

1	2 а	2 б	2 в	3 а	3 б	3 в	4	5 а	5 б	6 а	6 б	6 в	7	8	9	10	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	11 е	11 ж	12	13	14 а	14 б	14 в

Примечание. Идеи геометрического суммирования чисел восходят ко временам Древней Греции. Тогда же, по всей видимости, впервые были хорошо изучены свойства так называемых *фигурных чисел*, включающих в себя треугольные, четырёхугольные, пятиугольные, шестиугольные и т. д. Согласно философским взглядам пифагорейцев, фигурные числа играют важную роль в структуре мироздания. Наиболее ёмко эти взгляды выражает фраза, приписываемая основателю школы, Пифагору Самосскому (570—490 гг. до н. э.): «Всё есть число».

Фигурные числа интересовали математиков и в дальнейшем. Одна из самых любопытных теорем, связанных с ними, была обнаружена французским математиком Пьером Ферма́ (1601-1665 гг.), и заключается в следующем. Оказывается, любое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более, чем n n -угольных чисел. В частности, любое натуральное число представимо в виде суммы не более, чем четырёх квадратов. Полное доказательство теоремы впервые было дано в 1813 году другим французом — Огюстеном Луи Коши́ (1789-1857 гг.).

[illegible]

Задача 10°. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких различных степеней двойки (возможно, включая нулевую степень).

Задача 11. Докажите, что если число $a + \frac{1}{a}$ — целое, то все числа вида $a^n + \frac{1}{a^n}$ — тоже целые.

Задача 12. *Прямыми общего положения* называется такой набор прямых, в котором никакие две прямые не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. *Плоскостями общего положения* называется такой набор плоскостей в трёхмерном пространстве, в котором никакие две плоскости не параллельны, никакие три не проходят через одну прямую и никакие четыре не проходят через одну точку. **а)** В скольких точках пересекаются n прямых общего положения? **б)** На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения? **в)*** На сколько частей делят пространство n плоскостей общего положения?

Задача 13. (*Задача о ханойских башнях*) Имеются три стержня. На первом из них лежит пирамида из n колец, причём если одно кольцо лежит на другом, то оно меньшего размера. Разрешено перекладывать кольца на другие стержни так, чтобы это свойство сохранялось. Докажите, что:

а) для любого n можно переложить пирамиду с первого стержня на третий;

б) для такого перекладывания достаточно $2^n - 1$ действий;

в) меньшим числом действий обойтись нельзя.

Задача 14*. На химической конференции присутствовало n учёных — химиков и алхимиков, причём химиков было больше, чем алхимиков. Известно, что на любой вопрос химики всегда отвечают правду, а алхимики иногда говорят правду, а иногда лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого учёного хочет установить, химик тот или алхимик. Для этого он любому учёному может задать вопрос: «Кем является X : химиком или алхимиком?» (в частности, он может спросить, кем является сам этот учёный). Докажите, что при $n > 1$ математик может установить это за $2n - 3$ вопроса.

Задача 15*. Даны положительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Известно, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{1}{2}$. Докажите, что $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) < 2$.

Задача 16*. На кольцевой автомобильной дороге стоит несколько машин. Известно, что общего количества бензина во всех стоящих автомобилях достаточно для того, чтобы заправленная этим бензином машина смогла объехать всю трассу и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы один из автомобилей, стоящих на дороге, может объехать всё кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

Задача 17*. k пиратов хотят поделить добычу. Любой из них убеждён, что он поделит бы добычу на равные части, однако остальные ему не верят. Каким образом надо действовать пиратам, чтобы после раздела каждый был уверен, что ему досталось не менее $1/k$ части добычи, если

а) $k = 2$, **б)** $k = 3$, **в)** k — произвольное натуральное число?

Задача 18*. Двое играют в игру, исход которой не зависит от случая. Игроки ходят по очереди, причём по правилам игра продолжается не более n ходов и ничьих не бывает. Докажите, что у одного из игроков есть выигрышная стратегия.

Задача 19*. Докажите, что сумма цифр числа N может превосходить сумму цифр числа $5^5 \cdot N$ не более, чем в 5 раз.

10	11	12 а	12 б	12 в	13 а	13 б	13 в	14	15	16	17 а	17 б	17 в	18	19

Примечание. Отдельные случаи применения математической индукции для доказательства бесконечной череды утверждений встречались ещё во времена Древней Греции и Средневековья. Однако принято считать, что своим становлением в качестве одного из важнейших методов обоснования индукция обязана французскому математику Блезу Паскалю (1623-1662 гг.). А её современный вид сложился в XIX веке.

[illegible]

Задача 8. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполнены равенства:

- а) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A;$ б) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$
 в) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C;$
 г)° $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

Определение 6. Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов x таких, что $x \in A$ и $x \notin B$. Обозначение: $A \setminus B$.

Задача 9. Для множеств A, B, C, D из задачи 7 найдите следующие множества:

- а) $(A \cup B) \setminus (C \cap D);$ б) $(A \cup D) \setminus (B \cup C);$ в) $A \setminus (B \setminus (C \setminus D));$
 г) $D \setminus ((B \cup A) \setminus C);$ д) $((A \setminus (B \cup D)) \setminus C) \cup B.$

- Задача 10°.** Верно ли, что для любых множеств $A, B, C:$ а) $(A \setminus B) \cup B = A;$
 б) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B;$ в) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C);$ г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$
 д) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$ е) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B?$

Определение 7. Декартовым произведением множеств A и B называется множество, состоящее из всех упорядоченных пар (a, b) , где $a \in A, b \in B$. Обозначение: $A \times B$.

Задача 11. Из каких элементов состоят следующие множества: $\{0, 1\} \times \{9\}, \quad \{0, 1\} \times \{0, 1\}, \quad \emptyset \times \emptyset, \quad \{5, 7\} \times \{1, 3, 17\}, \quad \{16, 41\} \times \emptyset?$

Задача 12°. Верно ли, что для всех множеств A, B, C, D выполняются равенства

- а) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D);$ б) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)?$

Задача 13. (Принцип включения-исключения) Пусть $|M|$ обозначает количество элементов множества M , состоящего из конечного числа элементов.

- а)° Докажите, что $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$
 б)* Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для n множеств.

Задача 14*. На дереве 15 листьев. Докажите, что можно сорвать 8 из них так, что оставшиеся будут давать не менее $7/15$ исходной тени.

Задача 15*. Сколько различных множеств можно получить из множеств A, B, C, D задачи 7 при помощи операций а) $\cup, \cap, \setminus;$ б) $\cup, \cap;$ в) $\cup, \setminus;$ г) $\cap, \setminus?$

8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	10	10	10	10	10	11	12	12	13	13	14	15	15	15	15
а	б	в	г	а	б	в	г	д	а	б	в	г	д	е		а	б	а	б		а	б	в	г

Примечание. Теория множеств появилась в конце XIX века, её основоположником по праву считается немецкий математик Георг Кантор (1845-1918 гг.). Практически сразу же с момента своего возникновения она стала одним из важнейших разделов математики, и сейчас дальнейшее развитие науки без неё немыслимо. Особую роль теория множеств сыграла в вопросах обоснования математики. Впоследствии мы с вами немного затронем эту область; главным образом, исследуя природу действительных чисел.

Определение 1. Правило f , сопоставляющее каждому элементу x множества X ровно один элемент y множества Y , называется *отображением из множества X в множество Y* . Если Y является числовым множеством, то отображение называют *функцией*. Обозначения: $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = y$, $x \mapsto y$.

Отображения можно задавать картинкой. Например, отображение f из множества $\{7, 9, 11\}$ в множество $\{0, 1\}$, для которого $f(7) = 0$, $f(9) = 0$, $f(11) = 1$, можно изобразить так, как показано на рис. 1.

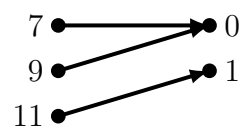
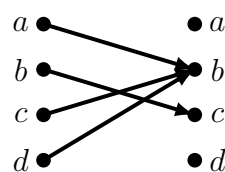
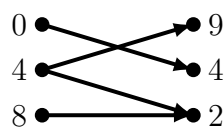
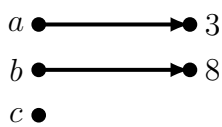
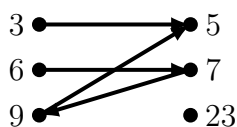


Рис. 1. Отображение.

Задача 1. Какие из следующих картинок определяют отображения?



Определение 2. Графиком отображения $f : X \rightarrow Y$ называется множество $\Gamma(f) \subset X \times Y$, состоящее из всех пар вида $(x, f(x))$, где $x \in X$.

Точно так же, как и отображения, графики имеют наглядную интерпретацию. Так, например, график $\{(1, a), (2, b), (3, a), (4, c)\}$, соответствующий отображению $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c\}$, изображён на рис. 2.

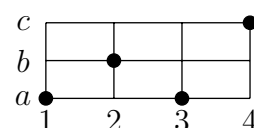
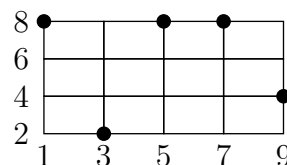
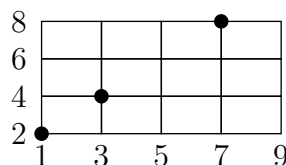
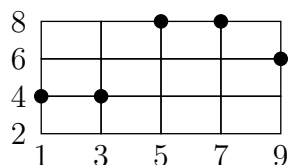
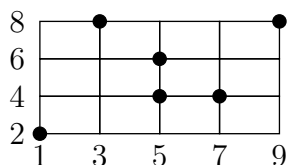


Рис. 2. График.

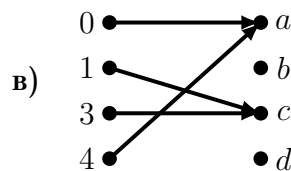
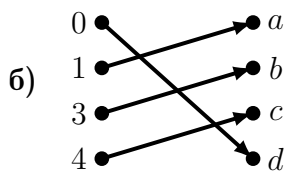
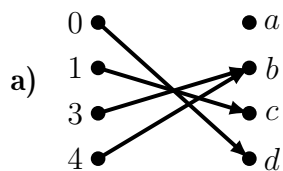
Задача 2. Какие из приведённых ниже картинок соответствуют графикам отображений?



Задача 3. Нарисуйте всевозможные отображения из множества $\{a, b, c\}$ в множество $\{0, 1\}$, а также соответствующие им графики.

Определение 3. Пусть дано отображение $f : X \rightarrow Y$. Если $f(x) = y$, то y называется *образом элемента x* , x — *прообразом элемента y* . Множество, состоящее из всех элементов x таких, что $f(x) = y$, называется *полным прообразом элемента y* при отображении f (обозначение: $f^{-1}(y)$). *Образом множества $A \subset X$* при отображении f называется множество, состоящее из всех элементов вида $f(x)$, где $x \in A$ (обозначение: $f(A)$). *Прообразом множества $B \subset Y$* называется множество, состоящее из всех таких x , что $f(x) \in B$ (обозначение: $f^{-1}(B)$).

Задача 4. Для каждого из указанных ниже отображений $f : \{0, 1, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ найдите $f(\{0, 3\})$, $f(\{1, 3, 4\})$, $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(\{a, b\})$, $f^{-1}(\{b, d\})$.



Задача 5. Пусть $f : X \rightarrow Y$, $A_1, A_2 \subset X$. Обязательно ли верно ли, что: а) $f(X) = Y$;
б) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; в) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$; г) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$;
д) если $A_1 \subset A_2$, то $f(A_1) \subset f(A_2)$; е) если $f(A_1) \subset f(A_2)$, то $A_1 \subset A_2$; ж) $f^{-1}(f(A_1)) = A_1$?

Задача 6. Пусть $f : X \rightarrow Y$, $B_1, B_2 \subset Y$. Обязательно ли верно, что:

а) $f^{-1}(Y) = X$;
б) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; **в)** $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
г) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$; **д)** если $B_1 \subset B_2$, то $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;
е) если $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$, то $B_1 \subset B_2$; **ж)** $f(f^{-1}(B_1)) = B_1$?

[illegible]

7	8 а	8 б	9	10	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	11 е	11 ж	11 з	12 а	12 б	12 в	12 г	13	14	15	16	17

Правило суммы. Если объект A можно выбрать m способами, а объект B — n способами, то выбор либо A , либо B можно осуществить $m + n$ способами.

Задача 1°. Пусть A и B — множества, причём $|A| = n$ и $|B| = m$.

- Задача 2.** а) Забор состоит из 35 досок, каждую из которых нужно покрасить в красный, жёлтый или зелёный цвета. Сколькими способами это можно сделать, если соседние доски должны быть окрашены в разные цвета?

- б)** А если дополнительно требуется, чтобы хотя бы одна из досок была зелёной?

Задача 3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей, чтобы они

- а)** не били друг друга; **б)** держали под боем все незанятые ими клетки доски?

Задача 4. а) Сколько существует целых чисел от 0 до 999999, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?

- б) На окружности отмечено десять точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках?

Задача 5. Пусть $A = \{2, 57, 91, 179, 239, 2014, 2017\}$, $B = \{2, 91, 239, 2014\}$, $C = \{2, 57, 239\}$.

- Сколько подмножеств множества A не содержат элементы множества B ?
- Сколько подмножеств множества A содержат хотя бы один элемент из множества C ?
- Сколько подмножеств множества A содержат хотя бы один элемент из множества B и хотя бы один элемент из множества C ?

Задача 6. а) Сколькими способами можно раскрасить стороны правильного n -угольника в n цветов, используя каждый цвет ровно один раз? Раскраски, совмещаемые поворотом n -угольника, считаются одинаковыми.

- б) Сколькими способами можно расположить числа на сторонах игрального кубика?
в)* Тот же вопрос для игрального додекаэдра.

Задача 7*. По пустыне шёл караван из девяти верблюдов. В какой-то момент каждому из них надоело видеть перед собой одного и того же верблюда. Сколькими способами можно переставить верблюдов так, чтобы теперь перед каждым верблюдом шёл не тот, что раньше?

