

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ И АНАЛИЗУ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ УЧАЩИМСЯ IX и X КЛАССОВ

Ниже представлена часть курса анализа, пройденная в течение полутора лет (IX класс и первая половина X) в математических классах школы № 7. В этот курс включены и элементы традиционного курса алгебры, естественно примыкающие к анализу. Этот предмет занимает 6 часов в неделю, из которых 2 не обязательны для посещения (консультация).

Не нужно думать, что в нашей школе проходит какой-то не представленный здесь курс анализа, а задачи являются к нему упражнениями. Предлагаемые задачи — это и есть сам курс анализа. В сборник включены определения, достаточные для самостоятельного решения всех задач. Проходя таким образом материал, школьники шаг за шагом овладевают техникой математического мышления. Овладение такой техникой на серьезном профессиональном уровне — основная цель курса.

Хотя научиться математическому мышлению можно почти на любом материале, мы старались подобрать его так, чтобы подвести учащихся к наиболее актуальной тематике. Здесь, конечно, сказывается вкус преподавателя. Мы считаем, что именно свободное владение основами анализа (техника работы с понятиями непрерывности и предела в разных видах) есть та база, на основе которой можно начинать серьезные занятия различными областями математики.

Логической стороне понятия предела у нас уделено значительно больше внимания, чем вычислительной. Это вполне соответствует современному стилю работы математиков, в особенности вычислителей-программистов. Один из основных выводов нашей работы состоит в том, что нужно очень много времени, чтобы хорошо усвоить основные понятия анализа: понятия предела и непрерывности. Если случится, например, что какой-нибудь из учеников, даже из лучших, не сможет в течение месяца доказать эквивалентность двух определений непрерывности (на ε , δ -языке и на языке последовательностей), — не подсказывайте ему. Дайте ему возможность самостоятельно преодолеть эти трудности.

На занятиях по анализу у нас присутствует одновременно несколько учителей, от 3 до 6 в разных классах. Задания вы-

даются каждому в виде листочков, размноженных на машинке (один листочек на одно или несколько занятий). Ученики сидят в классе и решают задачи. Их же они продолжают решать дома, так как в классе, как правило, не успевают. Никаких специальных домашних заданий не задается.

Из таких листков, переписанных подряд, и составлен настоящий сборник (с добавлением контрольных работ). Преподаватели заняты в классе тем, что по очереди беседуют со всеми. За час можно побеседовать с одним-тремя учениками. Во время беседы ученик рассказывает преподавателю решенные им задачи. Беседа напоминает экзамен, с тем различием, что ученик рассказывает только то, что сам сделал. Отметка за это не ставится. Одновременно может происходить консультация, но она занимает, как правило, небольшую долю времени.

Большинство задач первой части курса, до действительных чисел, не обязательно. Начиная с действительных чисел, большинство задач обязательно. Обязательность понимается в том смысле, что мы не переходим к следующему разделу, пока большинство учеников не решат почти все задачи. Мы не практикуем искусственного ускорения темпа, то есть прохождение курса с большей скоростью, чем ученики могут его усвоить при самостоятельной спокойной работе.

Контрольные работы в большинстве случаев разрешается несколько раз переделывать, пока не будет написано аккуратное решение. При этом мы не возражаем, чтобы каждый решил задачи своими методами и не узнал методов, примененных другими. Некоторые контрольные не завершают тему, а начинают ее.

Естественное требование к задачкам предлагаемого типа состоит в том, чтобы задачи были хорошо подогнаны друг к другу, т. е. чтобы каждая задача была хорошо приспособлена для решения дальнейших задач. Однако слишком хорошую подогнанность мы считаем вредной: чрезмерная гладкость в задачке обернется беспомощностью в дальнейшей работе математика. Часто мы нарочно разрушали цепочки задач, в которых каждая задача подсказывает метод решения следующей.

В нашем курсе основная техника математического мышления отрабатывается на понятии предела. Можно было бы положить в основу понятие непрерывности, что и сделано в некоторых классах нашей школы. Фактически тема предела начинает понемногу появляться в задачах предыдущих тем. Несмотря на такую подготовку, понятие предела все же оказывается в логическом отношении намного труднее, чем все, что встречается в предыдущих темах.

Существенную трудность для учащихся представляет не только само решение задачи, но и запись решения. От тех учеников, которые нечетко рассказывают устно, обязательно требовать, чтобы решения записывались. Если решение записано плохо, мы

возвращаем его для доработки. Ничего, если способ решения не самый удачный, мы предоставляем ученику довести до конца его собственное решение.

Иногда у нас происходят занятия обычного типа, когда преподаватель у доски беседует с классом. Таких занятий бывает очень мало — 2—5 в полугодие (например, вводная лекция к теме «Неравенства», где говорилось о натуральном числе).

При такой системе проведения занятий возникают следующие проблемы:

1) В классе, где одновременно 4 ученика рассказывают задачи своим преподавателям, бывает шумно. Мы завели у себя в школе «тихую комнату» (вроде читальни, но без книг). В «тихой комнате» вовсе запрещено разговаривать. В основном классе тоже становится тихо, так как там остается меньше народу.

2) Ученики решают задачи по-разному, причем часто плохим способом. Конечно, когда задача как-то уже решена, можно рассказать ученику лучшее решение, но не нужно навязывать учащимся свои привычные рассуждения.

3) Ученики идут в разном темпе. К этому мы приспособились так: скорость поступления новых задач мы берем такую, чтобы с ней справлялись самые тихходные. Тогда у части класса образуется резерв времени, который мы используем для факультативных тем и кружков. Их тоже можно проводить «в листочках», так что добавочных часов они не требуют.

4) Необходимо много преподавателей. У нас учителями анализа работают научные сотрудники ряда институтов, аспиранты и студенты. Привлечение лучших студентов — резерв, который может быть использован во многих местах.

Хотя мы редко задаем формально обязательные задания (на дом), необходимым условием успешности нашей работы является большой резерв свободного домашнего времени учащихся. Перегрузка домашними заданиями по другим предметам делает применение наших методов невозможным.

Решения некоторых задач

Задачи на предел — узловое место курса. Следует добиваться совершенно четких решений, ясного понимания всех определений, умения формулировать противоположные утверждения.

Решение задачи 188. Пусть последовательность $a_n \rightarrow +\infty$. Рассмотрим a_1 . По определению, существует такое N , что при $n > N$ $a_n > a_1$. Выберем из чисел $a_1; a_2; a_3; \dots; a_N$ (их конечное число) наименьшее. Пусть это будет \bar{a} : $\bar{a} \leq a_1$. Теперь сравним \bar{a} с произвольным a_i . Если $i \leq N$, то $\bar{a} \leq a_i$ по выбору \bar{a} , а если $i > N$, то $\bar{a} \leq a_1 < a_i$ по выбору N . Но \bar{a} есть член нашей последовательности, и все доказано.