Задачи по математике

курс 9–11 математических классов

предварительная версия
January 20, 2007

Оглавление

Обозначения

Обозначение	**Смысл**	**Впервые встретилось**[1)]
$\stackrel{\text{def}}{=}$	равно по определению	
T_n	n-е треугольное число	1
P_n	n-е пятиугольное число	1
Π_n	n-е пирамидальное число	1
$n!$	факториал, произведение всех натуральных чисел от 1 до n	
C_n^k или $\binom{n}{k}$	число сочетаний из n по k	3
$n \,\vdots\, k$	n делится на k	4
$\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$	десятичная запись натурального числа с цифрами $a_n, \ldots, a_1, a_0$	4
(a, b)	наибольший общий делитель целых чисел a и b	6
$A \cup B$	объединение множеств A и B	8
$A \cap B$	пересечение множеств A и B	8
$A \setminus B$	разность множеств A и B	8
$\lvert X\rvert = \lvert Y\rvert$	множества X и Y равномощны	9
$n \gg a$	n много больше a	10
НОД(A, B)	наибольший общий делитель многочленов A и B	15

[1)]Указаны номера листков.

Как решали дополнительные листки[2)]

Листок	**Сколько человек решало**[3)]
Листок №1д. Геометрия на клетчатой бумаге	23
Листок №2д. “Иррациональная” прямая на квадратной решётке	4
Листок №3д. Анализ информации	23
Листок №4д. Графы	17
Листок №5д. Геометрия масс	19
Листок №6д. Деревья. Формула Эйлера. Плоские графы	9
Листок №7д. Преследования на плоскости	10
Листок №8д. Бесконечность	13
Листок №9д. Вариация кривой	6
Листок №10д. Повторение 2	3
Листок №11д. Перестановки	10
Листок №12д. Элементы теории вероятностей	14
Листок №13д. Множества на прямой. Открытые и замкнутые множества	10
Листок №14д. Суммирование рядов	13
Листок №15д. Основная теорема алгебры	3
Листок №16д. Комплексные числа 2	2
Листок №17д. Бесконечные десятичные дроби	0
Листок №18д. Приближение действительных чисел рациональными	0
Листок №19д. Множества на прямой. Канторово множество	6
Листок №20д. Производная. Часть 3	4
Листок №21д. Арифметика остатков (продолжение)	6
Листок №22д. Аффинная геометрия	3
Листок №23д. Интеграл Курцвейля–Хенстока	??
Листок №24д. Многочлены. Неприводимость, однозначность разложения и иррациональность	2
Листок №25д. Числа Бернулли	5
Листок №26д. Плоские алгебраические кривые	3
Листок №27д. Топология 1	10
Листок №28д. Топология 2	5
Листок №29д. Топология 3	2
Листок №30д. Проективная геометрия	1
Листок №31д. Математические модели некоторых систем голосования	5
Листок №32д. Теорема Эрроу о диктаторе	6
Листок №33д. Линейная алгебра	6
Листок №34д. Элементарная математика	6
Листок №35д. Колмогоровская сложность	3
Листок №36д. Распределение простых чисел	4
Листок №Е. Элементы теории вероятностей	4

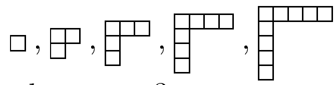
[2)]Временно помещённый сюда раздел, впоследствии может быть удалён.

[3)]Имеется в виду, сколько человек заинтересовалось соответствующим листком и решило ощутимое количество задач, но далеко не обязательно все или почти все.

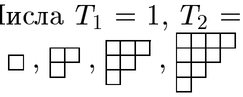
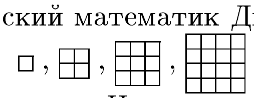
Глава 1.

Обязательный курс

Листок №1. Геометрическое суммирование 09.2003

Задача 1. Рассмотрим последовательность «уголков»:  , ... Сколько клеток в k-м уголке и чему равна суммарная площадь первых k уголков?

Задача 2. **а)** Чему равно k-е нечётное число и сумма первых k нечётных чисел?
б) Чему равно k-е чётное число и сумма первых k чётных чисел?
в) Вычислите сумму 100 последовательных нечётных чисел, начиная с 57.

