играла с каждой по одному разу, ничьих в волейболе не бывает). Пусть P — сумма квадратов чисел, задающих количество побед каждой команды, Q — сумма квадратов чисел, задающих количество их поражений. Докажите, что $P = Q$.

Неравенство треугольника

▷ Длина любой из сторон треугольника меньше суммы длин двух других.

Задача 1. Длины сторон неравнобедренного треугольника — целые числа. Какое минимальное значение может принимать периметр этого треугольника?

Задача 2. Обобщите неравенство треугольника на четырехугольники, пятиугольники.

Задача 3. Среди любых ли 10 палочек найдутся три, из которых можно сложить треугольник?

Задача 4. Четыре дома расположены на окружности. Где надо вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от домов до колодца была наименьшей?

▷ Напомним, что многоугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда все его диагонали лежат внутри него.

Задача 5. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы его противоположных сторон.

Задача 6. Вифсла, Тофсла и Хемуль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал 6 снежков, Хемуль — 5, а Тофсла — 4. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков.

Неравенство треугольника (продолжение)

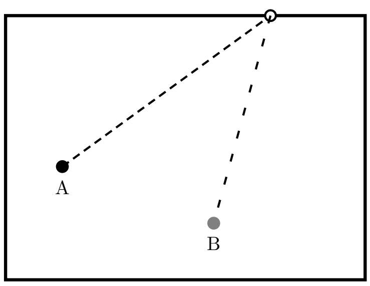
Задача 7. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, у которого все диагонали равны?

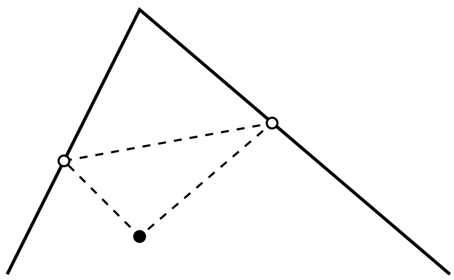
Задача 8. На плоскости отмечено несколько точек (никакие три точки не лежат на одной прямой), некоторые из которых соединены отрезками. Если проведены отрезки AC и BD, разрешается заменить их на отрезки AB и CD. Докажите, что за несколько таких операций можно добиться того, чтобы отрезки не пересекались (кроме как в общих концах).

Задача 9. Стекло машины (прямоугольное) закрыто не до конца. Гусенице надо проползти из точки A на этом стекле с внутренней стороны в точку B на этом стекле с внешней стороны. Помогите ей найти кратчайший путь.

Задача 10. а) Полуостров представляет собой острый угол, внутри которого находится дом лесника. Как леснику, выйдя из дома, добраться до одного берега полуострова, затем до другого и вернуться домой, пройдя по самому короткому пути?

б) А если полуостров — тупой угол?





Новогодние чудеса

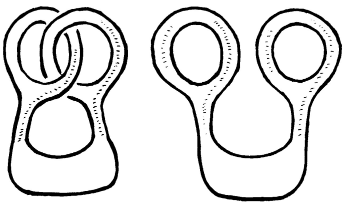
Задача 1. Мальчик Степа говорит: позавчера мне было 10 лет, а в следующем году мне исполнится 13. Может ли такое быть?

Задача 2. Нарисуйте два пятиугольника так, чтобы у них были одни и те же вершины, но не было ни одной общей стороны.

Задача 3. В коробке лежит несколько звездочек. Вася и Кирилл по очереди берут звездочки из коробки и украшают ими елку. Первым ходом Вася берет сколько-то звездочек (но не все), а дальше каждый берет не больше звездочек, чем взял предыдущим ходом партнер. тот, кто не может сделать ход, проиграл. Кто может выиграть, как бы ни действовал партнер, если всего звездочек а) 7; б) 10; в) N?

