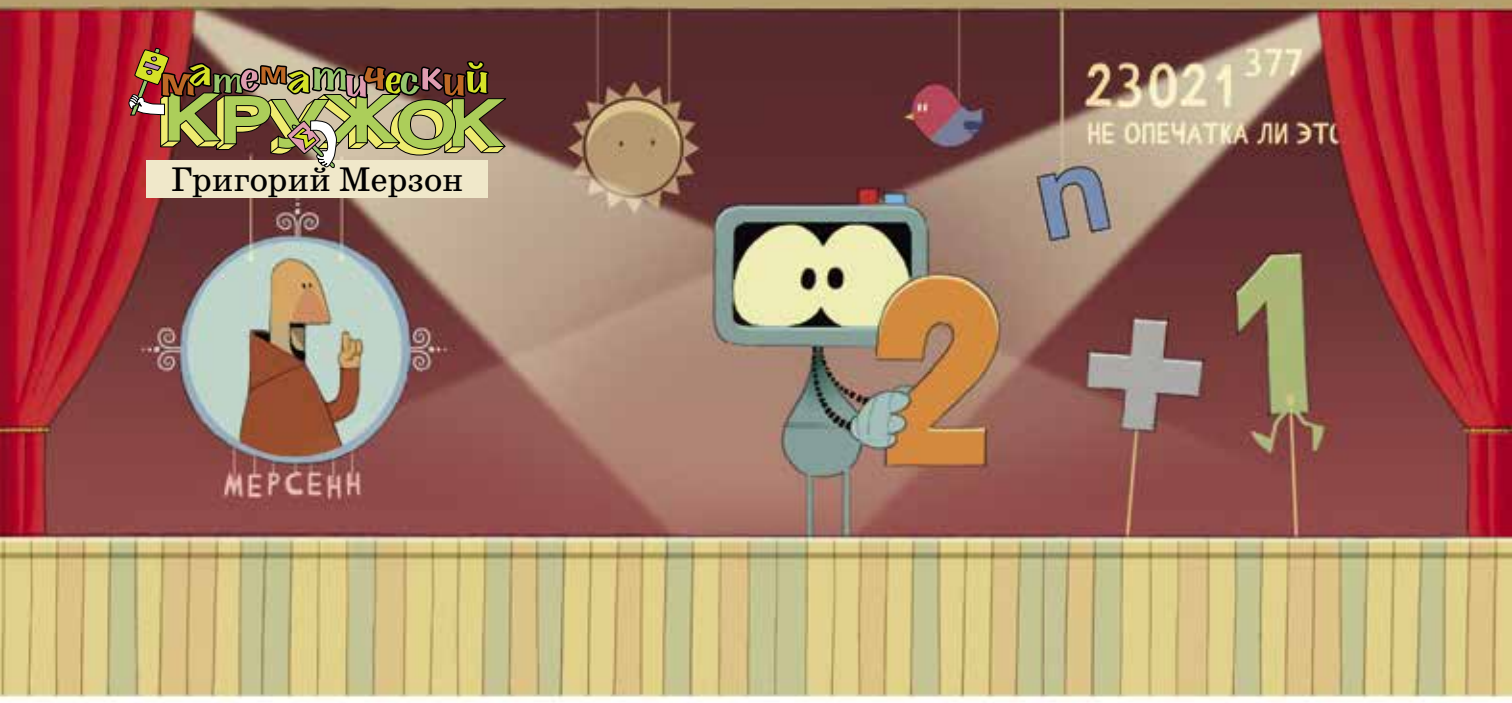
Григорий Мерзон



ПРОСТЫЕ ЧИСЛА МЕРСЕННА

На XII Математическом празднике в 2001 году предлагалась такая задача Сергея Маркелова:

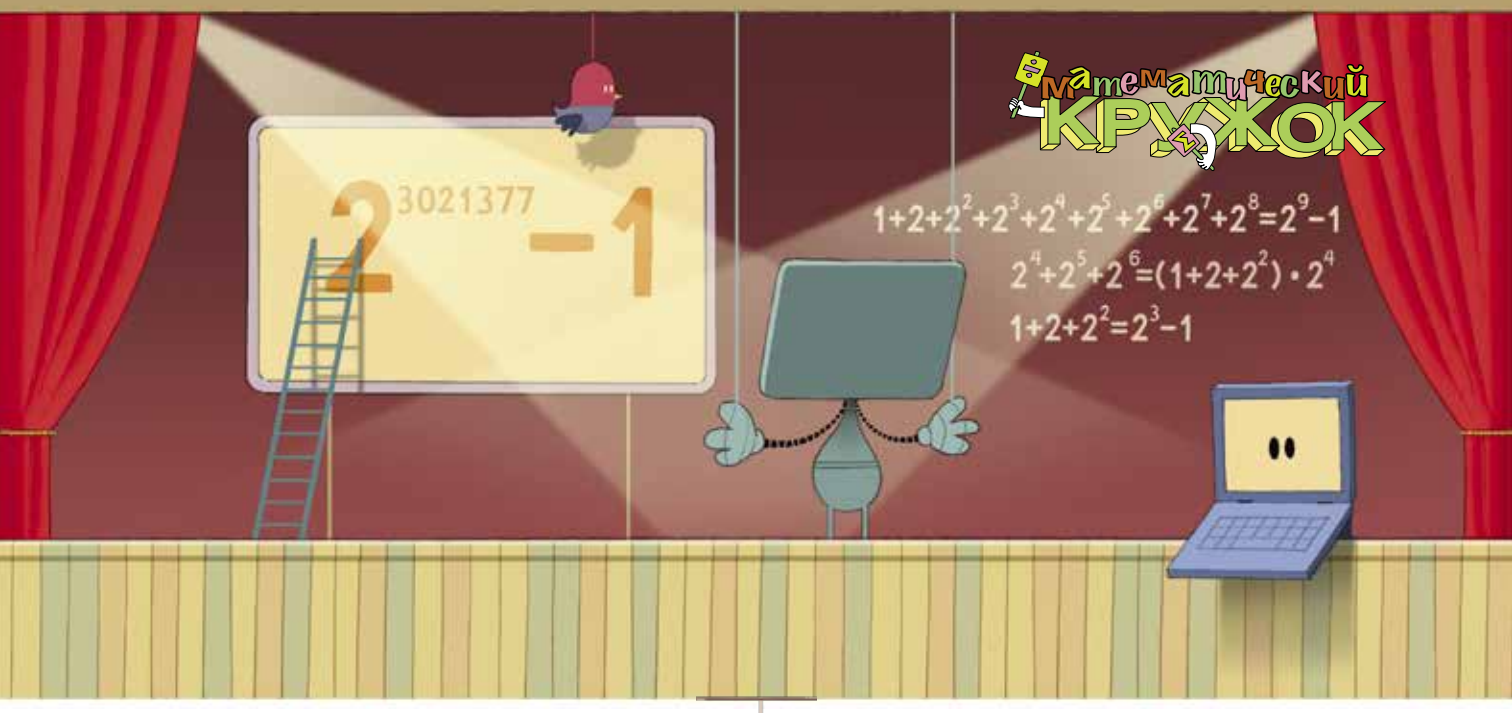
В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377} - 1$. *Не опечатка ли это?*

Чтобы решить задачу, достаточно заметить, что это число чётное... и даже оканчивается на 0 (то есть делится и на 10). Так что простым оно быть не может.

А как на самом деле выглядят самые большие[1] известные нам простые числа? Оказывается, большинство из них имеют вид «два в какой-то степени минус один». В частности, число

Французский монах Марен Мерсенн (1588–1648) занимался не только философией и богословием, но и физикой, математикой, теорией музыки. Но, возможно, самая важная его роль – это роль организатора научного общения. Научных журналов тогда ещё не существовало, вместо этого учёные обменивались письмами. Мерсенн был одним из центров этой переписки. Среди его регулярных корреспондентов и гостей – Галилей, Гюйгенс, Декарт, Б. Паскаль, Э. Паскаль, Роберваль, Торричелли, Ферма... можно сказать, целая неформальная «Парижская академия наук» (официально Академия наук появилась во Франции во второй половине XVII века, тогда же появились первые научные журналы).

[1] Вопрос может показаться странным – ведь уже Евклид приводит доказательство того, что простых чисел бесконечно много. Но одно дело знать, что их в принципе бесконечно много, а другое дело – найти конкретные примеры больших простых чисел!



$2^{127}-1$ было самым большим известным простым числом с 1876 года аж до середины XX века (когда для поиска начали использовать компьютеры), а в 1998 году самым большим известным простым числом было число $2^{3021377}-1$ (с ним и связана задача выше). Такие простые числа называют *простыми числами Мерсенна* в честь Марена Мерсенна, который изучал их в XVII веке.

Числа вида 2^n-1 – это суммы степеней двойки. Например,

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8=2^9-1.$$

(Если не сразу понятно, почему это так – прибавьте к левой части единицу! Первое слагаемое превратится в 2, вместе со вторым слагаемым это даст $2\cdot 2=2^2$, вместе со следующим $2\cdot 2^2=2^3$... В итоге получится удвоенное последнее слагаемое, $2\cdot 2^8=2^9$.)

Теперь можно (без всяких вычислений!) сообразить, что число 2^9-1 не простое. Ведь слагаемые в левой части равенства можно разбить на группы по три, и каждая группа делится на первую – например,