Задача 3. Числа $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, ... греческий математик Диофант называл *треугольными*:  , ... *Четырёхугольные числа*  , ... — это квадраты. Сложите из двух последовательных треугольных чисел квадрат. Что получится при сложении T_n с T_n? Выразите T_n через n.

Задача 4. Найдите сумму первой сотни натуральных чисел.

Задача 5. Докажите геометрически теорему сложения треугольных чисел: $T_{m+n} = T_m + T_n + mn$.

Задача 6. (*Пифагорова таблица умножения*)
а) Докажите тождество $mk = km$ (т. е. докажите, что $\underbrace{k + k + \ldots + k}_{m} = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{k}$).
б) Каковы размеры и площадь таблицы на рис. 1.1?

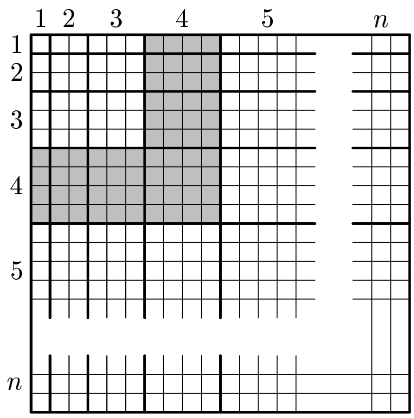


Рис. 1.1. Пифагорова таблица умножения чисел от 1 до n.

Задача 7. Сколько клеток в k-м, считая от левого верхнего угла пифагоровой таблицы, «толстом» уголке, вершина которого — квадрат $k \times k$ клеток, а стороны составлены из прямоугольников $1 \times k$, $2 \times k, \ldots, (k-1) \times k$ клеток?

Задача 8. Найдите сумму $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

Задача 9. Сформулируйте и докажите теорему, описывающую явление: $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$, ...

Задача 10. (*Пятиугольные числа*) $P_1 = 1, P_2 = 5, P_3 = 12, P_4 = 22, \ldots$ показаны на рис. 1.2. Найдите разность $P_k - P_{k-1}$ между последовательными пятиугольными числами. Выразите P_n через n.

Задача 11. Докажите геометрически, что сумма n-го треугольного и n-го квадратного числа на n больше, чем n-е

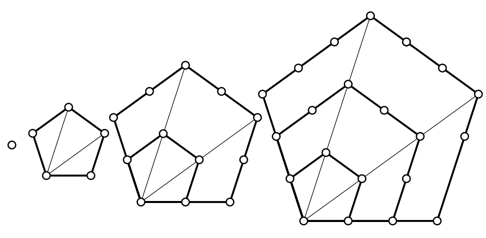


Рис. 1.2. Пятиугольные числа.

пятиугольное число.

Задача 12*. Число k^2 можно представлять себе как объём параллелепипеда $1 \times k \times k$, а сумму $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ — как объём пирамиды, сложенной из таких параллелепипедов (на рис. 1.3 изображена пирамида для суммы $1^2 + 2^2$). Попробуйте, комбинируя такие пирамиды, получить какую-нибудь фигуру, объём которой легко сосчитать (например, куб, параллелепипед, призму и т. п.) и выведите формулу для суммы $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

Задача 13*. Сумму треугольных чисел $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$ тоже можно представлять себе как объём некоторой пирамиды. Попробуйте геометрически найти формулу для суммы треугольных чисел (эта сумма обозначается Π_n и называется *n-м пирамидальным числом*).

Задача 14*. Найдите сумму квадратов первых n нечётных чисел.

Интересно, какие ещё суммы можно найти с помощью геометрических рассуждений?

Задача 15*. Придумайте какой-нибудь способ получения формул для следующих сумм: **а)** $\Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_n$; **б)** $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$.

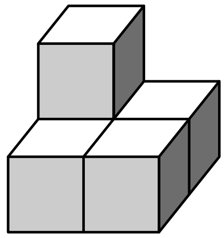


Рис. 1.3.

Листок №2. **Комбинаторика** 09.2003

Задача 1. В школьной столовой 5 кранов для умывания. Каждый может быть закрыт или открыт. Сколькими способами может течь вода в столовой?

Задача 2. Некое современное здание имеет форму куба, стоящего на четырёх колоннах. Имеется 6 красок. Сколькими способами можно покрасить грани здания этими красками в 6 цветов? (Каждая грань красится целиком в один цвет, разные грани красятся в разные цвета.)