Определение 1. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ — произвольное конечное множество, которое мы будем называть *алфавитом*. Словом в алфавите A называется конечная последовательность $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$, где $\alpha_i \in A$; число m называется *длиной слова*. Слово длины 0 (пустое слово) также допускается.

Задача 8°. Пусть в алфавите n букв.

- а) Сколько существует слов длины k ?
 б) Сколько существует слов длины k таких, что никакие две соседние их буквы не совпадают?
 в) Сколько существует слов длины k , все буквы которых различны?

Замечание 1. Число из задачи 8в называется *числом размещений из n элементов по k* и обозначается A_n^k .

[illegible]

б) Тот же вопрос для пятизначных чисел и цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

б) Сколько в n -элементном множестве k -элементных подмножеств?

Замечание 2. Число из задачи 2б называется *числом сочетаний из n элементов по k* и обозначается C_n^k или $\binom{n}{k}$.

б) Пусть в выпуклом n -угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Сколько всего точек пересечения диагоналей в таком многоугольнике?

б)* А сколькими способами из этих 15 пуговиц можно составить бусы?

- а) на первом месте стоит не восьмёрка;
- б) чётные и нечётные цифры чередуются;
- в) номер делится на 3;
- г) цифры стоят в порядке возрастания;
- д) цифры не убывают?

а) в натуральных числах; б) в неотрицательных целых числах?

а) в натуральных числах; **б)** в неотрицательных целых числах; **в)** при $x_i \in \{1, 2\}$?

б) А если рассаживать их по кругу?

а) Докажите, что число счастливых билетов равно числу билетов с суммой цифр, равной 27.

в) Сколько всего существует счастливых билетов?

9 а	9 б	10 а	10 б	11 а	11 б	12 а	12 б	13 а	13 б	13 в	13 г	13 д	14 а	14 б	15 а	15 б	15 в	16 а	16 б	17 а	17 б	17 в

$$\textbf{6)} \quad (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$


1	2 _a	2 _{b̄}	3 _a	3 _{b̄}	4 _a	4 _{b̄}	4 _B	5 _a	5 _{b̄}	5 _B	6	7 _a	7 _{b̄}	7 _B	8 _a	8 _{b̄}	8 _B	9 _a	9 _{b̄}	9 _B	10 _a	10 _{b̄}	10 _B	10 _Γ	11 _a	11 _{b̄}	11 _B	12 _a	12 _{b̄}

Задача 13. а) Выровняем треугольник Паскаля по левому краю (рис. 4). Чему равна сумма чисел на n -ой восходящей диагонали: $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + C_{n-3}^3 + \dots$?

б)* А чему равна знакопеременная сумма $C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 - C_{n-3}^3 + \dots$?

Задача 14. а) Сколькими способами можно выбрать некоторые из чисел $1, 2, 3, \dots, n$ так, чтобы среди них не было подряд идущих чисел (пустой набор учитывается)?

б) В скольких из этих наборов 1 и n не встречаются одновременно?

Задача 15°. а) Докажите, что $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + C_{n-2}^k + \dots + C_k^k$ при $k \leq n$.

б) Выведите из пункта а) формулы для $1 + 2 + \dots + n$ и $T_1 + T_2 + \dots + T_n$.

Задача 16*. (*Гармонический треугольник Лейбница*) Расположим на правой и левой сторонах треугольника последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, а в остальные ячейки поместим числа так, чтобы любое число являлось суммой двух стоящих под ним чисел: $L_n^0 = L_n^n = \frac{1}{n+1}$, $L_n^k = L_{n+1}^k + L_{n+1}^{k+1}$ (рис. 5). Найдите формулу, связывающую коэффициенты полученного треугольника с коэффициентами треугольника Паскаля.

Задача 17. а) Сколько различных комбинаций букв можно получить, переставляя буквы слова ЕНИСЕЙ? б) А переставляя буквы слова МИССИСИПИ?

в) Вычислите коэффициент при $x^2 \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v$ в разложении $(x + y + z + u + v)^6$ на подобные слагаемые.

г) Найдите коэффициенты $M_{(l_1, \dots, l_k)}$ в разложении $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{l_1 + l_2 + \dots + l_k = n} M_{(l_1, \dots, l_k)} x_1^{l_1} \cdot x_2^{l_2} \cdot \dots \cdot x_k^{l_k}$.

д)* Придумайте и докажите формулы для коэффициентов $M_{(l_1, \dots, l_k)}$, обобщающие формулы задач 4а и 11а.

Замечание 1. Коэффициенты из задачи 17г называются *мультиномиальными* и обозначаются $\binom{n}{l_1, \dots, l_k}$.

Задача 18*. Заметим, что формула для числа сочетаний, записанная в виде $C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$, имеет смысл для любых n , а не только для натуральных. Поэтому мы будем рассматривать C_x^k как многочлен k -ой степени от x . Кроме того, будем считать по определению, что $C_x^0 = 1$.

а) Покажите, что утверждение задачи 4б верно для любого n .

б) (*Форма Ньютона*) Докажите, что любой многочлен $f(x)$ степени не выше n можно разложить в сумму $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot C_x^k$.

в) Как по $f(x)$ найти коэффициенты a_k разложения из задачи 18б? Выведите явную формулу.

г) Как из задач 15а и 18бв вывести формулу для $1^k + 2^k + \dots + n^k$?

Примечание. Поскольку комбинаторика призвана отвечать на вопрос «Сколько?» (чего бы то ни было и где бы то ни было), можно смело утверждать, что комбинаторные задачи интересовали человечество всегда. Идеи и методы подсчёта известны с незапамятных времён, упоминания о них имеются как у древних индийцев и китайцев, так и у древних греков и арабов. А отдельные сведения о биномиальных коэффициентах, биноме Ньютона и треугольнике Паскаля встречаются уже в трудах математиков XI–XIV веков.

Современный вид комбинаторика начала обретать в середине XVII века благодаря трудам Блеза Паскаля (1623–1662 гг.) и Готфрида Вильгельма Лейбница (1646–1716 гг.). Сам термин «Комбинаторика» был введён в математический обиход Лейбницем в книге «Рассуждения о комбинаторном искусстве» (1666 г.). Бином Ньютона поименован в честь Исаака Ньютона (1643–1727 гг.), который обобщил формулу из задачи 6 на рациональные показатели степени, рассмотрев бесконечные ряды. А «треугольник Паскаля» обязан своим названием Паскалю, подробно исследовавшему его в «Трактате об арифметическом треугольнике» (1654 г.), хотя, скажем, в Китае он известен как «треугольник Яна Хуэя» (изображение из манускрипта 1303 года можно увидеть на рисунке), а в Иране — как «треугольник Хайяма».

Открытая гипотеза Дэвида Сингмастера (род. 1939 г.) утверждает, что существует такая константа K , что любое число $n > 1$ встречается в треугольнике Паскаля не больше, чем K раз. Например, число $3003 = C_{78}^2 = C_{15}^5 = C_{14}^6$ встречается 8 раз, и числа, для которых это значение больше, неизвестны.

13 а	13 б	14 а	14 б	15 а	15 б	16	17 а	17 б	17 в	17 г	17 д	18 а	18 б	18 в	18 г

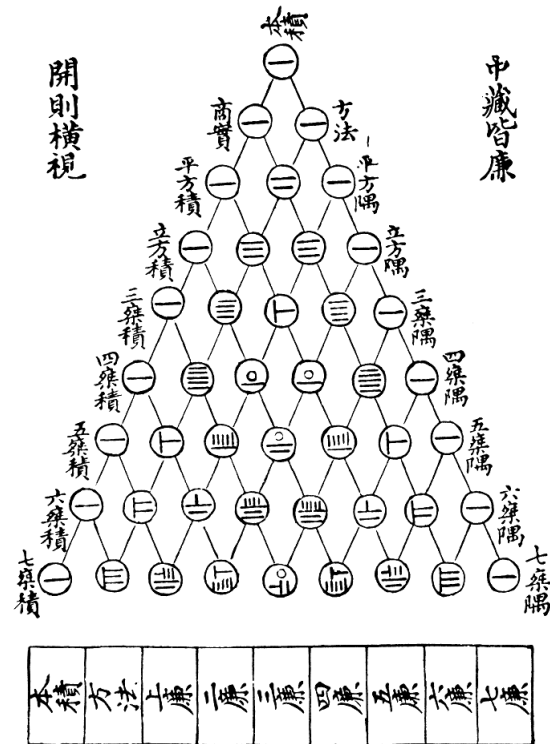
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Рис. 4.

1
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{5}$
$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{60}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{6}$

Рис. 5.

圖方算七法古



[illegible]

Задача 11. Являются ли равномошными:

- а) любые два отрезка на плоскости;
- б) любые две окружности на плоскости;
- в) интервал и полуокружность без концов;
- г) интервал и прямая;
- д) квадрат и круг?

Задача 12. Докажите, что у всякого бесконечного множества есть счётное подмножество.

Задача 13°. Пусть A не более чем счётно, а B бесконечно. Докажите, что $|A \cup B| = |B|$.

Задача 14. Докажите, что множество точек произвольного отрезка равномошно множеству точек произвольного интервала.

Задача 15°. Докажите, что множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ и множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц а) равномошны; б) несчётны.

Задача 16*. Докажите, что множества из задачи 15 равномошны

- а) множеству $P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N})$, где $P(\mathbb{N})$ — это множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$;
- б) множеству взаимно однозначных отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$;
- в) множеству всех бесконечных последовательностей натуральных чисел.

Задача 17*. Является ли счётным любое бесконечное множество непересекающихся

- а) интервалов на прямой;
 - б) кругов на плоскости;
 - в) восьмёрок на плоскости (восьмёрка — это две касающиеся внешним образом окружности);
 - г) букв «Т» на плоскости (буква «Т» — это два перпендикулярных друг другу отрезка, конец одного из которых является серединой другого)?
- (Все объекты в данной задаче могут иметь любые размеры)

11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	12	13	14	15 а	15 б	16 а	16 б	16 в	17 а	17 б	17 в	17 г

Примечание. Говорят, что множество *континуально* (или что оно *имеет мощность континуума*), если оно равномошно множествам из задачи 15. Наряду со счётными множествами, множества мощности континуум встречаются нам наиболее часто среди всех бесконечных множеств. Так, континуальными множествами являются отрезок, прямая, плоскость (и всё это в своё время мы докажем). Однако не стоит думать, что если множество бесконечно, то оно либо счётно, либо континуально. Каждому из вас, немного подумав, под силу построить соответствующий пример.

Одной из центральных проблем теории множеств первой половины XX-го века стала выдвинутая в 1877 году Георгом Кантором (1845-1918 гг.) так называемая *континуум-гипотеза*. Её формулировка такова: *любое бесконечное подмножество континуального множества либо счётно, либо континуально*. Значимость континуум-гипотезы была столь велика, что она стала первой среди проблем века, которые Давид Гильберт (1862-1943 гг.) представил в своём знаменитом докладе на II Международном Конгрессе математиков в Париже в 1900 году.

Тем удивительней её дальнейшая судьба. В 1940 году Курт Фридрих Гёдель (1906-1978 гг.) убедился, что отрицание континуум-гипотезы недоказуемо. А в 1963 году Пол Джозеф Кёэн (1934-2007 гг.) показал, что континуум-гипотеза также недоказуема. То есть получается, что континуум-гипотезу нельзя ни доказать, ни опровергнуть!

Таким образом, каждый может сам для себя решить, считает ли он континуум-гипотезу справедливой или нет.

[illegible]

Обозначение: $f : g$ (f делится на g) или $g \mid f$ (g делит f).

Задача 2.3. Пусть $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$. Докажите, что

а) если $f \vdash h$ и $g \vdash h$, то $(f \pm g) \vdash h$;
б) если $f \vdash h$ и g — произвольный многочлен, то $fg \vdash h$;
в) если $f \vdash g$ и $g \vdash h$, то $f \vdash h$.

в) если fg делится на h^2 , то f делится на h или g делится на h ?

Если $r \neq 0$, то многочлен q называется *неполным частным*, r — *остатком* от деления f на g .

д) $x^4 + 3x^2 + 5$ на $x - c$, где $c \in \mathbb{R}$.

г) если $f_1 \equiv g_1 \pmod{h \cdot s}$, то $f_1 \equiv g_1 \pmod{h}$.

а) $f(x) \equiv x^2 \pmod{x^3}$ и $f(x) \equiv 1 \pmod{(x-1)}$; **б)** $f(x) \equiv x \pmod{(x^2-x)}$ и $f(x) \equiv 0 \pmod{x^2}$?

б) многочлен f делится на двучлен $(x - c)$ тогда и только тогда, когда $f(c) = 0$.

в)* сумму коэффициентов при чётных степенях получившегося выражения.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Определение 3. Многочлен $p \in \mathbb{R}[x]$ называется *неприводимым*, если из равенства $p = fg$ следует, что либо $\deg(f) = 0$, либо $\deg(g) = 0$.

Задача 15°. а) Докажите, что если f и g — произвольные многочлены, а p — такой неприводимый многочлен, что $fg \vdots p$, то либо $f \vdots p$, либо $g \vdots p$.

б) Сформулируйте и докажите основную теорему арифметики для многочленов.

Задача 16°. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если рациональное число $x = p/q$, где $(p, q) = 1$, является корнем многочлена f , то $a_0 \vdots q$, а $a_n \vdots p$.

Задача 17. Найдите каноническое разложение: а) $x^4 - 3x^2 + 2x$; б) $x^6 - 1$;
в)* $x^{10} + 2x^9 + 3x^8 + 4x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Определение 4. Пусть m — натуральное число, большее единицы. Обозначим через $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ множество остатков при делении на m , а через $\bar{n}$ — остаток от деления на m целого числа n . Определим в $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ операции суммы и произведения согласно следующим формулам: $a + b = \overline{a + b}$ и $a \cdot b = \overline{a \cdot b}$.

Задача 18. а) Докажите, что $\bar{a} = \bar{b}$ тогда и только тогда, когда $a \equiv b \pmod{m}$.