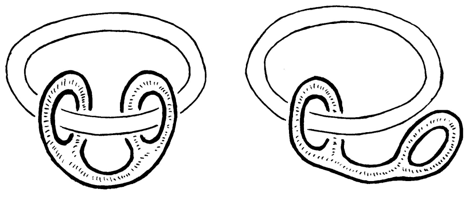
Задача 4. У Деда Мороза имеется десять больших мешков с одинаковыми елочными игрушками. Оказалось, что в одном из мешков находятся фальшивые елочные игрушки, которые, как известно, выглядят и пахнут как настоящие, но не приносят никакого счастья (и, вдобавок, на 10% легче настоящих). Как определить мешок с фальшивыми игрушками всего за 2 взвешивания на электронных весах?

Задача 5. а) Никита очень эластичен. Как ему разъединить сцепленные пальцы обеих рук, не расцепляя их?



(Продеформируйте фигуру на картинке слева в фигуру на картинке справа. Фигуру можно сжимать, гнуть и так далее, но нельзя склеивать, рвать, проделывать дырки.)

б) Петя очень силен и умеет деформировать предметы: сжимать, разжимать, гнуть и так далее, но не умеет их склеивать, рвать, проделывать дырки. Эластичный крендель надет двумя ручками на бублик. Как Пете снять одну из ручек кренделя с бублика?



в) Пытаясь решить первый пункт задачи, Никита окончательно запутался. Помогите ему все-таки распутаться. (Продеформируйте фигуру на картинке слева в фигуру на картинке справа.)

Объяснить, как происходит деформация, проще всего с помощью рисунков промежуточных стадий.

Новогодние чудеса (продолжение)

Задача 6. На Новый год к детям пришел математический Дед Мороз с мешком конфет. Конфет в мешке бесконечно много и все они пронумерованы.

За минуту до полуночи Дед Мороз взял первую конфету и подарил детям. Через полминуты он понял, что дал мало, и дал детям 2 следующие конфеты, а первую забрал. Еще через четверть минуты он дал детям 4 следующие конфеты (с номерами 4, 5, 6, 7), а две имеющиеся забрал. И так далее: щедрый Дед Мороз каждый раз выдает вдвое больше новых конфет, а старые забирает. Сколько конфет будет у детей в полночь?

До встречи в новом году!
(первое занятие — **13 января**)

Числа на доске

Задача 1. На доске написаны числа от 1 до 57. Каждую минуту какую-то пару чисел a и b заменяют на число а) $a + b$ б) $a + b - 1$; в) ab; г) $ab + a + b$. Какое число может остаться на доске в итоге?

Задача 2. На столе стоят 16 стаканов, один из которых перевернут донышком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?

Задача 3. В каждой из клеток таблицы стоит либо знак «+», либо знак «−». За ход разрешается заменить в одной строке или одном столбце все знаки на противоположные. Можно ли получить таблицу из одних плюсов из следующих таблиц?

а)

+	+	+	+
+	−	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

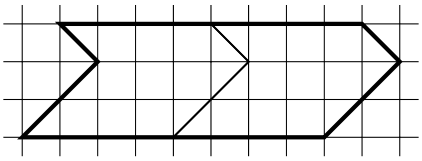
б)

−	+	+	−
+	−	−	+
+	−	−	+
−	+	+	−

в)

−	+	+	−
+	+	+	+
+	+	+	+
−	+	+	−

Задача 4. Петя разрезал фигуру на две равные части, как показано на рисунке. Придумайте, как разрезать эту фигуру на две равные части другим способом.



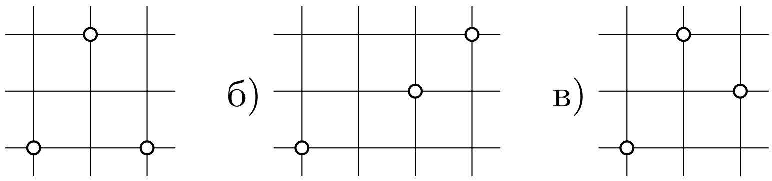
(продолжение)

Задача 5. а) На 44 елках, растущих в ряд через равные промежутки, сидят 44 веселых чижа, на каждой елке — по чижу. Если какой-то чиж перелетает с одной елки на другую, то какой-то другой чиж обязательно перелетает на столько же метров в противоположном направлении. Могут ли все чижи собраться на одной елке?