Задача 3. **а)** В заборе 20 досок, каждую надо покрасить в синий, зелёный или жёлтый цвет, причём соседние доски красятся в разные цвета. Сколькими способами это можно сделать?
б) А если требуется ещё, чтобы хоть одна из досок обязательно была синей?

Задача 4. **а)** Сколько можно составить различных (не обязательно осмысленных) слов из k букв, используя русский алфавит? **б)** А если потребовать, чтобы буквы в словах не повторялись? **в)** Сколькими способами можно переставить буквы в слове из k различных букв?

Задача 5. **а)** Сколько существует 10-значных чисел, не содержащих цифру 1?
б) Сколько из них содержит цифру 9 (хотя бы одну)?

Задача 6. **а)** Десять девушек водят хоровод. Сколькими способами они могут встать в круг?
б) Сколько ожерелий можно составить из 10 различных бусин?
в)* А если в ожерелье всего 3 белых и 7 синих бусин?

Задача 7. **а)** Сколько строк можно составить из 0 и 1, чтобы в каждой строке было 10 цифр?
б) На дереве растут 10 яблок. Сколькими способами можно сорвать несколько из них?

Задача 8. Меню в школьном буфете постоянно и состоит из n разных блюд. Петя хочет каждый день выбирать себе завтрак по-новому (за раз он может съесть от 0 до n разных блюд).
а) Сколько дней ему удастся это делать? **б)** Сколько блюд он съест за это время? **в)** Вася решил последовать примеру Пети, но съедать каждый день нечётное число блюд. Сколько дней ему удастся это делать? **г)** Сколько блюд он съест за это время?

Задача 9. **а)** Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 различных ладей так, чтобы они не били друг друга?
б) Ответом в предыдущем пункте является квадрат некоторого числа. Объясните это явление.

Задача 10. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 неразличимых ладей так, чтобы они не били друг друга?

Задача 11. Фабрика игрушек выпускает разноцветные кубики. У всякого кубика каждая грань окрашена целиком одной из шести красок, имеющихся на фабрике, причём разные грани одного кубика окрашены разными красками. Сколько видов кубиков выпускает фабрика?

Задача 12*. Фабрика из предыдущей задачи начала выпуск параллелепипедов $1 \times 1 \times 2$, склеивая по два из выпускаемых ею кубиков. Сколько получится различных видов новой игрушки?

Задача 13*. Решите две предыдущие задачи, заменив куб на тетраэдр (и 6 цветов на 4).

Задача 14. **а)** Какое наибольшее число неразличимых слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?
б) Докажите, что число способов такой расстановки — квадрат некоторого числа.
в)* Найдите это число. (Сначала решите такую же задачу для досок 2×2, $4 \times 4 \ldots$)

Задача 15. Сколько существует строк из 20 цифр, в которых встречаются только нули и единицы, причём никакие два нуля не стоят рядом?

Задача 16*. В таблицу размера $k \times l$ записывают числа $+1$ и -1 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равнялось 1. Сколькими способами это можно сделать?

Листок №3. Комбинаторика 2 09.2003

Задача 1. В классе учатся 20 человек. Сколькими способами из них можно выбрать двоих школьников: старосту и ответственного за проездные билеты? А просто двоих школьников?

Задача 2. Сколько разных слов (не только осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах **а)** РОК; **б)** КУРОК; **в)** КОЛОБОК; **г)** $\underbrace{\text{АА}\ldots\text{А}}_{a}\underbrace{\text{ББ}\ldots\text{Б}}_{b}$? **д)*** $\underbrace{\text{б}_1\ldots\text{б}_1}_{k_1}\underbrace{\text{б}_2\ldots\text{б}_2}_{k_2}\ldots\ldots\underbrace{\text{б}_m\ldots\text{б}_m}_{k_m}$.

Задача 3. **а)** Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных в классе из 20 человек?
б) А сколькими способами можно выбрать старосту, его помощника и трёх дежурных?

Определение 1. *Числом сочетаний из n элементов по k* называется количество способов выбрать k предметов из n различных предметов. Обозначение: C_n^k (читается «це из n по k») или $\binom{n}{k}$.

Задача 4. Докажите, что **а)** $C_n^k = C_n^{n-k}$; **б)** $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Задача 5. Найдите формулу для C_n^k.