б) Составьте таблицы сложения и умножения в $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Задача 19°. Пусть p — простое число, $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, причём $a \neq 0$. Докажите, что:

а) существует единственное число $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ такое, что $ax \equiv 1 \pmod{p}$;

б) для любого $b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ сравнение $ax \equiv b \pmod{p}$ имеет ровно одно решение в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;

в) числа $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ имеют попарно различные остатки при делении на p ;

г) остаток от деления числа $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p-1)a$ на p не зависит от a ;

д) (*Малая теорема Ферма*) $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

е)* Сколько решений в $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ имеет сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$ для произвольного натурального $m > 1$?

Замечание 4. Решение сравнения $ax \equiv 1 \pmod{p}$ из задачи 19а называется *обратным* элементом к a . Обозначение: $x = a^{-1}$.

Задача 20. Пусть p — простое число, $a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

а) Докажите, что $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$. б) Выведите из пункта а), что $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Задача 21*. Пусть $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел не превосходящих n и взаимно простых с ним.

а) Найдите $\varphi(p^k)$, если p — простое число, $k \in \mathbb{N}$. б) Верно ли, что если $(a, b) = 1$, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$?

в) Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Выведите формулу для $\varphi(n)$.

г) (*Теорема Эйлера*) Докажите, что если $(a, n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Замечание 5. Функция $\varphi(n)$ называется *функцией Эйлера*.

Задача 22*. Пусть p — простое число, причём $p > 2$.

а) Докажите, что $x \equiv x^{-1} \pmod{p}$ тогда и только тогда, когда $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

б) (*Теорема Вильсона*) Докажите, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

в) Чему равно $(n-1)!$ в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, если n — составное число?

г) Вычислите $(p-2)!$ в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. д) Вычислите $((\frac{p-1}{2})!)^2$ в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Задача 23*. а) Пусть p — простое число вида $(4k+1)$, где $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что в этом случае сравнение $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ имеет ровно 2 решения.

б) Пусть p — простое число вида $(4k-1)$. Докажите, что сравнение $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ не имеет решений.

в) Какие простые числа могут входить в каноническое разложение числа вида $(n^2 + 1)$, где $n \in \mathbb{N}$?

г) Докажите, что простых чисел вида $(4k+1)$ бесконечно много.

15	15	16	17	17	17	18	18	19	19	19	19	19	19	20	20	21	21	21	21	22	22	22	22	22	23	23	23	23
а	б		а	б	в	а	б	а	б	в	г	д	е	а	б	а	б	в	г	а	б	в	г	д	а	б	в	г

Примечание. Основам элементарной теории чисел посвящены VII, VIII и IX книги знаменитых «Начал» Евклида (ок. 325 г. - ок. 265 г. до н.э.). В них излагаются теория делимости и пропорций, доказывается бесконечность множества простых чисел, приводится алгоритм Евклида, строятся чётные совершенные числа. В своих трудах Евклид опирается на сочинения пифагорейцев (V век до н.э.), и по-видимому, это самая древняя по содержанию часть «Начал». Дальнейшие достижения европейских математиков в области теории чисел относятся к позднему Средневековью и Новому Времени, и связаны с именами таких учёных, как Марён Мерсённ (1588-1648 гг.), Пьер Ферма́ (1601-1665гг.) и Леонард Эйлер (1707-1783 гг.). На этом, конечно, развитие науки не остановилось, но из этой краткой исторической справки вы больше ничего не узнаете.

[illegible]

Задача 16. Пусть $a, b > 0$, а $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что тогда $\frac{a^{n+1}}{b^n} \geq (n+1)a - nb$.

Задача 17. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено: а)° $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;

б)° $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$; в)° $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 4$; г)* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$.

Задача 18*. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено: $\left(\frac{n}{4}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Задача 19*. (Неравенство о средних) Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Докажите, что

а) $\sqrt[n]{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$; б) $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$;

в) $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}$.

Задача 20*. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$. При каких x и y оно достигается?

Задача 21*. Найдётся ли такое натуральное число n , что первыми девятью знаками после запятой в десятичной записи числа $\{\sqrt{n}\}$ будут цифры 987654321?

16	17 а	17 б	17 в	17 г	18	19 а	19 б	19 в	20	21

Примечание. Пусть имеется набор положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ соответственно. Тогда для любого ненулевого числа d можно определить *среднее степени d* согласно следующей формуле:

$$A_d(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1^d + a_2^d + \dots + a_n^d}{n} \right)^{\frac{1}{d}}.$$

Имеет смысл выделить важные частные случаи:

- $A_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ — *среднее арифметическое*;
- $A_{-1}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}$ — *среднее гармоническое*;
- $A_2(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$ — *среднее квадратическое*.

Кроме того, можно по непрерывности определить ещё три полезные величины (что именно означают эти слова, и как это делается строго, мы узнаем с вами несколько позже):

- $A_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ — *среднее геометрическое*;
- $A_{+\infty}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — *максимум*;
- $A_{-\infty}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \min(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — *минимум*.

Методами дифференциального исчисления можно доказать, что для любых чисел $d_1 > d_2$ выполнено *неравенство о средних*: $A_{d_1}(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq A_{d_2}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. В частности, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\max(a_1, \dots, a_n) \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \geq \frac{n}{a_1^{-1} + \dots + a_n^{-1}} \geq \min(a_1, \dots, a_n).$$

[illegible]

Задача 5. Пусть F — поле. Докажите, что

- а) для любого a из F выполнено равенство $a \cdot 0 = 0$;
 б) если для элементов a и b из F справедливо равенство $a \cdot b = 0$, то либо $a = 0$, либо $b = 0$.
 в)* Останется ли верным утверждение пункта б), если отказаться от аксиомы М4?

Задача 6. Пусть F — поле, $a \in F$. Докажите, что

- а) $a \cdot (-1) = -a$; б) $(-a) \cdot (-a) = a \cdot a$; в) если $a \neq 0$, то $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.

Задача 7. Пусть F — поле, $a, b, c, d \in F$, причём $b, d \neq 0$. Докажите, что

- а) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$; б) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$.

Задача 8. Существует ли поле, состоящее из

- а) одного элемента; б) двух элементов; в) трёх элементов; г)* четырёх элементов?

Задача 9*. Пусть p — простое число. Постройте поле, состоящее из p элементов.

Задача 10*. Существует ли поле, состоящее из шести элементов?

5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	6 в	7 а	7 б	8 а	8 б	8 в	8 г	9	10

Примечание. Этот листочек открывает собой дорогу, которая через некоторое время приведёт нас к ответу на вопрос, чем же на самом деле является действительное число. Путь может показаться вам длинным и извилистым, однако продравшись через тернии, в конце вы обнаружите, что вознаграждены за ваши труды по заслугам (хотя, возможно, и не сразу поймёте это). Математики искали этот путь столетиями, но нашли только в конце XIX-го века — по человеческим меркам совсем недавно. Случилось это благодаря таким учёным, как Карл Вейерштрасс (1815-1897 гг.), Рихард Дедекин (1831-1916 гг.), Георг Кантор (1845-1918 гг.), Эдуард Гёйне (1821-1881 гг.) и др.

Концепция теории поля впервые была использована в работах норвежца Нильса Хенрика Абеля (1802-1829 гг.) и француза Эвариста Галуа (1811-1832 гг.), посвящённых невозможности разрешить в радикалах полиномиальные уравнения пятой степени и выше. Термин «поле» в 1871 году ввёл Дедекин, изучая действительные и комплексные числа, хотя сказать так было бы не совсем точно. На самом деле, немецкое слово «Körper», зарезервированное для этого понятия, дословно означает «тело», «корпус» (что подразумевает структурно замкнутую сущность). Полем («field», если по-английски) его назвал в 1893 году американский учёный Элиаким Гастингс Мур (1862-1932 гг.). И в том же году впервые было сформулировано аксиоматическое определение поля в современном виде — это сделал немецкий математик Генрих Мартин Вёбер (1842-1913 гг.)

(O4) Если $a, b, c \in E$, $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$ (транзитивность).

(МО) Если $a, b, c \in F$, $0 \leq c$ и $a \leq b$, то $a \cdot c \leq b \cdot c$ (связь порядка и умножения).

Напоминание. Здесь $F[x]$ обозначает множество многочленов с коэффициентами из поля F .

[illegible]

Определение 3. Подмножество A поля F называется *индуктивным*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

(I1) $1 \in A$.

(I2) Если $x \in A$, то $x + 1 \in A$.

Определение 4. Пересечение всех индуктивных подмножеств упорядоченного поля F называется *множеством натуральных чисел* (обозначение: $\mathbb{N}$).

Положим по определению: $2 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 1$, $3 \stackrel{\text{def}}{=} 2 + 1$, $4 \stackrel{\text{def}}{=} 3 + 1$, $5 \stackrel{\text{def}}{=} 4 + 1$, $6 \stackrel{\text{def}}{=} 5 + 1, \dots$

Задача 10*. Докажите, что:

а) множество натуральных чисел непусто; б) все натуральные числа положительны.

Задача 11*. Сформулируйте и докажите принцип математической индукции.

Задача 12*. Докажите следующие утверждения. а) Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда $a + b \in \mathbb{N}$ и $ab \in \mathbb{N}$.

б) Пусть $a \in \mathbb{N}$ и $a \neq 1$. Тогда $a - 1 \in \mathbb{N}$. в) Пусть $a, b \in \mathbb{N}$ и $a > b$. Тогда $a - b \in \mathbb{N}$.

Задача 13*. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ между $n - 1$ и n нет натуральных чисел.

Задача 14*. (*Принцип наименьшего элемента*) Докажите, что любое непустое подмножество множества $\mathbb{N}$ имеет наименьший элемент.

Определение 5. Множество $\mathbb{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ называется *множеством целых чисел*.

Определение 6. Множество $\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ называется *множеством рациональных чисел*.

Задача 15*. Можно ли на поле $\mathbb{Q}$ ввести порядок двумя различными способами?

Задача 16*. Докажите, что для каждого $C \in \mathbb{Q}$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $n \geq C$.

10 а	10 б	11	12 а	12 б	12 в	13	14	15	16

Примечание. Однажды известный немецкий математик Леопольд Крёнекер (1823-1891 гг.) произнёс фразу, ставшую впоследствии знаменитой: «Бог создал натуральные числа, всё остальное — дело рук человеческих». И правда, каждый из нас знает, что целые числа базируются на числах натуральных, а рациональные числа естественным образом получаются как отношение целых и натуральных. Действительные числа образовать сложнее, но вскоре нам удастся и это, а там уже не за горами будут комплексные числа.

Что такое натуральные числа — вопрос совсем не такой простой; отчасти он созвучен вопросу о том, что такое точка, прямая и плоскость в геометрии. Как и любое базовое понятие, натуральные числа встречаются практически везде; в частности, мы наблюдаем их во всех упорядоченных полях. Неслучайно программа обоснования математики, разработанная в начале XX века Давидом Гильбертом (1862-1943 гг.), предполагала, прежде всего, доказательство непротиворечивости арифметики. Однако, как было показано в 1931 году Куртом Гёделем (1906-1978 гг.), доказать её непротиворечивость невозможно.

При неформальном определении натуральных чисел существует две традиции. Первая, принятая, в частности, в России, возникает из подсчёта (нумерации) предметов (первый, второй, третий, ...). Вторая, популярная, например, во Франции, идёт от количества предметов (нет предметов, один предмет, два предмета, ...). К единому мнению, считать ли ноль натуральным числом, математики всего мира прийти не смогли.

Замечание. Вообще говоря, здесь мы определили последовательности действительных чисел. Можно рассматривать также и последовательности элементов произвольного множества M , определяя их как отображения $x: \mathbb{N} \rightarrow M$.

Формально: $\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : x_n < C$.

в) Сформулируйте без отрицания (в т.ч. на языке кванторов) следующее утверждение: «Последовательность не является ограниченной (сверху, снизу)».

г) нет ни наименьшего, ни наибольшего члена.

Формально: $\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}$.

б) Дайте определения убывающей, невозрастающей, неубывающей последовательностей.

Задача 7. Докажите, что любая подпоследовательность ограниченной (монотонной) последовательности является ограниченной (монотонной).

[illegible]

Формально: $\exists C \in F \ \forall x \in M : x \leq C \ (x \geq C)$.

Определение 3. Модулем (абсолютной величиной) элемента a упорядоченного поля F называется элемент $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

Условие 2) иногда бывает удобнее записать в следующей форме: 2') $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > C - \varepsilon$.
Обозначение: $C = \sup M$ (читается: *супрёмум*).

Задача 9°. Докажите, что всякое непустое ограниченное снизу подмножество поля $\mathbb{R}$ имеет в $\mathbb{R}$ точную нижнюю грань.

[illegible]

Задача 10. Докажите, что множество иррациональных чисел непусто.

Задача 11. Пусть множества $A, B \subset \mathbb{R}$ ограничены и непусты. Докажите, что:

- а) $\sup\{a + b \mid a \in A, b \in B\} = \sup A + \sup B$; б) $\inf\{a + b \mid a \in A, b \in B\} = \inf A + \inf B$;
 в) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$; г) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$;
 д) $\max(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$, если $A \cap B \neq \emptyset$.

Задача 12°. (Аксиома Архимеда). Докажите, что для любого числа $a \in \mathbb{R}$ найдётся такое число $n \in \mathbb{N}$, что $n > a$.

Задача 13. Докажите, что между любыми двумя различными числами из $\mathbb{R}$ найдётся:

- а) бесконечно много рациональных чисел; б) бесконечно много иррациональных чисел.

Задача 14°. (Теорема о разделяющем числе). Пусть A и B — такие два непустых подмножества поля $\mathbb{R}$, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ справедливо неравенство $a \leq b$. Докажите, что:

- а) существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что при всех $a \in A$ и $b \in B$ выполнено $a \leq c \leq b$;
 б) разделяющее число c , о котором идёт речь в пункте а), единственно тогда и только тогда, когда для любого положительного ε найдутся такие $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$, что $b_0 - a_0 < \varepsilon$.

Задача 15°. (Принцип вложенных отрезков). Пусть дана последовательность вложенных отрезков

- $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset [a_4, b_4] \supset \dots$ Докажите, что: а) пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ не пусто;
 б) это пересечение состоит из одной точки тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Задача 16°. Докажите, что в упорядоченном поле F аксиома о точной верхней грани эквивалентна

- а) теореме о разделяющем числе; б) аксиоме Архимеда и принципу вложенных отрезков.