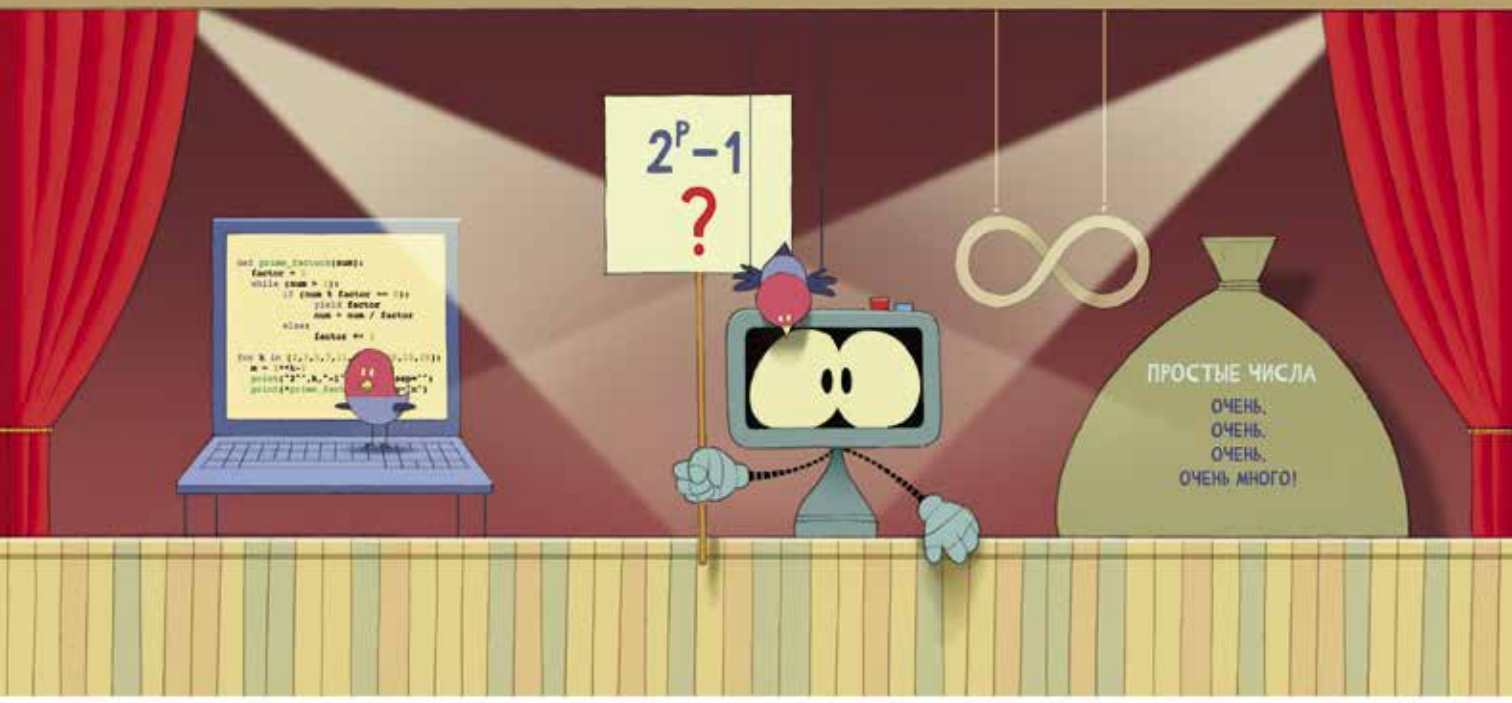
$$2^4+2^5+2^6=(1+2+2^2)\cdot 2^4.$$

То есть 2^9-1 делится на

$$1+2+2^2=2^3-1.$$

Точно так же можно доказать, что если n делится на m, то 2^n-1 делится на 2^m-1.

Итак, если число n составное, то число 2^n-1 простым быть не может. А если число n простое? Начнём с эксперимента. Для $n=2,\ 3,\ 5$ действительно получаются простые числа... но хотелось бы изучить чуть больше примеров, а числа быстро становятся довольно большими – так что удобно воспользоваться небольшой программой.



Художник Алексей Вайнер

Например, на Питоне:

```
def prime_factors(num):
   factor = 2
   while (num > 1):
         if (num % factor == 0):
               yield factor
               num = num / factor
         else:
               factor += 1

for k in [2,3,5,7,11,13,17,19,23,29]:
   m = 2**k-1
   print("2^",k,"-1",end="=",sep="")
   print(*prime_factors(m),sep="x")
```

Если запустить эту программу, то сразу видно, что число $2^{11}-1=23\cdot 89$ не является простым, как не являются простыми и числа $2^{23}-1$ и $2^{29}-1$.

Так что и числа вида 2^p-1 приходится проверять на простоту. Для этого есть специальные методы, но для чисел из миллионов цифр и они требуют много времени. Поэтому найденное в 2018 году простое число $2^{82\,589\,933}-1$ довольно долго оставалось самым большим известным простым. Но в октябре 2024 года этот рекорд был побит: теперь рекордсмен – это число $2^{136\,279\,841}-1$ из более чем 40 миллионов цифр. Уже известно полсотни простых чисел Мерсенна и мало кто сомневается, что их бесконечно много... – но всё же это не доказано.

Напомним, что число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, отличных от этого числа. Например, число 6 совершенное: $6=1+2+3$.

Задача. Пусть число 2^p-1 простое. Докажите, что число $2^{p-1}(2^p-1)$ совершенное.

Решение этой задачи можно найти уже у Евклида. А Эйлер доказал, что так получаются *все* чётные совершенные числа. Нечётных совершенных чисел, вероятно, не существует, но это до сих пор не доказано.