б) Тот же вопрос, если елки стоят по кругу.

Задача 6. Три кузнечика играют в чехарду на клетчатом листе бумаге: в начале они сидят в трех углах одной клетки, а дальше каждую секунду один их кузнечиков прыгает через другого (и оказывается в симметричной относительно него точке). Могут ли кузнечики оказаться в следующих точках?

а) б) в)



Задача 7. Докажите, что в условиях задачи 3 таблицу из одних плюсов можно получить тогда и только тогда, когда в каждом квадрате 2×2 число минусов четно.

Задача 8*. Исследуйте задачу про кузнечиков — до каких троек точек они могут добраться?

Лингвистика

Задача Л0. Даны слова: *люк, яр, ель, лён.* Что получится, если звуки, из которых состоят эти слова, произнести в обратном порядке.

Задача Л1. Вот семь венгерских существительных: nyírfa, körte, alma, almak, körtefa, nyírfak, almafa. А вот их переводы на русский язык: береза, груша, яблоня, яблоко, березы, яблоки (заметьте: этими шестью русскими словами переведены все семь венгерских). Установите, какое венгерское слово какому русскому соответствует.

Задача Л2. Японские названия некоторых годов по традиционному восточному календарю: *канота уси* (1901), *хиноэ ума* (1966), *цутиноэ ума* (1978), *цутиното хицудзи* (1979), *каноэ сару* (1980), *хиноэ тора* (1986), *цутиното ми* (1989), *мидзуноэ ума* (2002), *мидзуното хицудзи* (2003), *хиноэ ума* (2026). Какой год идет сейчас?

Задача Л3. Между животными на одной исландской ферме очень плохие отношения: все они боятся друг друга. Предложение «Они боятся друг друга» на исландский переводится по-разному в зависимости от того, о каких животных идёт речь:

о быке и трёх петухах	Þeir óttast hver annan
о двух козах и овце	Þær óttast hver aðra
о козе и петухе	Þau óttast hvort annað
о двух курицах и четырёх ослицах	Þær óttast hver aðra
об осле и овце	Þau óttast hvort annað
о петухе и баране	Þeir óttast hvor annan

Заполните пропуск в утверждении «Если речь идёт о петухе и ..., то надо сказать “Þau óttast hvert annað”».

До 26 января идет онлайн-тур Традиционной олимпиады по лингвистике

HTTP://LINGLING.RU/OLYMP.PHP

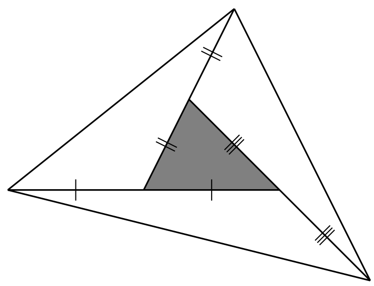
Не лингвистика

Задача М1. Пароход шёл от Нижнего Новгорода до Астрахани 5 суток, а обратно — 7 суток. Сколько дней плывут плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

Задача М2. На доске написаны числа $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/57$. Каждую минуту какую-то пару чисел a и b заменяют на число $\frac{ab}{a+b}$. Какое число может остаться на доске в итоге?

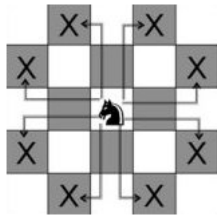
Задача М3. а) Докажите, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

б) Найдите площадь большого треугольника, если площадь закрашенного треугольника равна 1.



Черное и белое

Задача 1. а) Обойдите конем доску 5×5, побывав в каждой клетке по одному разу (пронумеруйте клетки в соответствии с порядком обхода).



б) Закрасьте в таблице из предыдущего пункта все клетки с нечетными номерами. Что получилось? Почему?

в) Сделав несколько ходов, конь вернулся на исходное поле. Докажите, что он сделал четное число ходов.

Задача 2. Доска а) 3×3; б) 5×5; в) 9×9 разрезана на доминошки 2×1 и одну клетку. Где может располагаться эта клетка?