Задача 6. **а)** На рис. 1.4 изображен план города (линии — это улицы, пересечения линий — перекрестки). На улицах введено одностороннее движение: можно ехать только «вверх» или «вправо». Сколько разных маршрутов ведёт из точки A в точку B?
б) Сколько из этих маршрутов не проходят через отмеченную на плане точку внутри города?

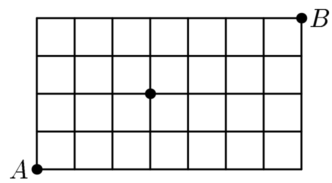


Рис. 1.4.

Задача 7. Сколькими способами можно рассадить класс, если пришло 27 человек, а мест 30?

Задача 8. Сколькими способами можно высадить в ряд 3 груши и 4 яблони?

Определение 2. *Треугольником Паскаля* называют числовой треугольник, изображенный на рисунке справа (по краям треугольника стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух, стоящих справа и слева над ним).

Задача 9. На рисунке выписаны первые 5 строк треугольника Паскаля. Напишите следующие 5 строк.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
. . . . . .

Задача 10. Докажите, что k-е число n-й строки равно C_n^k (строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в строках нумеруются слева направо, также начиная с нуля).

Задача 11. Докажите, что сумма чисел в n-й строке треугольника Паскаля равна 2^n.

Задача 12. Докажите тождество: $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$.

Задача 13. **а)** Раскройте скобки и приведите подобные в выражениях $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$.
б) (*Бином Ньютона*) Раскроем скобки и приведём подобные в выражении $(a+b)^n$. Возьмём любое слагаемое. Оно имеет вид $C \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ (почему?). Докажите, что $C = C_n^k$.

Задача 14. Докажите тождество: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Задача 15. Возьмём любое число C в треугольнике Паскаля и сложим все числа, начиная с него и идя по прямой направо-вверх. Докажите, что сумма равна числу, стоящему под C справа.

Задача 16. Выведите из задачи 15 формулы для сумм $1 + \ldots + n$, $T_1 + \ldots + T_n$, $\varPi_1 + \ldots + \varPi_n$.

Задача 17*. Как из предыдущей задачи вывести формулы для $1^2 + \dots + k^2$, $1^3 + \dots + k^3$, …?

Задача 18*. В каких строках треугольника Паскаля все числа нечётные?

Задача 19*. Докажите, что $C_p^0 \cdot C_q^m + C_p^1 \cdot C_q^{m-1} + \dots + C_p^{m-1} \cdot C_q^1 + C_p^m \cdot C_q^0 = C_{p+q}^m$.

* * *

Задача 20. **а)** В НИИ работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий, и 23 — оба языка. Сколько человек в НИИ не знают ни английского, ни немецкого языков?
б) Пусть кроме этого польский знают 20 человек, английский и польский — 12, немецкий и польский — 11, все три языка — 5. Сколько человек не знают ни одного из этих языков?
в)* (*Формула включений и исключений*) Решите задачу в общем случае: имеется m языков, и для каждого набора языков известно, сколько человек знают все языки из этого набора.

Задача 21. В ряд записали 105 единиц, поставив перед каждой знак «+». Сначала изменили знак на противоположный перед каждой третьей единицей, затем — перед каждой пятой, а затем — перед каждой седьмой. Найдите значение полученного выражения.

Задача 22. **а)** На полке стоят 10 книг. Сколькими способами их можно переставить так, чтобы ни одна книга не осталась на месте? **б)** А если на месте должны остаться ровно 3 книги?

Листок №4. Целые числа: делимость и остатки 11.2003

Задача 1. Докажите, что Ваше 28-летие будет в такой же день недели, в какой Вы родились.

Определение 1. Пусть n и k — целые числа, $k \neq 0$. Говорят, что n *делится* на k, если найдётся такое целое m, что $n = k \cdot m$. Обозначение: $n \,\vdots\, k$. Говорят ещё, что n *кратно* k или что k *делит* n.

Задача 2. Верно ли, что **а)** если $n \,\vdots\, k$ и $k \,\vdots\, n$, то $n = k$; **б)** если $b \,\vdots\, a$ и $c \,\vdots\, a$, но $d \not\vdots\, a$, то $b + c \,\vdots\, a$, но $b + d \not\vdots\, a$; **в)** если $b \,\vdots\, a$ и $c \,\vdots\, b$, то $c \,\vdots\, a$; **г)** если a и b не делятся на c, то ab не делится на c^2?

