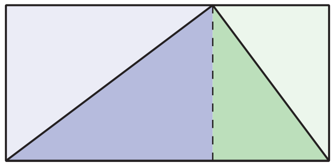
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

Григорий Мерзон

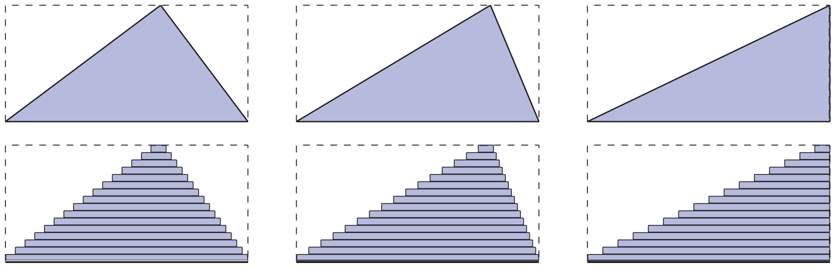
ПЛОЩАДИ И ПЕРЕКАШИВАНИЯ

Наверное, большинство читателей слышали, что площадь треугольника равна половине произведения его основания на проведённую к ней высоту. А задумывались ли вы о том, почему это верно?



В этом нетрудно разобраться, если нарисовать картинку. Произведение основания на высоту – это площадь «коробки», в которую можно убрать наш треугольник. А после того как высота проведена, видно, что треугольник занимает ровно половину коробки: половину левой части и половину правой.[1]

В рассуждении выше мы связали произвольный треугольник с прямоугольными, разрезав его на части. Но есть и совершенно другой подход, связанный с *перекашиванием* фигур: любой треугольник можно перекосить в прямоугольный треугольник с теми же основанием и высотой.



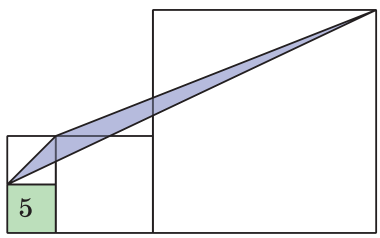
При таких перекашиваниях площади сохраняются. Вот наглядное объяснение. Представьте себе, что треугольник состоит из тонких горизонтальных полосок. При перекашивании эти полоски просто сдвигаются друг относительно друга, поэтому площадь не меняется.

Если вы согласны считать такие неформальные соображения в духе Архимеда убедительными, то мы

[1] Если треугольник тупоугольный, может возникнуть некоторая проблема – подумайте, как её решить (или загляните в статью Е. Бакаева «Площадь треугольника» в «Квантике» № 7 за 2019 год).

получили ещё одно доказательство формулы для площади треугольника. Если же это не кажется убедительным, то можно заметить, что и наоборот, сохранение площади треугольников при перекашиваниях следует из формулы для площади треугольника.

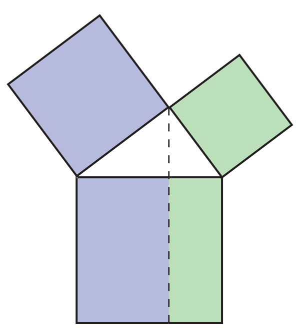
Задача 1. Площадь левого нижнего квадрата равна 5. Найдите площадь фиолетового треугольника. (Может показаться, что данных недостаточно: ведь правый квадрат может иметь разные размеры. Попробуйте понять, почему от его размера ответ не зависит...) [2]



ЛЕММА ЕВКЛИДА

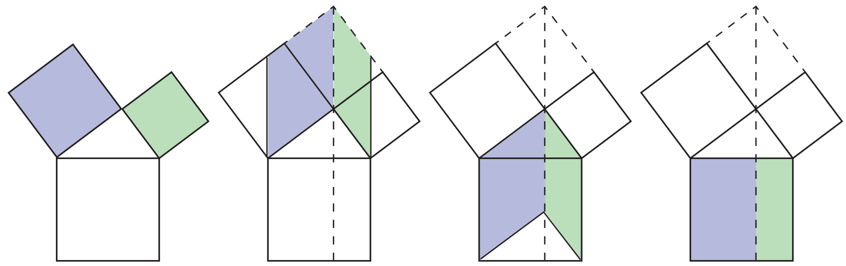
Наверное, самая знаменитая теорема классической геометрии – теорема Пифагора о том, что в прямоугольном треугольнике длины сторон связаны соотношением $a^2+b^2=c^2$.

Её утверждение означает, что построенный на гипотенузе квадрат можно разбить на две части: площади a^2 и площади b^2. Оказывается – и в этом состоит утверждение *леммы Евклида,* – для этого есть замечательно простая конструкция: достаточно провести высоту из вершины прямого угла!



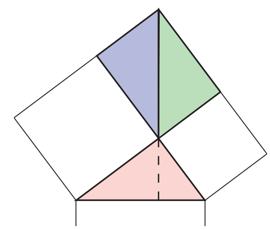
[2] Решение можно найти в «Квантике» № 1 за 2019 год на с. 28.

Эту лемму совсем не сложно доказать, используя перекашивания – см. рисунки ниже.



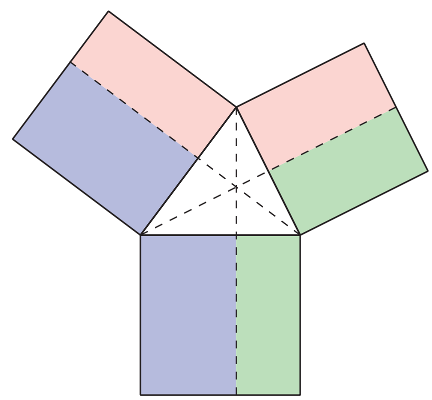
Первое перекашивание состоит в том, что мы делаем одну из сторон вертикальной. Но нужно ещё проверить, что после она становится равной гипотенузе. Можно сделать это следующим образом.

Задача 2. Стороны построенных на катетах квадратов продолжены до пересечения. Докажите, что два возникающих треугольника равны исходному, а их общая гипотенуза является продолжением его высоты.



Утверждение леммы Евклида можно обобщить:

Задача 3. Докажите при помощи перекашиваний, что в остроугольном треугольнике продолжения высот делят построенные на сторонах квадраты на 3 пары равновеликих прямоугольников.



Из последней задачи следует, что для остроугольного треугольника выполнено следующее обобщение теоремы Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2 - 2S$, где S – площадь каждого из двух прямоугольников, не примыкающих к стороне c.

Задача 4. Докажите (пользуясь этим обобщением теоремы Пифагора), что в треугольнике с углом 60° длины сторон связаны соотношением $c^2 = a^2 + b^2 - ab$.

Художник Алексей Вайнер