Задача 3. а) В каждой клетке доски 9×9 сидит по жуку. В некоторый момент каждый жук перелетает в соседнюю (по стороне) клетку. Докажите, что после этого останется хотя бы одна пустая клетка.

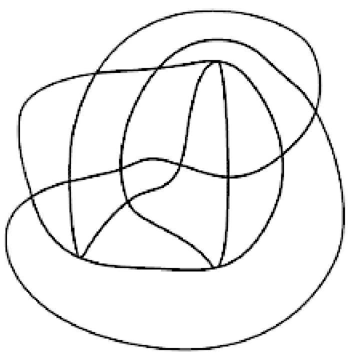
б) В каждой клетке доски 9×9 сидит по гусенице. В некоторый момент каждая гусеница переползает в соседнюю *по диагонали* клетку. Докажите, что после этого хотя бы 9 клеток останутся свободными.

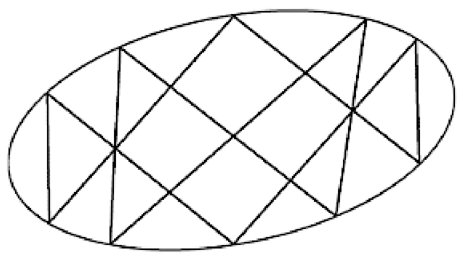
Задача 4. а) Как покрасить доску 6×6 в три цвета так, чтобы в любом прямоугольнике 1×3 содержались все три цвета?

б) Васе подарили набор «Юный паркетчик», состоящий из 12 прямоугольников 3×1. Хулиган Кирилл заменил один из них на уголок из трех клеток. Сможет ли Вася сложить квадрат 6×6?

в) Доска 8×8 разрезана на 21 прямоугольник 3×1 и одну клетку. Где может располагаться эта клетка?

Задача 5. Можно ли обойти все страны (переходя каждый раз из страны в граничущую с ней), не побывав ни в какой дважды, для карт ниже? Если это возможно, закрасьте страны с нечетными номерами.





Черное и белое (продолжение)

Задача 6. В каждой вершине некоторого многогранника сходится четное число граней. Докажите, что если жук прополз по нескольким граням этого многогранника (каждый раз переползая из грани в соседнюю по ребру) и вернулся на исходную грань, то он сделал четное число ходов.

Задача 7. Докажите, что грани многогранника можно покрасить в два цвета правильным образом (так, чтобы имеющие общее ребро грани были разных цветов) тогда и только тогда, когда в каждой его вершине сходится четное число граней.

Задача 8. Покрасьте точки плоскости в какое-нибудь число цветов (лучше — поменьше), чтобы любые две точки на расстоянии ровно 1 были покрашены в разные цвета.

Какое *минимальное* число цветов необходимо в этой задаче — известная нерешенная проблема.

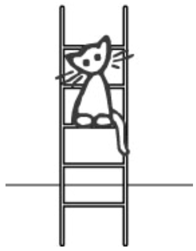
Геометрия

Задача 1. Даны точки A и B. Найдите множество точек X таких, что а) $AX = XB$; б) $AX < XB$.

Задача 2. а) Докажите, что если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.

б) Докажите, что в прямоугольном треугольнике медианы, проведенная из прямого угла, равна половине гипотенузы.

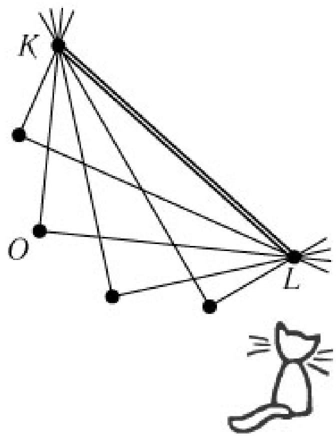
Задача 3. Дан отрезок KL. Найдите множество точек O таких, что угол KOL прямой («геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом»).



Задача 4. Лестница, стоявшая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз (все время касаясь стены). По какой линии движется котенок, сидящий на середине лестницы?

Задача 5. Напомним, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. Докажите, что площади 6 возникающих треугольничков равны.