Задача 17°. (Компактность отрезка). Докажите, что если отрезок покрыт некоторым множеством интервалов, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 18*. Докажите, что поле действительных чисел $\mathbb{R}$ а) не является счётным;

- б) равномощно множеству всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц.

10	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	12	13 а	13 б	14 а	14 б	15 а	15 б	16 а	16 б	17	18 а	18 б

Примечание. Утверждение задачи 16 означает, что для построения поля действительных чисел можно взять несколько другой набор аксиом, нежели в определении 7, — получится тот же самый объект. Именно, полем действительных чисел можно назвать упорядоченное поле, в котором аксиоматически выполнена теорема о разделяющем числе. Или упорядоченное поле, в котором справедливы аксиома Архимеда и принцип вложенных отрезков.

Отметим следующий важный момент. Аксиома для нас — это вовсе не то, что всегда верно и принимается без доказательства (вспомните задачу 12). Аксиома — это некоторое утверждение, которому может удовлетворять или не удовлетворять данная модель. Так, поле действительных чисел удовлетворяет принципу вложенных отрезков, а поле рациональных чисел — нет. С этой точки зрения утверждение задачи 16 заключается в том, что аксиоме о точной верхней грани и теореме о разделяющем числе (как аксиоме) удовлетворяют одни и те же модели.

Строгое построение теории действительных чисел относится ко второй половине XIX-го века. Первопроходцем в этой области был Юлиус Дедекінд (1831–1916 гг.), его теория базировалась на теореме о разделяющем числе. Другие подходы были разработаны чуть позже Карлом Вейерштрассом (1815–1897 гг.) и Георгом Кантором (1845–1918 гг.) — в основе их построений лежат десятичные дроби и фундаментальные последовательности соответственно. Но более подробно об этом мы поговорим позднее.

Формально: $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N}, n > k: |x_n - a| < \varepsilon.$

[illegible]

Задача 13. (Число e) Пусть $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что:

- а)° последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится (её предел обозначают буквой e);
 б)° $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$; в)° $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$; г)* $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$.

Задача 14. Пусть $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, причём $a > 0$ и $x_1 > 0$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$.

Задача 15*. Докажите, что в упорядоченном поле F аксиома о точной верхней грани эквивалентна

- а) теореме Больцано-Вейерштрасса; б) критерию Коши и аксиоме Архимеда;
 в) теореме Вейерштрасса.

Задача 16*. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Найдите пределы: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{\pi n\}}{n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\pi n]}{n}$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$;

е) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}$; ж) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \right)$.

Задача 17*. а) Докажите, что если последовательность (x_n) сходится, то последовательность средних арифметических $y_n = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ также сходится, причём к тому же пределу.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для среднего геометрического.

Задача 18*. (Теоремы Штолца)

а) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ и (b_n) монотонно убывает. Докажите, что если последовательность $\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right)$ сходится, то и последовательность $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ сходится, причём к тому же пределу.

б) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, причём (b_n) монотонно возрастает. Докажите, что если последовательность $\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right)$ сходится, то и последовательность $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ сходится, причём к тому же пределу.

в) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, причём (b_n) монотонно возрастает. Докажите, что если выполнено условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right) = +\infty$, то справедливо также и равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = +\infty$.

13	13	13	13	14	15	15	15	16	16	16	16	16	16	16	16	17	17	18	18	18
а	б	в	г		а	б	в	а	б	в	г	д	е	ж		а	б	а	б	в

Примечание. Понятие предела последовательности в математическом анализе является ключевым. В определённом виде с ним работали ещё древние греки, хотя строгое определение было дано намного позже. Так, Евдокс Книдский (ок. 408 г. – ок. 355 г. до н.э.) разработал так называемый «метод исчерпывания» для вычисления площадей разных фигур, которым впоследствии успешно пользовались Евклид (ок. 325 г. – ок. 265 г. до н.э.) и Архимед (287–212 гг. до н.э.). В знаменитых апориях Зенона Элейского (ок. 490 г. – ок. 430 г. до н.э.) понятие предела также неявно фигурирует.

Позднее всё большее и большее количество задач (в основном, физических) подтолкнуло человечество к исследованию бесконечных величин. Так появился новый раздел математики — математический анализ, и вместе с ним понятие предела. У его истоков стояли двое великих учёных, независимо друг от друга разработавшие теорию дифференциального и интегрального исчисления, в пучину которой мы с вами начинаем погружаться: Исаак Ньютон (1642–1727 гг.) и Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716 гг.). А определение предела в современном виде дали Бернард Больцано (1781–1848 гг.) и Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897 гг.).

[illegible]

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$.

в) Сформулируйте (в т.ч. на языке кванторов) следующее определение: предел функции f при x , стремящемся к x_0 , равен ∞ (соответственно, $+\infty$, $-\infty$). Обозначение: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Задача 9. Пусть функция f не обращается в ноль в некоторой окрестности точки x_0 . Докажите, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab; \quad \text{г) } \text{если } b \neq 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Задача 11°. (*Принцип двух милиционеров*) Пусть области определения функций f , g и h совпадают, и для любого x из некоторой окрестности точки x_0 выполнены неравенства $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$, то существует предел функции g в точке x_0 , причём $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x^4}{3x^2 + x^4}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x^4}{3x^2 + x^4}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

в) А если вместо этого известно, что $g(b) = c$?

Задача 15*. Пусть области определения функций f и g совпадают, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ и при этом $a > 0$ (возможно, $x_0 = \infty$). Докажите, что тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = a^b$.

Задача 17*. Существует ли функция, определённая на M и имеющая в каждой точке бесконечный предел, если а) $M = \mathbb{Q}$; б) $M = \mathbb{R}$?

$\frac{8}{a}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{B}$	9	$\frac{10}{a}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{10}{B}$	$\frac{10}{\Gamma}$	11	$\frac{12}{a}$	$\frac{12}{6}$	$\frac{12}{B}$	$\frac{12}{\Gamma}$	13	$\frac{14}{a}$	$\frac{14}{6}$	$\frac{14}{B}$	15	16	$\frac{17}{a}$	$\frac{17}{6}$

[illegible]

Задача 12°. Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении непрерывной функцией своих точных верхней и нижней граней). Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она достигает на нём своих точных нижней и верхней граней, то есть существуют такие точки c и C , принадлежащие $[a, b]$, что $f(c) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ и $f(C) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Задача 13. Приведите пример ограниченной функции, которая бы не достигала на области определения своих точных верхней и нижней граней, если известно, что эта функция

- а) определена на отрезке $[a, b]$; б) определена и непрерывна на $\mathbb{R}$.

Задача 14. Непостоянная функция f определена и непрерывна на множестве $I \subset \mathbb{R}$. Каким может быть множество значений $E(f)$, если I а) отрезок; б) интервал; в) прямая?

Задача 15. Пусть функции f и g непрерывны на множестве M . Докажите, что следующие функции также непрерывны на M : а) $|f|$; б) $\max(f, g)$; в) $\min(f, g)$.

Задача 16. Пусть $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — непрерывная функция. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет хотя бы один корень.

Задача 17. Выпуклый многоугольник F , точка A и прямая l лежат в одной плоскости. Докажите, что существует прямая l' , которая разбивает F на два равновеликих многоугольника, и при этом а) l' параллельна прямой l ; б) l' проходит через A .

Задача 18*. Докажите, что монотонная функция имеет не более, чем счётное число точек разрыва.

Задача 19*. На кухне имеется хорошая табуретка на четырёх ножках, но вот пол там неровный. Всегда ли можно поставить табуретку так, чтобы она не качалась?

Задача 20*. Пусть функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$. Докажите, что если уравнение $f(x) = x$ не имеет корней, то и уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет корней.

Задача 21*. (Теоремы о блинах) а) Пусть F_1 и F_2 — два выпуклых многоугольника. Докажите, что найдётся прямая, делящая каждый из них на две равновеликие части.

б) Пусть F — выпуклый многоугольник. Докажите, что существует две взаимно перпендикулярные прямые, разбивающие F на четыре равновеликих многоугольника.

Задача 22*. Известно, что непостоянная функция f непрерывна на $\mathbb{R}$. Докажите, что найдётся такое иррациональное число r , что значение $f(r)$ также иррационально.

Задача 23*. а) Земной шар стянули верёвкой по экватору. Затем длину верёвки увеличили на 1 метр, а саму верёвку «распределили» так, чтобы зазор между верёвкой и поверхностью Земли был одинаковым по всей длине верёвки. Может ли в этот зазор пролезть мышь?

б) А если эту же удлинившуюся верёвку в одной точке натянуть вверх, пройдёт ли под ней слон?

Задача 24*. а) Существует ли определённая на $\mathbb{R}$ функция, которая всюду разрывна, но имеет предел в каждой точке?

б) Существует ли определённая на $\mathbb{R}$ функция, которая непрерывна в каждой рациональной точке и разрывна в каждой иррациональной точке?

12	13	13	14	14	14	15	15	15	16	17	17	18	19	20	21	21	22	23	23	24	24
	а	б	а	б	в	а	б	в		а	б				а	б		а	б	а	б

Примечание. Понятие непрерывности в точке было впервые рассмотрено в 1817 году Бернардом Больцано (1781–1848 гг.). Однако работы Больцано долгое время оставались неизвестными, поэтому определение 3 названо в честь Огюстёна Луи Коши (1789–1857 гг.), который изложил свою теорию в 1821 году. Стоит отметить, что Коши дал лишь словесное описание; современное определение в терминах $\varepsilon - \delta$ было дано Карлом Тёодором Вильгельмом Вейерштрассом (1815–1897 гг.), он же ввёл в обращение обозначение $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Что же касается определения 2, то оно названо в честь немецкого математика Гёнриха Эдуарда Гейне (1821–1881 гг.).

[illegible]

Задача 12°. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 , строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 , и $f'(x_0) \neq 0$. Докажите, что в этом случае обратная к f функция g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причём $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Задача 13°. Найдите производные функций: а) $\arcsin x$; б) $\arccos x$; в) $\arctg x$; г) $\operatorname{arcctg} x$.

Определение 3. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 . Прямая $l(x) = kx + b$ называется (наклонной) касательной к графику функции в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{l(x) - f(x)}{x - x_0} = 0$.

Задача 14°. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 . Докажите, что касательная к графику функции f в точке x_0 существует и единственна, а её уравнение имеет вид: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Задача 15. Пусть график функции f представляет собой дугу окружности. Совпадает ли определение 3 с определением касательной, известным нам из геометрии?

Задача 16. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{x^7 - 10x}{x + 5}$ в точке с абсциссой 1.

Задача 17. Найдите уравнения касательных к параболе $y = x^2$, проходящих через точку
а) $(0, 0)$; б) $(2, 3)$; в) $(2, 1)$; г) $(1, 2)$.

Задача 18. Найдите уравнения общих касательных к параболом $y = 2x^2 - x + 5$ и $y = -x^2 + 7x - 1$.

Задача 19. Для каждой точки плоскости выясните, сколько касательных к графику функции f проходит через эту точку, если а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = x^n$; в)* $f(x) = x^7 - x$.

Задача 20*. Приведите пример функции, дифференцируемой ровно в одной точке.

Задача 21*. Докажите, что если периодическая функция имеет точку непрерывности, то либо эта функция постоянна, либо имеет наименьший положительный период.

Задача 22*. Пусть вершины треугольника ABC принадлежат графику параболы $y = x^2$. Докажите, что нормали в вершинах треугольника (то есть прямые, перпендикулярные касательным в этих вершинах) пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точка пересечений медиан треугольника ABC лежит на оси Oy .

Задача 23*. Найдите все непрерывные функции, которые при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию
а) $f(x + y) = f(x) + f(y)$; б) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

Задача 24*. Существует ли функция, непрерывная на $\mathbb{R}$, но не дифференцируемая ни в одной точке?

12	13	13	13	13	14	15	16	17	17	17	17	18	19	19	19	20	21	22	23	23	24
	а	б	в	г				а	б	в	г		а	б	в				а	б	

Примечание. Официальной датой рождения дифференциального исчисления можно считать май 1684 года. Именно тогда Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716 гг.) опубликовал статью «Новый метод максимумов и минимумов», в которой кратко излагал принципы своего нового метода поиска экстремумов. Параллельно аналогичный метод был разработан Исааком Ньютоном (1642-1727 гг.); более того, имеются сведения, что последний открыл дифференциальное и интегральное исчисления ещё в 1665-1666 годах. Однако Ньютон публиковать свои открытия не торопился и сделал это только в 1704 году. Разгоревшийся после этого спор о приоритете не утихал до самой смерти Лейбница и, охарактеризованный как «наиболее постыдная склока во всей истории математики», очень повредил математическому сообществу в целом.

Отметим, что ни Ньютон, ни Лейбниц не давали определение производной через предел, оно появилось позже. Ньютон обозначал производную символом $\dot{x}$, Лейбниц писал df/dx . А обозначение f' было введено Жозефом Луи Лагранжем (1736-1813 гг.).

б)* Верно ли, что такая функция f монотонно возрастает в некоторой окрестности точки x_0 ?

$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{\bar{6}}$	2	3	4	5	6	$\frac{7}{a}$	$\frac{7}{\bar{6}}$	$\frac{8}{a}$	$\frac{8}{\bar{6}}$	$\frac{8}{B}$	$\frac{9}{a}$	$\frac{9}{\bar{6}}$

[illegible]

Задача 13. Докажите, что если $f, g \in \mathcal{R}[a; b]$ и для всех $x \in [a; b]$ выполнено $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Задача 14. Докажите, что если $f \in \mathcal{R}[a; b]$ и $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a; b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Задача 15. Докажите, что

а) если $f \in \mathcal{R}[a; b]$, то $|f| \in \mathcal{R}[a; b]$ и выполнено неравенство $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$;

б) если $f \in \mathcal{R}[a; b]$, то $f^2 \in \mathcal{R}[a; b]$; в) если $f, g \in \mathcal{R}[a; b]$, то $fg \in \mathcal{R}[a; b]$.