Задача 3. Пусть m, n — целые, и $5m + 3n \,\vdots\, 11$. Докажите, что **а)** $6m + 8n \,\vdots\, 11$; **б)** $9m + n \,\vdots\, 11$.

Задача 4. Докажите, что **а)** $\overline{aaa}$ делится на 37; **б)** $\overline{abc} - \overline{cba}$ делится на 99 (где a, b, c — цифры).

Задача 5. **а)** Докажите, что целое число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, кратное 4. **б)** Найдите и докажите признаки делимости на 2, 5, 8, 10.

Задача 6. **а)** Из натурального числа $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ вычли сумму его цифр $a_n + \ldots + a_1 + a_0$. Докажите, что получилось число, делящееся на 9. **б)** Выведите из пункта а) признаки делимости на 3 и на 9.

Задача 7. Докажите, что число, составленное из 81 единицы, делится на 81.

Задача 8. Числа a, b, c, d — натуральные. Обязательно ли число $\dfrac{(a+b+c+d)!}{a!\,b!\,c!\,d!}$ целое?

Задача 9. Докажите, что $m(m+1)(m+2)$ делится на 6 при любом целом m.

Задача 10. Всегда ли делится на $n!$ произведение любых n последовательных целых чисел?

Задача 11. Целые числа a и b различны. Докажите, что $a^n - b^n \vdots a - b$ при любом натуральном n.

Задача 12. Найдите все целые n, при которых число $(n^3 + 3)/(n + 3)$ целое.

Задача 13. Решите в натуральных числах уравнения: **а)** $x^2 - y^2 = 31$; **б)** $x^2 - y^2 = 303$.

Задача 14. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 4 нуля? А ровно на 5 нулей?

Определение 2. Натуральное число $p > 1$ называется *простым*, если оно имеет ровно два натуральных делителя: 1 и p, в противном случае оно называется *составным*.

Задача 15. Докажите, что любое натуральное число, большее 1, либо само простое, либо раскладывается в произведение нескольких простых множителей.

Задача 16. **а)** Даны натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$, большие 1. Придумайте число, которое не делится ни на одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$. **б)** Докажите, что простых чисел бесконечно много. **в)** Докажите, что простых чисел вида $3k + 2$ бесконечно много (k — натуральное).

Задача 17. **а)** Могут ли 100 последовательных натуральных чисел все быть составными? **б)** Найдутся ли 100 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых?

Определение 3. Пусть a и b — целые числа, $b > 0$. *Разделить a на b с остатком* значит найти такие целые числа k (частное) и r (остаток), что $a = kb + r$ и $0 \leqslant r < b$.

Задача 18. Числа a и b — целые, $b > 0$. Отметим на числовой прямой все числа, кратные b. Они разобьют прямую на отрезки длины b. Точка a лежит на одном из них. Пусть kb — левый конец этого отрезка. Докажите, что k — частное, а $r = a - kb$ — остаток от деления a на b.

Задача 19. Докажите, что частное и остаток определены однозначно.

Задача 20. Найдите частные и остатки от деления 2003 на 23, -17 на 4 и $n^2 - n + 1$ на n.

Задача 21. Какой цифрой оканчивается число 14^{14}? А число $14^{(14^{14})}$?

Задача 22. Найдите все такие натуральные k, что $2^k - 1$ делится на 7.

Задача 23. Даны 20 целых чисел, ни одно из которых не делится на 5. Докажите, что сумма двадцатых степеней этих чисел делится на 5.

Задача 24. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 есть простое число или 1.

Задача 25. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два таких числа, что **а)** их разность делится на 51; **б)** их сумма или разность делится на 100.

Задача 26*. Докажите, что из любых n целых чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на n (или одно число, делящееся на n).

Задача 27*. Из чисел 1, 2, 3, ..., 100 выбрали произвольным образом 51 число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

Листок №5. Математическая индукция 10.2003

Определение 1. *Математическая индукция* — это способ доказать бесконечную серию занумерованных натуральными числами утверждений за два хода:
1) *база индукции:* доказываем первое утверждение;
2) *шаг индукции:* доказываем, что при любом натуральном n из n-го утверждения следует $(n+1)$-е.