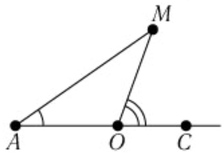
Задача 6. Можно ли разрезать доску 10×10 на полоски 1×4?



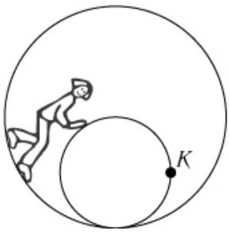
Геометрия (продолжение)

Задача 7. Дан треугольник ABC найдите множество точек X таких, что площади треугольников ABX и CBX равны.

Задача 8. Точка O лежит на отрезке AC. Найдите множество точек M таких, что угол MOC вдвое больше угла MAC.



Задача 9. По неподвижной окружности, касаясь её изнутри, катится без проскальзывания окружность вдвое меньшего радиуса. По какой траектории движется фиксированная точка на меньшей окружности?

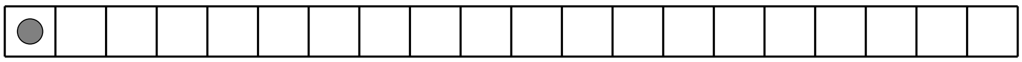


Задача 10. Точки P и Q движутся с одинаковой скоростью по двум пересекающимся прямым. Докажите, что на плоскости существует (неподвижная) точка, расстояния от которой до точек P и Q в любой момент времени равны.

Играем в игры

▷ Во всех играх ниже играют двое, ходы делаются по очереди (пропускать ходы нельзя). Если в условии не сказано иного, тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Требуется выяснить, какой из игроков (начинающий или его соперник) может выиграть, как бы не играл другой.

Задача 0. В самой левой клекте полоски 1×20 стоит фишка. За ход разрешается подвинуть ее на 1, 2 или 4 клетки вправо.



Задача 1. Ферзь стоит в клетке c1 шахматной доски (третьей слева клетке нижней строки). За ход разрешается сдвинуть его вверх, вправо, или вправо-вверх на любое число клеток.

Задача 2. Имеется шоколадка 5×7. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом (любого из имеющихся уже кусков) вдоль углубления.

Задача 3. Имеются две кучки, из 5 и из 7 камней. За ход разрешается взять либо любое число камней из одной кучки, либо поровну камней из обеих кучек.

Задача 4. На доске написано число 60. За ход разрешается уменьшить число на любой из его делителей, кроме самого числа (в том числе на 1).

Задача 5. Даны точки A и B. Найдите множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на всевозможные прямые, проходящие через точку B.

Приходите в воскресенье 21 февраля на
Математический праздник!
(подробности, регистрация — на www.mccme.ru/matprazdnik)

Играем в игры (продолжение)

Задача 6. На доске написаны числа от 1 до N. За ход разрешается вычеркнуть любое число вместе со всеми его делителями.

Задача 7. В кучке 15 камней. За ход разрешается взять 1, 2 или 3 камня. Выигрывает тот, у кого в итоге получилось четное число камней.

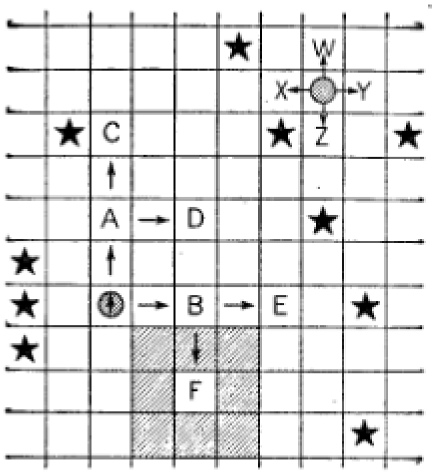
Задача 8. Мин и Макс красят забор из 20 досок. Каждый по очереди красит одну из досок в черный или белый цвет. Начинает Макс. Когда весь забор покрашен, подсчитывают число изменений цвета (границ, где черный цвет сменяется белым или наоборот). Макс хочет, чтобы это число максимизировать это число, а Мин — минимизировать. Каким будет результаты игры при оптимальных действиях обоих?