г)* Пусть $f, g: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ и $f, g \in \mathcal{R}[0; 1]$. Верно ли, что $f \circ g \in \mathcal{R}[0; 1]$?

Задача 16. (Аддитивность интеграла) Пусть $a < c < b$. Докажите, что $f \in \mathcal{R}[a; b]$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{R}[a; c]$ и $f \in \mathcal{R}[c; b]$, причём

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Задача 17. Вычислите: а) $\int_{-1}^2 x dx$; б) $\int_{-2}^1 |x| dx$; в) $\int_0^2 x^2 dx$; г) $\int_{-1}^1 (x^2 - 3x + 1) dx$.

Задача 18. Докажите, что монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Определение 4. Функция f называется *равномерно непрерывной* на множестве M , если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любых $x, y \in M$ таких, что $|x - y| < \delta$, выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Задача 19. Докажите, что любая равномерно непрерывная функция является непрерывной.

Задача 20. Верно ли, что функция $f(x) = 1/x$ является равномерно непрерывной на множестве

а) $M = (0; 1)$; б) $M = (1; +\infty)$?

Задача 21. Верно ли, что функция f является равномерно непрерывной на своей области определения, если а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \sqrt{x}$; в) $f(x) = \sin x$?

Задача 22. (Теорема Кантора) Докажите, что непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке. Будет ли верным аналогичное утверждение для интервала, луча или прямой?

Задача 23. Докажите, что непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём.

Задача 24. Докажите интегрируемость на отрезке

а) ограниченной функции с конечным числом точек разрыва;

б) функции Римана $f(x) = \begin{cases} 1/n, & x = m/n \in \mathbb{Q}, (m, n) = 1 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;

в)* ограниченной функции со счётным числом точек разрыва.

13	14	15 а	15 б	15 в	15 г	16	17 а	17 б	17 в	17 г	18	19	20 а	20 б	21 а	21 б	21 в	22	23	24 а	24 б	24 в

Примечание. Одним из первых прообразов вычисления интегралов является *метод исчерпывания*, разработанный Евдоксом Книдским (ок. 408-ок. 355 гг. до н.э.) и блестяще использовавшийся Архимедом (287-212 гг. до н.э.) для вычисления площадей и объёмов различных фигур. В средние века его сменил *метод неделимых*, наибольший вклад в обоснование которого внёс Бонавентура Франческо Кавальери (1598-1647 гг.). Основам *интегрального исчисления* мы обязаны Исааку Ньютону (1642-1727 гг.) и Готфриду Вильгельму Лейбницу (1646-1716 гг.). А современное обозначение определённого интеграла было впервые предложено в 1819-1820 гг. Жаном Батистом Жозефом Фурье (1768-1830 гг.).

Определение 1. Пусть функция f определена на открытом¹ множестве $M \subset \mathbb{R}$. Первообразной функции f на M называется такая функция F , что для всех точек $x \in M$ выполнено $F'(x) = f(x)$.

Определение 2. Совокупность всех первообразных функции f на открытом множестве M называется *неопределённым интегралом* функции f . Обозначение: $\int f(x) dx$.

Задача 1. а) Пусть F_1 и F_2 — две различные первообразные функции f , определённой на интервале $(a; b)$. Докажите, что $(F_1 - F_2)$ — константа.

б) Справедливо ли утверждение пункта а), если область определения функции f — произвольное открытое множество?

Замечание. Если функция F является первообразной функции f на интервале $(a; b)$, то пишут

$$\int f(x) dx = F + C,$$

подразумевая, что в правой части равенства стоит множество (семейство) всех функций вида $F + C$, где C — произвольная постоянная.

Задача 2. Найдите все первообразные функций f на области определения, если:

а) $f(x) = 1$; **б)** $f(x) = x$; **в)** $f(x) = |x|$; **г)** $f(x) = \frac{1}{x}$; **д)** $f(x) = \sqrt{x}$.

Задача 3. Найдите все первообразные функций f на области определения, если:

а) $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$; **б)** $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; **в)** $f(x) = e^x$; **г)** $f(x) = \sin x$;
д) $f(x) = \cos x$; **е)** $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; **ж)** $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$; **з)** $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{если } |x| \geq 1 \\ x, & \text{если } |x| < 1 \end{cases}$.

Задача 4. Приведите пример функции, не имеющей первообразных на области определения.

Задача 5. Пусть функция f непрерывна на некотором промежутке M . Зафиксируем точку a из этого промежутка и рассмотрим функцию $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Докажите, что

а) F непрерывна на M ; **б)** F дифференцируема во всех внутренних точках M .

Задача 6. Докажите, что функция, непрерывная на открытом множестве, имеет первообразную.

Задача 7. (*Формула Ньютона-Лейбница*) Пусть функции f и F непрерывны на $[a; b]$, причём F является первообразной f на $(a; b)$. Докажите, что

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Задача 8. Приведите пример функции, определённой на отрезке $[a; b]$, которая

а) интегрируема на отрезке $[a; b]$, но не имеет первообразной на интервале $(a; b)$;
б) не интегрируема на отрезке $[a; b]$, но имеет первообразную на интервале $(a; b)$;
в)* ограничена, не интегрируема на отрезке $[a; b]$, но имеет первообразную на интервале $(a; b)$.

Задача 9. Пусть функции f и g имеют первообразные на интервале $(a; b)$. Докажите, что тогда для любых чисел α и β функция $(\alpha f(x) + \beta g(x))$ имеет первообразную на $(a; b)$, причём²

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

1 а	1 б	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	3 е	3 ж	3 з	4	5 а	5 б	6	7	8 а	8 б	8 в	9

¹То есть являющемся объединением интервалов.

²Обратите внимание, что с обеих сторон равенства стоят множества.

[illegible]

Для рядов используют обозначение $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ или кратко $\sum a_n$. Соответственно, если ряд сходится к числу S , то пишут $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ или кратко $S = \sum a_n$.

Задача 12*. Докажите, что ряд $\sum_p \frac{1}{p}$, в котором суммирование идёт по простым числам, расходится.

1 а	1 <u>б</u>	2	3 а	3 <u>б</u>	3 в	3 г	3 д	4	5	6	7	8	9 а	9 <u>б</u>	9 в	9 г	10	11 а	11 <u>б</u>	11 в	12

Задача 13°. (*Критерий сходимости Коши*) Докажите, что ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $k \in \mathbb{N}$, что для всех целых $n > k$ и любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$.

Определение 2. Ряд $\sum a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum |a_n|$.

Задача 14. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Определение 3. Пусть ряд $\sum a_n$ сходится, а ряд $\sum |a_n|$ расходится. Тогда ряд $\sum a_n$ называется *условно сходящимся*.

Задача 15°. (*Признак Лейбница*) Пусть $a_n \geq 0$ при всех n , $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ и $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Докажите, что тогда *знакопередающийся ряд* $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ сходится.

Задача 16. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 1}{n^3 + 1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$; г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{12}}{\ln n}$.

Задача 17°. Докажите, что при всех x выполнено: а) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; б) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

Задача 18°. Докажите, что равенство $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ справедливо а) при $x < 0$; б) при всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 19. Пусть $\sum a_n$ сходится абсолютно. Докажите, что тогда ряд $\sum b_n$, полученный из ряда $\sum a_n$ произвольной перестановкой его членов, также сходится, причём $\sum a_n = \sum b_n$.

Задача 20. а) Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ условно сходится;

б) Переставьте члены этого ряда таким образом, чтобы полученный ряд расходился.

в)* Найдите сумму этого ряда.

Задача 21°. (*Теорема Римана*) Пусть ряд $\sum a_n$ сходится условно. Докажите, что

а) ряд, составленный из положительных (отрицательных) членов ряда $\sum a_n$, расходится к $+\infty$ ($-\infty$), т.е. предел последовательности частичных сумм ряда равен $+\infty$ (соответственно $-\infty$);

б) можно так переставить члены ряда $\sum a_n$, чтобы получился как расходящийся ряд, так и сходящийся с произвольной наперёд заданной суммой.

Задача 22*. Докажите что сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$ есть число иррациональное.

Задача 23*. Приведите пример последовательности (a_n) , для которой ряд $\sum a_n$ сходится, а ряд $\sum a_n^3$ расходится.

Задача 24*. Известно, что $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ при всех n и ряды $\sum a_n^2$ и $\sum b_n^2$ сходятся. Докажите, что ряд $\sum a_n b_n$ тоже сходится.

Задача 25*. Известно, что $a_n \geq 0$ при всех n и ряд $\sum a_n^2$ сходится. Можно ли утверждать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ также сходится?

Задача 26*. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log_2 n)^p}$ в зависимости от параметра p .

13	14	15	16 а	16 б	16 в	16 г	17 а	17 б	18 а	18 б	19	20 а	20 б	20 в	21 а	21 б	22	23	24	25	26

[illegible]

Задача 16. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек переместить вторую ножку в другой узел клетчатой бумаги. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

[illegible]

На протяжении всего этого листочка мы будем иметь дело с клетчатой бумагой (сеткой, образованной семействами равноудалённых друг от друга горизонтальных и вертикальных прямых). Площадь каждой клетки для определённости будем считать равной 1. Рассматривать мы будем исключительно те многоугольники, вершины которых являются узлами сетки.

Задача 1. (*Правило параллелограмма*) Докажите, что если три вершины некоторого параллелограмма являются узлами сетки, то четвёртая его вершина — также узел сетки.

Задача 2. Докажите, что прямая, проходящая через два узла сетки, проходит через бесконечное количество узлов сетки, причём все расстояния между соседними узлами, лежащими на этой прямой, равны между собой.

Пусть дан многоугольник с вершинами в узлах сетки, S — его площадь, i — число узлов сетки, лежащих внутри него, b — число узлов сетки, лежащих на его сторонах (в том числе вершины). *Формулой Пика* называют следующее соотношение: $S = i + b/2 - 1$.

Задача 3. Докажите формулу Пика а) для прямоугольника со сторонами, лежащими на линиях сетки; б) для прямоугольного треугольника с катетами, лежащими на линиях сетки.

Задача 4. Пусть имеется три многоугольника, один из которых составлен из двух других. Предположим, формула Пика выполняется для некоторых двух многоугольников из этих трёх. Докажите, что тогда она справедлива и для третьего многоугольника.

Задача 5. Докажите формулу Пика для произвольного треугольника.

Задача 6*. Докажите, что при $n > 3$ во всяком n -угольнике найдётся диагональ, принадлежащая ему целиком.

Замечание 1. Результатом задачи 6 далее можно пользоваться без доказательства.

Задача 7. Докажите, что всякий многоугольник можно разбить непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы каждая диагональ принадлежала ему целиком.

Задача 8. Докажите формулу Пика для произвольного многоугольника.

Задача 9. Докажите, что если сторонам треугольника (не считая его вершин) не принадлежит ни один узел сетки, а внутри треугольника содержится ровно один узел, то этот узел является точкой пересечения медиан треугольника.

Определение 1. Треугольник (параллелограмм) с вершинами в узлах сетки называется *примитивным*, если внутри него и на его сторонах нет других узлов сетки.

Задача 10. а) Какие значения может принимать площадь примитивного треугольника?

б) Может ли примитивный треугольник иметь сколь угодно большой периметр?

в) Те же вопросы для примитивного параллелограмма.

Задача 11. Пусть A и B — узлы сетки, причём на отрезке AB нет других узлов. Докажите, что найдётся узел сетки C такой, что треугольник ABC является примитивным, причём если A и B не являются соседними узлами, то C можно выбрать так, чтобы угол ACB был тупым или прямым.

Задача 12. Докажите, что параллелограмм $ABCD$ является примитивным тогда и только тогда, когда всевозможные параллелограммы, полученные из $ABCD$ параллельными переносами, переводящими узел A в разные узлы сетки, покрывают плоскость и не накладываются друг на друга.

Задача 13. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно какого-либо другого кузнечика. Могут ли кузнечики в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера, нежели исходный?

Задача 14. Существует ли правильный n -угольник с вершинами в узлах сетки, если а) $n = 3$; б) $n = 6$?

Задача 15*. Для каких n существует правильный n -угольник с вершинами в узлах сетки?

Задача 16*. На плоскости провели много параллельных прямых на одинаковом расстоянии друг от друга («тетрадь в линейку»). Для каких n можно нарисовать правильный n -угольник так, чтобы все его вершины лежали на проведенных прямых?

Задача 17*. а) На плоскости расположена фигура площади 1. Докажите, что найдутся такие две точки A и B , принадлежащие этой фигуре, что вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет целочисленные координаты.

б) (Теорема Минковского) На плоскости расположена центрально-симметричная относительно начала координат выпуклая фигура площади 4. Докажите, что помимо начала координат эта фигура содержит по крайней мере ещё один узел сетки.

Задача 18*. Каждый узел клетчатой бумаги накрыли кругом, центр которого находится в этом узле, а радиус в 1 000 000 раз меньше ширины клетки. Можно ли из начала координат выпустить луч, не пересекающий ни одного круга, кроме того, который покрывает начало координат?

1	2	3 a	3 6	4	5	6	7	8	9	10 a	10 6	10 B	11	12	13	14 a	14 6	15	16	17 a	17 6	18

Примечание. Отдельные идеи дискретной геометрии (и в частности, геометрии на клетчатой бумаге) встречаются уже в первой половине XIX-го века в трудах «короля математиков» — Кáрла Фрiдриха Гáусса (1777-1855 гг). Однако своим бурным развитием эти отрасли математики обязаны, прежде всего, немецкому математику Гёрману Минкóвскому (1864-1909 гг), а также австрийцу Геóргу Алекса́ндру Пику (1859-1938 гг). «Геометрия чисел» Минковского возникла как результат применения в теории чисел геометрических понятий и методов, когда учёный исследовал взаимоотношения между выпуклыми множествами и целочисленными решётками в многомерном пространстве. Наиболее значительным достижением в этой области можно назвать теорему Минковского о выпуклом теле (задача 17б): *в замкнутом выпуклом множестве, симметричном относительно начала координат n -мерного пространства и имеющем объем $S \geq 2^n$, найдётся целочисленная точка, отличная от начала координат.*

В математике часто встречаются множества, элементы которых можно складывать, вычитать, умножать, а иногда и делить. Такие множества называются *кольцами*. Вот некоторые примеры колец:

- $\mathbb{Z}$ — *целые числа*.
- $\mathbb{R}$ — *действительные числа*.
- $\mathbb{Z}[i]$ — *гауссовы числа*, т.е. множество выражений вида $a + bi$, где a и b — целые, а $i^2 = -1$.
- $\mathbb{R}[x]$ — *многочлены*, т.е. множество выражений вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 + a_0$, где $a_k \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}[[x]]$ — *ряды*, т.е. множество выражений вида $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$, где $a_k \in \mathbb{R}$ (более точно $\mathbb{R}[[x]]$ стоило бы назвать *формальными степенными рядами*).