Задача 9. В центре бесконечной шахматной доски находится находится полицейская машина (фишка со стрелкой). За ход она либо сдвигается на 2 клетки вперед (в направлении стрелки), либо поворачивает направо, и сдвигается на 2 клетки после этого (на рисунке ниже показано, куда полицейская машина может доехать за 2 хода).

В другой клетке доски находится преступник. Он за ход может пойти в любую из 4 соседних клеток. Если полицейская машина попадает в одну из восьми соседних с преступником клеток, он считается пойманым. Первыми ходят полицейские.

а) Найдите среди клеток, отмеченных на рисунке звездочками, единственную проигрышную для преступника.

б) Найдите все клетки, проигрышные для преступника (для конкретного начального положения машины их оказывается конечное число).



Принцип крайнего

Задача 0. Докажите, что квадрат нельзя разрезать на равнобедренные треугольники с углами а) $70°$, $70°$, $40°$; б*) $75°$, $75°$, $30°$.

Задача 1. На шахматной доске стоит несколько ладей. Докажите, что какая-то из ладей бьет не более двух других.

Задача 2. Шахматная доска разбита на доминошки. Докажите, что какая-то пара доминошек образует квадратик 2×2.

Задача 3. По кругу выписаны несколько чисел, каждое равно полусумме двух соседних. Докажите, что все числа равны.

Задача 4. а) Можно ли числа от 1 до 99 выписать в строку так, чтобы любые два соседних отличались не менее, чем на 50? б) Тот же вопрос для чисел от 1 до 100.

Задача 5. На кружке 7 класса вместо занятия прошло соревнование по перетягиванию каната. В результате все оказались занесены в список по убыванию силы. Сева задумался: верно ли, что любые трое перетянут любых двоих. За сколько перетягиваний он сможет это установить?

Задача 6. На каждой из 1001 планеты некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету (среди расстояний между планетами нет одинаковых). Докажите, что а) найдутся две планеты, астрономы которых наблюдают друг друга; б) хотя бы одну планету никто не наблюдает.

Принцип крайнего (и еще)

Задача 7. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, полностью покрывают этот четырехугольник.

Задача 8. В некоторой стране 100 аэродромов, причем все попарные расстояния между ними различны. С каждого аэродрома поднимается самолет и летит на ближайший к нему аэродром. Докажите, что ни на один аэродром не может прилететь больше пяти самолетов.

Неравенства с дробями и без

Задача 1. Как изменится площадь прямоугольника, если одну его сторону увеличить на 20%, а другую уменьшить на 20%?

Задача 2. Расположите дроби в порядке возрастания:
1555/1444, 1666/1555, 7777/8888, 8888/9999.

Задача 3. Правильную дробь перевернули. Какая из двух дробей ближе к единице: исходная или перевернутая?

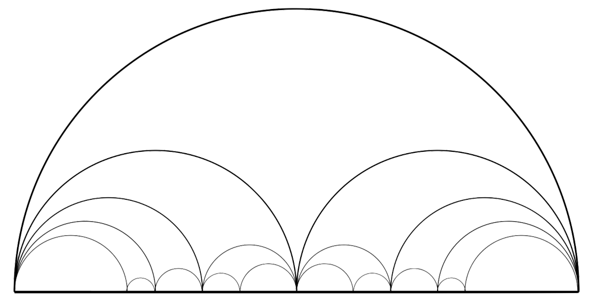
Задача 4. Города A и B расположены на реке в 10 км друг от друга. На что пароходу потребуется больше времени: проплыть от A до B и обратно, или проплыть 20 км по озеру?

Задача 5. Какую максимальную площадь может иметь прямоугольник периметра 20?

Задача 6. Может ли внутри треугольника лежать отрезок, который длиннее каждой из сторон треугольника?

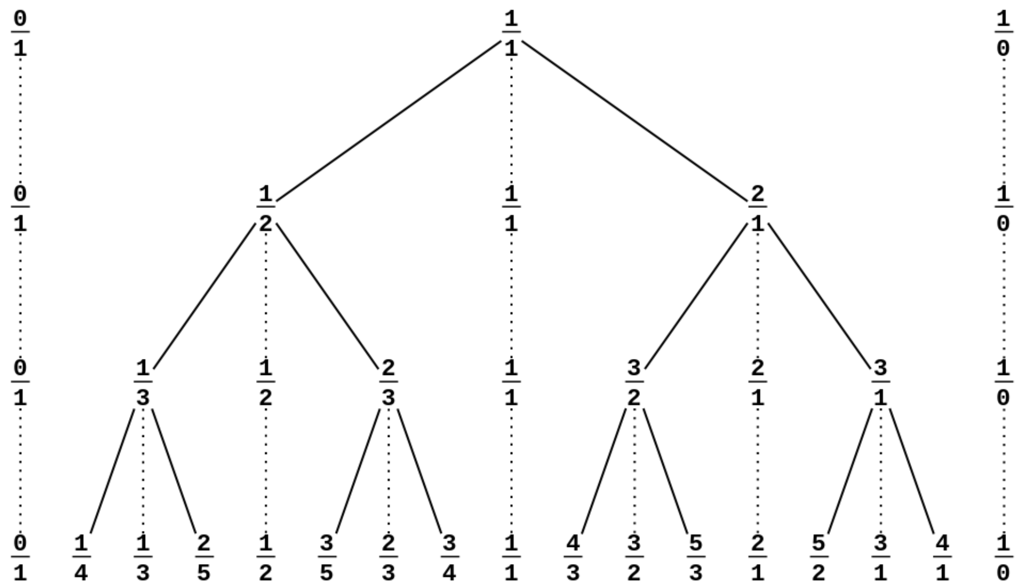
Задача 7. а) Вовочка Ф. так и не научился складывать дроби: он числитель складывает с числителем, а знаменатель со знаменателем. Докажите, что «складывая» две дроби Вовочка всегда получает число, лежащее между двумя исходными дробями.

б) Выпишите все правильные дроби со знаменателями, не превосходящими 7, в порядке возрастания.



Призовая игра

Объясните, как получается дерево ниже и как его продолжать. Поищите в нем интересные закономерности.

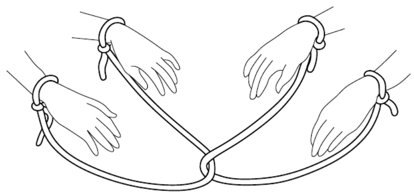


Игры с узлами

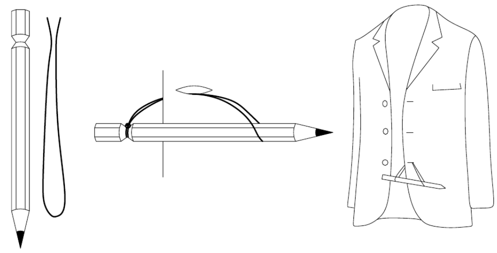
Задача Т0. Король со свитой движется из пункта А в пункт Б со скоростью 5 км/ч. Каждый час он высылает гонцов в Б, которые движутся со скоростью 20 км/ч. С какими интервалами прибывают гонцы в Б?

Задача Т1. На столе лежит веревка. Как, взяв один конец верёвки в левую руку, а другой конец — в правую (и не выпуская концы из рук), завязать на ней простой узел?

Задача Т2. Двух людей связали друг с другом, как показано на рисунке. Как им расцепиться, не развязывая и не разрывая веревку?



Задача Т3. В карандаше сделали небольшой желобок около одного из концов, и взяли веревку, длина которой меньше удвоенного расстояния от желобка до другого конца карандаша. Затем веревку привязали к карандашу, пропустив веревку через петлицу пиджака, как показано на рисунке справа. Как снять карандаш с пиджака?



Задача Т4. Имеется картина и длинная веревка. Как намотать веревку а) на 2; б) на 3 вбитых в стену гвоздя так, чтобы при вытаскивании из стены любого гвоздя повешенная на концах веревки картина падала?