Действия с целыми и действительными числами выполняются естественным образом. Операции в $\mathbb{Z}[i]$ можно выполнять, раскрывая скобки по обычным правилам. В кольцах $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{R}[[x]]$ сложение происходит покоэффициентно, а для умножения нужно раскрыть скобки и привести подобные члены.

Задача 1. Выполните действия с многочленами:

- а) $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})$;
- б) $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^9)^2$;
- в) $(x^4 - 9x^3 + 16x^2 + 36x - 80)/(x^2 - 4)$;
- г) $(x^{56} + x^{55} + x^{54} + \dots + x^2 + x + 1)/(x^{18} + x^{17} + \dots + x + 1)$.

Задача 2. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют целые коэффициенты, причем каждый из них имеет хотя бы один нечётный коэффициент. Докажите, что у произведения $P(x)Q(x)$ также есть хотя бы один нечётный коэффициент.

Задача 3. Выполните действия с гауссовыми числами:

- а) $(1 + i)(1 - i) + 1$; б) $(2 + 3i)(-3 - i) + (-2 + 2i)(5 - 3i)$; в) $\frac{20i}{1 - 2i}$; г) $\frac{16 + 11i}{3 - 2i}$;
- д) извлеките квадратный корень из числа $5 + 12i$.

Задача 4. Нарисуйте на координатной плоскости Oxy все числа вида $x + yi = (2 + i)(a + bi)$, где $-2 \leq a, b \leq 4$.

Задача 5. Выполните действия с рядами:

- а) $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$; б) $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots)$;
- в) $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^2$; г) $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^3$;
- д) $\frac{x}{1 + 2x^3}$; е) $(2 + 3x + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 + \dots) \left(1 - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^3}{8} + \frac{3x^4}{16} - \dots\right)$;
- ж)* $\frac{1 + x}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$; з)* $\frac{1}{1 - x - x^2}$.

Задача 6. Извлеките квадратный корень из рядов а) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$; б)* $1 + x$.

Задача 7. Как по коэффициентам ряда понять, является ли он полным квадратом?

Определение 1. Пусть M — одно из перечисленных в начале листка множеств. Говорят, что элемент a из M *делится* на элемент b из M ($b \neq 0$), если в M найдется такой элемент c , что $a = bc$.

- Задача 8.** Делится ли а) $x^{1000} + x^{999} + \dots + x + 1$ на $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
- б) $x^4 + x - 2$ на $x + 2$ (многочлены) в) 57 на $x - 2$ (многочлены); г) 57 на $x - 2$ (ряды);
- д) $12 + 3i$ на $2 + i$; е) $6 + 17i$ на $4i - 3$?

1	1	1	1	2	3	3	3	3	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	7	8	8	8	8	8	8
а	б	в	г		а	б	в	г	д		а	б	в	г	д	е	ж	з	а	б		а	б	в	г	д	е

Примечание. Зарождение теории колец произошло в конце XIX-го века в связи с изучением многочленов и целых алгебраических (в частности, гауссовых) чисел. Одними из первых использовали новую концепцию немецкие математики Рихард Дедекінд (1831-1916 гг) и Давид Гильберт (1862-1943 гг), последнему также принадлежит и сам термин «кольцо». Однако их исследования затрагивали, в основном, коммутативные кольца (то есть такие, в которых $ab = ba$ для любых элементов a и b). Некоммутативные кольца и современная аксиоматика оказались вовлечены в оборот в первой трети XX-го века благодаря работам Абрахама (Адольфа) Фрэнкеля (1891-1965 гг) и Эмми Нётер (1882-1935 гг). Дальнейшее развитие теория получила трудами Эмиля Артина (1898-1962 гг), Николая Бурбаки (за этим псевдонимом скрывалась целая группа математиков) и многих других учёных. И на сегодняшний день теория колец является одной из самых бурно развивающихся областей математики.

A diagram showing a permutation of the set {1, 2, 3, 4}. The top row contains the numbers 1, 2, 3, 4. The bottom row contains the numbers 1, 2, 3, 4. Arrows indicate the mapping: 1 maps to 2, 2 maps to 4, 3 maps to 1, and 4 maps to 3.

Задача 1. а) Сколько элементов содержится в множестве S_n ? б) Докажите, что мы можем записать любую перестановку как в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$, так и в виде $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$
$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2; \quad \text{г)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \\ \text{д)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3; \quad \text{е)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 9 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- а) для любой перестановки $\sigma \in S_n$ справедливо $\sigma e = e\sigma = \sigma$;
- б) для любых перестановок $\sigma, \tau, \eta \in S_n$ выполнено равенство $(\sigma\tau)\eta = \sigma(\tau\eta)$;
- в) для любой перестановки $\sigma \in S_n$ найдется такая перестановка $\tau \in S_n$, что $\sigma\tau = \tau\sigma = e$;
(такая перестановка τ называется *обратной* к σ ; обозначение: $\tau = \sigma^{-1}$)
- г) если $\sigma\tau = e$, то $\tau = \sigma^{-1}$, $\sigma = \tau^{-1}$;
- д) для любой перестановки $\sigma \in S_n$ справедливо равенство $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{100}; \quad \text{б)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{1000}; \quad \text{в)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1000}; \quad \text{г)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{500}; \\ \text{д)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-127}; \quad \text{е)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{1001}; \quad \text{ж)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^n. \end{aligned}$$
[illegible]

Определение 5. Перестановка $\sigma \in S_n$ называется *циклом длины m* , если существуют такие различные числа $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}$, что $\sigma(i_k) = i_{k+1}$ при $k < m$, $\sigma(i_m) = i_1$ и $\sigma(j) = j$ при $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$. Обозначение: $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_m)$.

Определение 6. Транспозицией называется цикл длины два. Транспозиция вида $(i, i+1)$ называется элементарной.

Задача 7. Найдите порядок цикла длины m .

Задача 8. а) Докажите, что если σ и τ — *независимые циклы* (то есть множества элементов этих циклов не пересекаются), то $\sigma\tau = \tau\sigma$. б) Верно ли, что два цикла коммутируют тогда и только тогда, когда они независимы?

Задача 9. а) Представьте перестановки из задачи 2 в виде произведения независимых циклов.

б) Докажите, что любую перестановку можно представить в виде произведения независимых циклов.

Задача 10. Найдите максимальный порядок перестановки из а) S_5 ; б) S_{13} ; в)* S_n .

Задача 11. Докажите, что $n!$ делится на $\text{ord } \sigma$ для любой перестановки $\sigma \in S_n$.

Задача 12. Текст, написанный на русском языке, зашифрован программой, заменяющей взаимно однозначно каждую букву на некоторую другую.

а) Докажите, что существует такое число k , что текст расшифровывается применением шифрующей программы ровно k раз.

б) Найдите хотя бы одно такое k .

Задача 13. а) Докажите, что любую перестановку можно представить как произведение транспозиций.

б) Докажите, что любую перестановку можно представить как произведение элементарных транспозиций.

Задача 14*. Несколько жителей города N хотят обменяться квартирами. У каждого есть по квартире, но каждый хочет переехать в другую (разные люди хотят переехать в разные квартиры). По законам города разрешены только парные обмены: если два человека обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах. Докажите, что можно устроить парные обмены так, что уже через два дня каждый будет жить в той квартире, куда хотел переехать.

Определение 7. *Беспорядком или инверсией* в перестановке σ называется любая пара (i, j) , для которой $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$. Перестановка называется *чётной*, если число инверсий в ней чётно, и *нечётной* в противном случае. Множество всех чётных перестановок из S_n обозначается A_n и называется *знакопеременной группой*.

Задача 15. Как увидеть инверсии на картинках из определения 2? (Каким *геометрическим* объектам они отвечают?)

Задача 16. Можно ли сказать, сколько инверсий у перестановки σ^{-1} , зная лишь число инверсий у σ ?

Задача 17. Какие из перестановок, представленных в задаче 2, чётные?

Задача 18. Является ли чётной перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$?

Задача 19. Докажите, что любая транспозиция является нечётной перестановкой.

Задача 20. Докажите, что при умножении на транспозицию чётность перестановки меняется.

Задача 21. Докажите, что чётность цикла зависит только от его длины. Как?

Задача 22. а) Как выражается чётность $\sigma\tau$ через чётности σ и τ ?

б) Как выражается чётность σ^n через чётности σ и n ?

Задача 23. Сколько элементов в A_n ?

Задача 24*. Чому задача Ллойда об грі в 15 неразрешима?

Задача 25*. Каждому из n мудрецов написали на лбу число и выдали две варежки: чёрную и белую. По сигналу все мудрецы одновременно надевают варежки. После этого их строят в шеренгу в порядке возрастания написанных на их лбах чисел и просят соседей взяться за руки. Как мудрецам надевать варежки, чтобы в результате каждая белая варежка взялась за белую, а каждая чёрная — за чёрную? (Мудрец видит все числа, кроме своего; все написанные на лбах числа различны.)

[illegible]

[illegible]

Задача 8. а) Раскройте скобки в произведении $\prod_{i=0}^{\infty} (1 + x^{2^i}) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \dots$

б) Докажите, что любое натуральное число однозначно записывается в двоичной системе счисления, и выпишите аналогичное тождество для троичной системы счисления.

Задача 9. а) Сколькими способами можно разменять 57¢ монетами по 1¢, 2¢, 5¢ и 10¢?

б) Найдите коэффициент при x^{57} в формальном ряде $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$.

в) Найдите производящую функцию для числа решений уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k = n$, где $a_1, \dots, a_k$ — заданные натуральные числа, а $x_1, \dots, x_k$ — целые неотрицательные переменные.

г) Найдите производящую функцию последовательности $a_n = C_{n+k}^k$, где $k \in \mathbb{N}$.

Задача 10. а) Докажите, что $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\dots} = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\dots$

б) Докажите, что каждое натуральное число можно представить в виде суммы различных натуральных слагаемых столько же способами, сколькими его можно представить в виде суммы нечётных натуральных слагаемых.

в)* Постройте взаимно однозначное соответствие между разбиениями числа n из предыдущего пункта.

Задача 11. а) Пусть a_n — количество способов разменять n рублей с помощью монет по 2 рубля, 1 рублю и 50 копеек. Найдите производящую функцию для (a_n) .

б) Найдите производящую функцию последовательности (f_{2n}) , где f_n — числа Фибоначчи.

в)* Докажите, что если производящая функция последовательности (a_n) рациональна, то рациональной является и производящая функция последовательности (a_{2n}) .

Задача 12. Коала сидит в вершине A шестиугольника $ABCDEF$. За один ход она переходит в соседнюю с ней вершину. Пусть $a_n, \dots, f_n$ — число путей из n шагов, оканчивающихся в $A, \dots, F$ соответственно, а $A(x), \dots, F(x)$ — производящие функции этих последовательностей.

а) Как выразить $B(x)$ и $E(x)$ через $A(x)$ и $C(x)$?

б) Выразите в замкнутой форме $A(x)$ и выведите явную формулу для a_n .

Задача 13. а) Чему равно число замощений прямоугольника $2 \times n$ плитками домино 1×2 ?

б)* А сколькими способами плитками домино 1×2 можно замостить прямоугольник $3 \times n$?

Задача 14*. Марсоход обнаружил, что органическое вещество на Марсе имеет ДНК, в состав которой входят пять символов, обозначаемых a, b, c, d, e (вместо четырёх в земных ДНК). При этом пары символов cd, ce, ed, ee никогда не встречаются в марсианских ДНК, но любая цепочка, не содержащая таких пар, возможна. Сколько цепочек длины n может существовать на Марсе?

Задача 15*. Будут ли рациональными производящие функции следующих последовательностей:

а) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$; б) nf_n ; в) f_n^2 ; г) $n!$ (как и выше, f_n — это числа Фибоначчи)?

8 а	8 б	9 а	9 б	9 в	9 г	10 а	10 б	10 в	11 а	11 б	11 в	12 а	12 б	13 а	13 б	14	15 а	15 б	15 в	15 г

Примечание. Метод производящих функций для комбинаторных нужд был разработан Леонардом Эйлером (1707-1783 гг.) в середине XVIII века. Что ещё можно сделать с его помощью, вы узнаете в следующем листочке на эту тему (если повезёт, конечно).

Прочитав условие очередной задачи, спросите себя: что это значит с точки зрения графов?

Задача 3. а) В углах доски 3×3 стоят кони: в верхних углах белые, а в нижних — чёрные. Как согласно шахматным правилам поменять белых и чёрных коней местами за наименьшее число ходов?

б) Решите ту же задачу для доски 3×4 (между конями одного цвета одна клетка).

в) Можно ли обойти доску 3×4 ходом шахматного коня, побывав в каждой клетке по одному разу и вернувшись в исходную клетку?

Задача 4. В городе NN всего n телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединён ровно с m другими, если

а) $m = 3, n = 6$; б) $m = 4, n = 6$;
в) $m = 4, n = 7$; г) $m = 5, n = 7$; д) m и n — произвольные натуральные числа?

б) У Пети 24 одноклассника, причём все они имеют различное число друзей в классе. Сколько из них дружит с Петей?

Задача 8. а) Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдётся две грани с одинаковым числом сторон. б)* Верно ли это утверждение для невыпуклых многогранников?