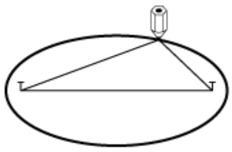
В середине марта начинаются собеседования
для желающих поступить в 8 матккласс 57 школы
(подробности, регистрация — на sch57.ru/admission/)

Эллипс, гипербола, парабола

▷ Эллипс — это множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных («фокусов») постоянна (и больше расстояния между фокусами).

▷ Гипербола — это множество точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных («фокусов») постоянен (и меньше расстояния между фокусами).

▷ Парабола — это множество точек, равноудаленных от данной точки («фокуса») и данной прямой («директрисы»).

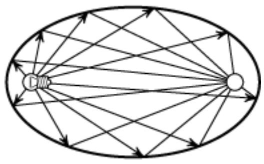


Задача Г1. Найдите множество центров окружностей
а) касающихся данной прямой и проходящих через данную точку;
б) касающихся данной окружности и проходящих через даную точку;
в) касающихся данной окружности и данной прямой.

Задача Г2. Дана окружность и точка A внутри нее. Найдите множество середин отрезков, соединяющих A с точками окружности.

▷ Прямая может либо пересекать эллипс в 2 точках, либо касаться в 1 точке.

Задача Г3. а) Если эллипс с фокусами A и B касается прямой l, то среди всех точек X прямой сумма $AX + BX$ минимальна в точке касания.
б) Отрезки, соединяющие точку X эллипса с его фокусами, составляют равные углы с касательной к эллипсу в точке X.



Задача Г4. Дан эллипс с фокусами A и B. Найдите а) множество точек, симметричных A относительно всех касательных к эллипсу; б) множество оснований перпендикуляров, опущенных из A на все касательные к эллипсу.

Странное

Задача 1. Свежий арбуз на 99% состоит из воды. На склад поступила тонна свежих арбузов. Через две недели арбузы подсохли и доля воды в них понизилась до 98%. Сколько теперь весят эти арбузы?

Задача 2. Числитель дроби увеличили на 1, а знаменатель — на 100. Могла ли дробь увеличиться?

Задача 3. Земной шар стянули обручем по экватору. Затем обруч удлинили на 1 м (так, что образовавшийся зазор везде одинаков). Пролезет ли под обручем кошка?

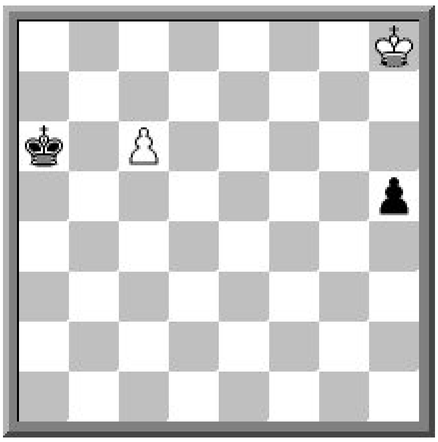
Задача 4. Четыре человека с сундуком хотят переправиться через реку. Люди весят 45, 50, 60 и 65 кг, сундук – 100 кг. Лодка выдерживает груз не более 200 кг. Сундук можно погрузить в лодку или вытащить из нее только вчетвером. Как им всё-таки всем переправиться, не оставив и сундук?

Задача 5. На доске написано:

В этом предложении ...% цифр делятся на 2, ...% цифр делятся на 3, а ...% цифр делятся и на 2, и на 3.

Вставьте вместо многоточий какие-нибудь целые числа так, чтобы написанное на доске утверждение стало верным.

Задача 6. Белые начинают, но их позиция (см. диаграмму ниже) выглядит безнадежной: они не успевают ни догнать пешку черных, ни провести в ферзи свою. Найдите ничью за белых.



Странное (и ещё)

Задача 7. Раскрасьте картинку ниже в 5 цветов так, чтобы множества точек одного цвета, были попарно равны (т. е. если закрасить каждый цвет на своем прозрачном листе, то любые два листа должно быть возможно совместить так, чтобы закрашенные части совпали).

Указание. Каждый цвет состоит из 4 целых правильных треугольничков и нескольких маленьких частей.