Определение 3. *Путь* в графе — это последовательность вершин $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$, в которой каждые две соседние вершины соединены ребром. Последовательность рёбер $V_1V_2, V_2V_3, \dots, V_nV_{n+1}$ также называют *путём*. Если $V_1 = V_{n+1}$, то путь называется *циклическим*, если при этом все рёбра пути различны — *циклом*, а если ещё и все вершины, кроме V_1 и V_{n+1} , разные — *простым циклом*. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём.

Задача 9. Пусть в связном графе n вершин. Докажите, что
а) этот граф содержит не менее $(n - 1)$ ребра; **б)** в нём $(n - 1)$ ребро если и только если он перестаёт быть связным после удаления любого ребра (такие графы называются *деревьями*);
в) в нём $(n - 1)$ ребро тогда и только тогда, когда этот граф не содержит циклов.

Задача 10. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта — ковёр-самолёт. Из столицы выходит 57 ковровлиний, с Кудыкиной Горы — всего одна, а из всех остальных городов — по 40. Докажите, что из столицы можно долететь до Кудыкиной Горы (возможно, с пересадками).

Задача 11. Сколько рёбер может быть в простом несвязном графе с n вершинами?

1	2	3 а	3 б	3 в	4 а	4 б	4 в	4 г	4 д	5	6 а	6 б	7	8 а	8 б	9 а	9 б	9 в	10	11

Задача 12. В метрополитене города M можно добраться с любой станции до любой другой. Докажите, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через неё так, чтобы с любой из оставшихся станций по-прежнему можно было проехать на любую другую.

Задача 13. а) На танцы пришли n девушек и n юношей. Каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка — с двумя юношами. Докажите, что собравшихся можно разбить на n смешанных пар так, чтобы в каждой паре юноша и девушка были знакомы.

б) Докажите, что число таких разбиений является степенью двойки.

Задача 14. Хулиган Тишка решил прогуляться по парку и его окрестностям так, чтобы при этом перелезть через каждый забор ровно один раз. Сможет ли Тишка это сделать, если парк имеет вид как на рис. 1.

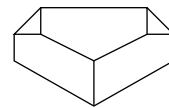


Рис. 1.

Задача 15. Можно ли составить проволочную решётку, изображённую на рис. 2,

а) из пяти ломаных длины 8; б) из восьми ломаных длины 5?

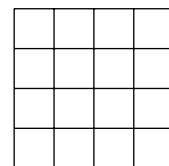


Рис. 2.

Задача 16. Выпишите в ряд цифры от 1 до 9 всеми возможными способами так, чтобы любое число, составленное из двух соседних цифр, делилось на 7 или на 13.

Задача 17. Докажите, что в связном графе есть цикл, содержащий все рёбра, тогда и только тогда, когда степень любой вершины графа чётна (такие графы называются *эйлеровыми*).

Задача 18*. Гриша забыл трёхзначный код своего замка. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если ранее были набраны другие цифры). Докажите, что набирая по одной цифре в секунду, Гриша сможет открыть замок не более чем за 1002 секунды.

Задача 19*. (Теорема Холла) В некоторой компании n юношей. Известно, что при каждом k , удовлетворяющем условию $1 \leq k \leq n$, верно следующее утверждение: для любых k юношей в компании число девушек, знакомых хотя бы с одним из этих k юношей, не меньше k . Докажите, что можно женить всех юношей на знакомых им девушках.

Задача 20*. На олимпиаде каждый из n школьников решил ровно 5 задач, причём каждую задачу решило ровно 5 школьников. Докажите, что можно организовать разбор задач таким образом, чтобы каждый школьник рассказал какую-то из решённых им задач и каждая задача была рассказана ровно один раз.

Задача 21*. Докажите, что среди любых 50 человек найдутся двое, у которых чётное число общих знакомых (быть может, 0) среди остальных 48 человек.

12	13	13	14	15	15	16	17	18	19	20	21
	а	б		а	б						

Примечание. Истоки теории графов как раздела математики восходят к середине XVIII века. Основы этой теории в 1736 году заложил блестящий российский математик швейцарского происхождения Леонард Эйлер (1707-1783 гг.), рассматривая задачу о кёнигсбергских мостах. Легенда гласит, что когда учёный гостил в Кёнигсберге (ныне Калининград), горожане предложили ему следующую задачу: пройти по всем мостам и вернуться в начальную точку, побывав на каждом мосту ровно один раз. После безуспешной попытки совершить нужный обход, Эйлер начертил упрощённую схему мостов и доказал, что сделать требуемое невозможно.

Одной из самых знаменитых задач теории графов стала так называемая *проблема четырёх красок*. Впервые она была сформулирована в 1852 году английским студентом Фрэнсисом Гутри, и заключается вот в чём: верно ли, что всякую географическую карту можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы любые две области, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета. Убедиться в справедливости этого утверждения человечество смогло лишь в 1976 году, когда Кеннет Аппэль и Вольфганг Хакен решили задачу с помощью компьютера. Несмотря на последующие упрощения, и по сей день доказательство практически невозможно проверить, не используя технические средства, из-за чего определённая часть учёных относится к нему с недоверием.

[illegible]

Задача 10. (Описание неприводимых гауссовых чисел)

Пусть $z \in \mathbb{Z}[i]$, q — простое целое число. Докажите следующие утверждения.

- Если z не является неприводимым и $\operatorname{Im} z = 0$, то либо число $\operatorname{Re} z$ составное, либо найдётся такое $w \in \mathbb{Z}[i]$, что $z = w\bar{w}$.
- Если z неприводимо, то $\bar{z}$ тоже неприводимо.
- Если z неприводимо, то существует ровно одно простое целое число p , делящееся на z .
- Если z неприводимо, то существует простое целое число p такое, что $N(z) = p$ или $N(z) = p^2$.
- Если $q = (4k + 3)$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, то q является неприводимым гауссовым числом.
- (Лемма Вильсона) Число $((q - 1)! + 1)$ делится на q .
- Если $q = (4k + 1)$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, то число $((2k)!^2 + 1)$ делится на q .
- Если $q = (4k + 1)$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, то q не является неприводимым гауссовым числом.
- Если $q = 2$ или $q = (4k + 1)$ при некотором $k \in \mathbb{N}$, то найдётся единственное с точностью до сопряжения и умножения на гауссовы единицы неприводимое число $w \in \mathbb{Z}[i]$ такое, что $p = w\bar{w}$.
- Любое неприводимое гауссово число получается из одного из упомянутых в пунктах д и и неприводимых гауссовых чисел умножением на некоторую гауссову единицу.

Задача 11. (Представление числа в виде суммы двух квадратов) Рассмотрим диофантово уравнение $n = x^2 + y^2 = (x + yi)(x + yi)$. Обозначим число его целочисленных решений через $T(n)$.

- Найдите все решения и нарисуйте их на плоскости для $n = 2, 13, 25, 43, 65$.
- Докажите, что при $n \equiv 3 \pmod{4}$ решений нет.
- Пусть $p \equiv 1 \pmod{4}$ — простое целое число. Чему равно $T(p)$?
- Пусть p — простое целое число. Найдите $T(p^k)$.
- Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$, причём $(n, m) = 1$. Докажите, что $T(nm) = 4T(n)T(m)$.
- Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение целого числа n на простые множители. Выразите $T(n)$ через $p_1, \dots, p_k$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.
- Докажите, что $T(n)$ есть учетверённая разность между количеством натуральных делителей числа n , имеющих вид $(4k + 1)$, и количеством натуральных делителей числа n , имеющих вид $(4k + 3)$.
- * Найдите натуральное число, которое представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел ровно 57-ю способами.
- * Найдите наименьшее число, удовлетворяющее условию пункта 3.

Задача 12. Упорядоченная по возрастанию тройка натуральных чисел (a, b, c) называется *пифагоровой*, если она удовлетворяет равенству $c^2 = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$. Применив основную теорему арифметики к этому равенству, получите явное описание всех пифагоровых троек.

Задача 13. Решите в целых числах уравнение $y^3 = x^2 + 1$.

Задача 14. (Диофант) Докажите, что число 15 не представимо в виде суммы квадратов двух рациональных чисел.

10 а	10 б	10 в	10 г	10 д	10 е	10 ж	10 з	10 и	10 к	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	11 е	11 ж	11 з	11 и	12	13	14

Примечание. Упоминания о задаче представления целого числа в виде суммы квадратов двух целых чисел встречаются с древнейших времен. В частности, уже две с лишним тысячи лет назад было известно, что если два числа представимы в виде суммы двух квадратов, то представимо и их произведение — это следует из тождеств Брахмагупты (598-670 гг.), известных еще Диофанту Александрийскому (III век до н.э.): $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$. Общий ответ на вопрос, какие числа представимы в виде суммы двух квадратов (теорема Ферма-Эйлера) без доказательства упоминается в 1632 году в сочинениях Альбера Жирара (1595-1632 гг.). Пьер Ферма (1601-1665 гг.) утверждал, что метод решения ему известен, однако документальных свидетельств этому не осталось. Первое известное нам доказательство дал в 1749 году Леонард Эйлер (1707-1783 гг.) — оно использует метод спуска и тождества Брахмагупты. Два доказательства через гауссовы числа предложил в 1877 году Рихард Дедекінд (1831-1916 гг.). Одно из них описано выше в задаче 11. Что же касается самих гауссовых чисел, то их впервые ввёл Карл Фридрих Гаусс (1777-1855 гг.) в 1832 году для исследования уравнения $x^4 \equiv a \pmod{p}$.

Мощность множества бесконечных последовательностей нулей и единиц называется *мощностью континуума* и обозначается $\mathfrak{c}$.

Задача 2. Пусть X — множество взаимно однозначных отображений одного счётного множества в другое. Докажите, что X несчётно.

г) Множество всех бесконечных последовательностей натуральных чисел.

Задача 11. Докажите, что различных кардинальных чисел, соответствующих бесконечным множествам, бесконечно много.

а) $c + c = c$; б) $c \cdot c = c$; в) $c_0 \cdot c = c$; г) $c^{c_0} = c$; д) $c_0^{c_0} = c$; е) $c_0^c = 2^c$.

[illegible]

Примечание. В этом листочке мы подошли к тому моменту, когда наглядные представления о множествах приводят к противоречию. Действительно, рассмотрим, например, множество всех множеств U , элементами которого являются все множества. Тогда, в частности, все его подмножества тоже будут его элементами, то есть $P(U) \subset U$. Однако это противоречит теоремам Кантора и Кантора-Бернштейна.

Приведём ещё один пример того же сорта, называемый обычно *парадоксом Рассела*. Типичное множество не содержит себя в качестве элемента. Однако в принципе можно представить себе множество, являющееся своим собственным элементом (например, множество всех множеств). Такие множества мы будем называть «необычными». Рассмотрим теперь множество всех «обычных» множеств. Является ли оно «обычным»? Если да, то оно является своим собственным элементом, а значит, «необычное». И наоборот.

Вопрос о том, что плохого в этих и им подобных рассуждениях, весьма непростой. Его обсуждением были заняты лучшие умы науки на протяжении всей первой половины XX-го века. Выводы, к которым в итоге человечество пришло, примерно таковы. Понятие множества не является непосредственно очевидным; разные люди (и даже научные традиции) могут воспринимать его по-разному. Множества — слишком абстрактные объекты, чтобы вопрос «А как на самом деле?» имел смысл. Например, утверждение континуум-гипотезы мы можем принять как истинным, так и ложным — при этом получатся две разные теории, но ни одна из них не будет лучше другой. Чтобы не возникало противоречий и парадоксов, нужно проявлять осторожность и избегать определённого вида рассуждений.

Одни из «безопасных» правил обращения с множествами (по крайней мере пока не приведших к противоречию) сформулированы в аксиоматической теории множеств Цермело и Френкеля. Есть и другие, менее популярные теории. Не вдаваясь в подробности, ограничимся неформальным описанием ограничений, накладываемых во избежание появления противоречий. Главное заключается в следующем: нельзя сразу рассматривать слишком большие множества; строить множества можно только постепенно. Например, можно образовать множество всех подмножеств данного множества (аксиома степени). Можно рассмотреть подмножество элементов данного множества, обладающих каким-либо выделенным свойством (аксиома выделения). Есть и другие аксиомы.

Таким образом, когда мы говорим о мощности как о классе всех множеств, обладающих определёнными свойствами, мы ни в коем случае не можем рассматривать этот класс в качестве множества и оперировать с ним как с множеством. Грубо говоря, потому что он является слишком большим.

P.S. Большая часть настоящего примечания извлечена из прекрасной книжки Н.К. Верещагина и А. Шеня «Начала теории множеств».

[illegible]

Задача 17. В бесконечном графе каждые две вершины соединены ребром — либо красным, либо синим. Докажите, что можно выделить бесконечное число вершин, которые соединены друг с другом рёбрами одного цвета.

Задача 18. Докажите, что из любого бесконечного множества точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать

- а) 4 точки, лежащие в вершинах выпуклого четырёхугольника;
 б)* n точек, лежащих в вершинах выпуклого n -угольника.

Задача 19*. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Двое играют в такую игру: они по очереди соединяют какие-то две ещё не соединённые точки отрезком так, чтобы отрезки не пересекались нигде, кроме отмеченных точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 20*. В лесу $k \cdot l$ тропинок и некоторое количество полянок. Каждая тропинка соединяет две полянки. Известно, что тропинки можно раскрасить в l цветов так, чтобы к каждой полянке сходились тропинки разного цвета. Докажите, что это можно сделать, покрасив каждым цветом ровно k тропинок.

Задача 21*. В графе n вершин $A_1, \dots, A_n$ и n рёбер $b_1, \dots, b_n$. Известно, что любые две вершины A_i и A_j этого графа соединены ребром если и только если рёбра b_i и b_j выходят из одной вершины. Докажите, что степень каждой вершины равна двум.

Задача 22*. В гости ожидают m или n человек, где $(m, n) = 1$. На какое наименьшее число секторов надо разрезать круглый торт, чтобы из них можно было сложить как m , так и n одинаковых кусков?

Задача 23*. Сколько остовов имеет граф с вершинами $V_0, \dots, V_n$ и $(2n - 1)$ ребром, где вершина V_0 соединена рёбрами с остальными вершинами, и при $1 \leq i < n$ соединены ребром вершины V_i и V_{i+1} ?

Задача 24*. (Теорема Кели) Докажите, что полный граф с n вершинами имеет n^{n-2} остовов.

17	18 а	18 б	19	20	21	22	23	24

Примечание. Говорят, что два графа G_1 и G_2 *изоморфны*, если существует взаимно однозначное отображение f из множества вершин первого графа во множество вершин второго графа, сохраняющее рёбра (то есть вершины u и v графа G_1 соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром вершины $f(u)$ и $f(v)$ графа G_2). Обычно графы изучают с точностью до изоморфизма, поскольку в практических задачах зачастую графы возникают без привязки к их изображению на плоскости, а большая часть важных свойств изоморфных графов совпадает. С этой точки зрения вопрос о том, является ли тот или иной граф плоским, правильно переформулировать таким образом: изоморфен ли данный граф некоторому плоскому графу (такие графы называют *планарными*). Именно так следует понимать, в частности, формулировку задачи 11.

Критерий планарности для графов даёт теорема Понтрягина-Куратовского, доказанная в 1927 году советским учёным Львом Семёновичем Понтрягиным (1908-1988 гг.) и в 1930 году, независимо, польским математиком Казимиром Куратовским (1896-1980 гг.): граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 (полный граф на пяти вершинах) или $K_{3,3}$ (граф «домики-колодцы» из задачи 12). Поясним, что два графа называются *гомеоморфными*, если они оба могут быть получены из одного и того же графа «добавлением в его рёбра» новых вершин степени 2. Например, граф Петерсена, уже встречавшийся нам ранее, не является планарным, потому что обладает подграфом, гомеоморфным графу $K_{3,3}$ (рис. 2).

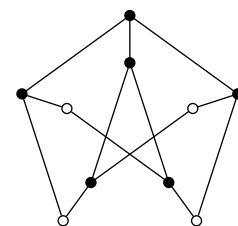


Рис. 2.

[illegible]

1	2	3	а	б	в	5	а	б	7	а	б	9	б	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л	м	11	а	б

Задача 13. Пусть M — связно, $x_k \in M$ при всех k . Докажите, что для функции f , выпуклой вниз на M :

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}; \quad \text{б)} \quad f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}; \\ \text{в)} \quad & (\text{неравенство Йенсена}) \text{ если } \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0, \text{ то } f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}. \end{aligned}$$

Задача 14. Пусть $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$. Докажите, что:

а) $\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^2$;

$$\text{б) } \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}; \quad \text{в) } \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \frac{n}{x_1^{-1} + \dots + x_n^{-1}}.$$

г) В каких случаях в указанных выше неравенствах достигается равенство?

Задача 15. а) Докажите, что любое треугольное сечение тетраэдра по площади не превосходит одной из граней.

б) Верно ли аналогичное утверждение для четырёхугольных сечений тетраэдра?

Задача 16. а) Докажите, что среди треугольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

б) Докажите аналогичное утверждение для n -угольников.

Задача 17. Найдите наибольшее значение объёма тетраэдра, который уместается в коробку $3 \times 4 \times 5$.

Задача 18. Углы α, β, γ лежат соответственно против сторон a, b, c данного треугольника. Докажите, что

$$60^\circ \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} \leq 90^\circ.$$

Задача 19. (неравенство Коши-Буняковского) а) Докажите, что $\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$

б) При каких условиях достигается равенство? в) Каков геометрический смысл неравенства?

Задача 20. (*неравенство треугольника*) а) Докажите, что $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$.

б) При каких условиях достигается равенство? в) Каков геометрический смысл неравенства?

Задача 21*. (неравенство Юнга) а) Пусть $x, y \geq 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

б) При каких условиях достигается равенство?

Задача 22*. (неравенство Гёльдера) Пусть $p, q > 1$, причём $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что для любых положительных чисел $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ выполнено

$$x_1y_1 + \dots + x_ny_n \leq (x_1^p + \dots + x_n^p)^{1/p} \cdot (y_1^q + \dots + y_n^q)^{1/q}.$$

Задача 23*. (неравенство Минковского) Докажите, что если $p > 1$, то для любых положительных чисел $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ выполнено

$$((x_1 + y_1)^p + \dots + (x_n + y_n)^p)^{1/p} \leq (x_1^p + \dots + x_n^p)^{1/p} \cdot (y_1^p + \dots + y_n^p)^{1/p}.$$

[illegible]

- а) бесконечно длинную цепочку подряд идущих составных чисел;
б) сколь угодно длинную цепочку подряд идущих составных чисел?

- а) бесконечно длинную арифметическую прогрессию;
б) сколь угодно длинную арифметическую прогрессию?

- а)** вычёркиванием некоторых членов; **б)** вычёркиванием конечного числа членов?

Задача 4. Клетки бесконечной клетчатой плоскости раскрашены в два цвета. Обязательно ли найдётся бесконечное множество вертикалей и бесконечное множество горизонталей, на пересечении которых все клетки будут одного цвета?

Задача 5. Можно ли расставить во все клетки бесконечной клетчатой плоскости все натуральные числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз и чтобы любые два числа из одной строки или одного столбца были взаимно простыми?

- а) прямую конечным числом кругов;
б) плоскость конечным числом полос;
в) плоскость конечным числом внутренностей углов, сумма которых меньше 360° ;
г) тот же вопрос, что и в предыдущем пункте, но разрешается использовать бесконечное число углов;
д) плоскость конечным числом внутренностей парабол?

Задача 7. Докажите, что из любых одиннадцати бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

- б) Останется ли верным утверждение задачи, если последовательностей счётное число?

Задача 9. Дан язык с конечным алфавитом. Словом в этом языке называется любая последовательность букв из алфавита этого языка. Часть слов (конечной длины) в языке является неприличными. Известно, что существуют сколь угодно длинные приличные слова (т.е. слова, не содержащие неприличных подслов). Докажите, что существует бесконечно длинное приличное слово.

- б) Докажите этот же факт для произвольной последовательности действительных чисел.

Задача 11. Докажите, что существует такое подмножество $M \subset \mathbb{N}$, что каждое натуральное число представляется единственным образом в виде разности двух чисел из M .

Задача 12. Тор и Один по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Тор каждым своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, Один — одну. Если в итоге получится периодическая дробь, выигрывает Тор, иначе — Один. Кто выиграет при правильной игре?

[illegible]

Задача 13. Игра происходит на бесконечной плоскости. Игроют двое: один передвигает одну фишку-волка, другой — несколько фишек-овец. После хода волка ходит какая-нибудь из овец, затем после следующего хода волка — опять какая-нибудь из овец, и так далее. И волк и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более, чем на один метр. Верно ли, что для любого числа овец существует такая начальная позиция, что волк не поймаёт ни одной овцы?

Задача 14. Бандит угнал из участка старую полицейскую машину и умчался на ней по дороге в неизвестном направлении. Через некоторое время пропажи хватились, и в погоню на более новой машине отправился полицейский. Дорога представляет собой бесконечную прямую, скорость машины полицейского больше скорости машины бандита, сколько времени прошло между выездом бандита и полицейского из участка — неизвестно. Может ли полицейский гарантированно догнать бандита?

Задача 15. Город представляет собой бесконечную клетчатую плоскость (линии — улицы, клеточки — кварталы). На одной из улиц через каждые 100 кварталов на перекрёстках стоит по милиционеру. Где-то в городе есть бандит (местонахождение бандита неизвестно, но перемещается он только по улицам). Цель милиции — увидеть бандита. Есть ли у милиции способ (алгоритм) наверняка достигнуть своей цели? Известно, что максимальные скорости милиции и бандита — какие-то конечные, но неизвестные нам величины (у бандита скорость может быть больше, чем у милиции). Милиция видит вдоль улиц во все стороны на любое расстояние.

Задача 16*. В таком же городе, как и в предыдущей задаче, трое полицейских пытаются поймать вора (местонахождение вора неизвестно, но перемещается он только по улицам). Максимальные скорости у полицейских и вора одинаковы. Вор считается пойманным, если он оказался на одной улице с полицейским. Смогут ли полицейские поймать вора?

Задача 17. У Васи и Пети есть набор синих шариков и два набора красных шариков: маленькие и большие. В каждом из трех наборов бесконечно много шариков, занумерованных числами из множества M , причём каждый шарик больше предыдущего по номеру, и каждый большой шарик больше любого маленького.

Мальчики играют в игру по следующим правилам. Для начала Вася выбирает, сколько ходов будет продолжаться игра. После этого он выбирает один из шариков (любого цвета). В ответ Петя должен выбрать ему пару среди шариков другого цвета. Эти действия повторяются выбранное число раз. Заметьте, что Васе не обязательно каждый ход выбирать шарик одного цвета.

В результате совместными усилиями будет выбрано несколько пар шариков, состоящих каждая из красного и синего шариков. Эти пары упорядочиваются так, чтобы красные шарики шли по возрастанию размера. Если синие шарики при этом тоже будут идти по возрастанию, то победил Петя; в противном случае победа присуждается Васе.

Кто победит при оптимальной игре обеих сторон, если а) $M = \mathbb{N}$; б) $M = \mathbb{Z}$?

13	14	15	16	17 а	17 б

Примечание. Бесконечные объекты регулярно встречаются нам в повседневной жизни, а потому велик соблазн оперировать с ними точно так же, как мы это делаем с объектами конечными. Однако здесь необходима определённая осторожность, что было замечено ещё древними греками. Так, знаменитая апория Зенона Элейского (ок. 490 г. до н.э. — ок. 425 г. до н.э.) «Ахиллес и черепаха» гласит: «Допустим, Ахиллес бежит в десять раз быстрее, чем черепаха, и находится позади неё на расстоянии в тысячу шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползёт сто шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползёт ещё десять шагов, и так далее. Процесс будет продолжаться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху».

С другой стороны, бояться бесконечности тоже не нужно, потому что её использование даёт дополнительные возможности. Нельзя не вспомнить, сколько пользы принесли нам математическая индукция и пределы последовательности и функции. В дальнейшем число таких примеров будет плодиться и множиться. И это хорошо.

[illegible]

Задача 5. Приведите пример множеств M и W , каждый элемент которых снабжён предпочтениями, для которых существует больше двух стабильных паросочетаний.

Определение 2. Элементы $m \in M$ и $w \in W$ называются *допустимыми партнёрами*, если существует стабильное паросочетание, в котором элементы m и w образуют пару.

Определение 3. Стабильное паросочетание называется *M -оптимальным*, если в нём каждый мальчик образует пару с наилучшим из своих допустимых партнёров. Если же каждый мальчик образует пару с наихудшим из своих допустимых партнёров, то паросочетание называется *M -пессимистичным*.

Задача 6. Докажите, что паросочетание, получающееся при помощи алгоритма Гейла-Шепли, является
а) M -оптимальным; б) W -пессимистичным.

Задача 7. Пусть паросочетание, получающееся для множеств M и W при помощи алгоритма Гейла-Шепли (когда предложение делали мальчики), совпало с паросочетанием, полученным, когда предложение делали девочки. Сколько может быть стабильных паросочетаний для данных M и W ?

Задача 8. Правда ли, что в условиях задачи 2 стабильное паросочетание единственно?

Задача 9. а) Предположим, что один из мальчиков узнал предпочтения всех остальных. Может ли ему быть выгодно сделать вид, что у него другие предпочтения, если для получения стабильного паросочетания применяется алгоритм Гейла-Шепли?

б) А может ли быть выгодно девочке симитировать ненастоящие предпочтения, если она узнала о предпочтениях всех остальных?

Задача 10. а) Предположим, что несколько мальчиков узнали предпочтения всех остальных. Может ли им быть выгодно, действуя сообща, симитировать ненастоящие предпочтения, если для получения стабильного паросочетания применяется алгоритм Гейла-Шепли?

б) А если о предпочтениях всех остальных узнала группа девочек?

Задача 11. Пусть студенты a, b, c, d, e, f, g, h живут в комнатах под номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 соответственно и вдруг решили переселиться таким образом, чтобы никто из них не стал жить хуже. Придумайте алгоритм, позволяющий это сделать, и примените его в том случае, если предпочтения студентов выглядят следующим образом:

$a : 3 \succ 1 \succ 7 \succ 8 \succ 5 \succ 2 \succ 4 \succ 6$	$b : 5 \succ 1 \succ 8 \succ 7 \succ 6 \succ 2 \succ 3 \succ 4$
$c : 1 \succ 3 \succ 7 \succ 2 \succ 6 \succ 5 \succ 8 \succ 4$	$d : 7 \succ 8 \succ 3 \succ 1 \succ 5 \succ 6 \succ 4 \succ 2$
$e : 8 \succ 5 \succ 7 \succ 1 \succ 6 \succ 3 \succ 4 \succ 2$	$f : 2 \succ 6 \succ 5 \succ 4 \succ 1 \succ 8 \succ 3 \succ 7$
$g : 1 \succ 3 \succ 5 \succ 6 \succ 8 \succ 7 \succ 2 \succ 4$	$h : 3 \succ 5 \succ 8 \succ 1 \succ 2 \succ 7 \succ 4 \succ 6$

5	6	6	7	8	9	9	10	10	11
a	a	6		a	6	a	6		

Примечание. Алгоритм Гейла-Шепли впервые был представлен миру в 1962 году, когда Дэвид Гейл (1921-2008 гг.) и Ллойд Шепли (1923-2016 гг.) опубликовали математическую статью с неожиданным названием «Приём в колледжи и стабильность брака». Общество не сразу оценило значимость работы. Лишь через 30 лет стараниями Элвина Рота (р. 1951 г.) началась разработка основанных на ней социальных проектов. Сегодня в США и некоторых других странах распределение старшеклассников по школам и начинающих врачей по больницам, а также подбор доноров для пересадки почек осуществляются на базе тех самых идей. За создание и внедрение в практику теории оптимального распределения Шепли и Роту в 2012 году была присуждена Нобелевская премия по экономике (Гейл к тому времени, к сожалению, уже умер).

Простой житейский смысл всей этой теории, увы, расходится с романтическими образами из сказок. Оказывается, если хочешь лучшей жизни, то сидеть сложа руки и ждать принца на белом коне — не самая блестящая идея. А уж если сидишь и ждёшь — плети козни!