Задача 1. Докажите, что части, на которые n прямых делят плоскость, можно раскрасить в два цвета, так чтобы соседние части (имеющие общий отрезок или луч) были окрашены в разные цвета.

Задача 2. В компании из k человек ($k \geqslant 4$) у каждого появилась новость, известная лишь ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2k - 4$ разговора все они могут узнать все новости.

Задача 3. Известно, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + 1$ при $n \geqslant 1$. Найдите a_n.

Задача 4. Докажите: модуль суммы любого числа слагаемых не больше суммы модулей слагаемых.

Задача 5. Верна ли теорема: «Если треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный»? Вот её доказательство (нет ли в нём ошибки?):
«1. Если треугольник разбит отрезком на два треугольника, то один из них не остроугольный (ясно).
2. Пусть имеется треугольник, как-то разбитый на n треугольников. Проведём ещё один отрезок, разбив один из маленьких треугольников на два. Получим разбиение на $n+1$ треугольник, причём один из двух новых треугольников будет не остроугольный. По индукции теорема доказана.»

Задача 6. Докажите неравенство Бернулли: $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ при $a \geqslant -1$.

Задача 7. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n прямых?

Задача 8*. На какое максимальное число частей могут разбить пространство n плоскостей?

Задача 9. Докажите, что $2^{5n-2} + 5^{n-1} \cdot 3^{n+1}$ делится на 17 при любом натуральном n.

Задача 10. Докажите для любого натурального n неравенство: $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dots + \dfrac{1}{n^2} \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.

Задача 11. На кольцевой автотрассе стоят несколько машин. Общего количества бензина в этих машинах достаточно для того, чтобы одной машине объехать всю трассу. Докажите, что одна из машин действительно сможет объехать трассу, забирая по дороге бензин у других машин.

Есть разные варианты индукции. Иногда в качестве шага приходится проверять, что n-е утверждение верно, если верны *все* предыдущие. Другой вариант: предположим, что не все утверждения верны. Тогда есть *наименьшее* натуральное n, для которого n-е утверждение неверно. Если из этого выводится противоречие, то все утверждения верны.

Задача 12. Докажите, что уравнение $n^2 = 2m^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Задача 13. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких разных степеней двойки (возможно, включая и нулевую).

Задача 14. Число $x + \dfrac{1}{x}$ — целое. Докажите, что $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ — тоже целое при любом натуральном n.

Задача 15. Докажите, что для любого натурального $n > 3$ число $n!$ можно разложить на два множителя, отношение которых будет не меньше $2/3$ и не больше $3/2$.

Задача 16*. (*Ханойские башни*) Есть детская пирамида с n кольцами и два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но нельзя класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что **а)** можно переложить все кольца на один из пустых стержней; **б)** можно сделать это за $2^n - 1$ перекладываний; **в)** меньшим числом перекладываний не обойтись.

Задача 17*. k воров хотят поделить добычу. Каждый уверен, что он поделил бы добычу на равные части, но остальные ему не верят. Как действовать ворам, чтобы после раздела каждый был уверен, что у него не менее $\frac{1}{k}$ части добычи? Разберите случаи: **а)** $k = 2$; **б)** $k = 3$; **в)** k — любое.

Задача 18*. При каких n гири весом $1, 2, \dots, n$ кг можно разложить на три равные по весу кучи?

Задача 19*. При каких n можно соединить каждые два из данных n сел односторонним маршрутом так, чтобы из любого села в любое другое можно было доехать не более чем с одной пересадкой?

Задача 20*. Двое играют в игру, исход которой не зависит от случая. Игроки ходят по очереди, причём по правилам игра продолжается не более n ходов. Ничьих не бывает. Докажите, что у одного из игроков есть выигрышная стратегия.

Листок №6. Целые числа: алгоритм Евклида 11.2003

Определение 1. Два отрезка называются *соизмеримыми*, если они имеют *общую меру* — третий отрезок, который укладывается в каждом из них целое число раз.

Задача 1. Верно ли, что два отрезка соизмеримы тогда и только тогда, когда найдётся третий отрезок, в котором каждый из двух укладывается целое число раз?

Задача 2. Докажите, что a и b соизмеримы в том и только том случае, когда a и $a+2b$ соизмеримы.

Задача 3. От прямоугольника размерами $a \times b$ мм отрезают квадраты со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, пока это возможно (будем называть это «операцией Евклида»). К оставшемуся прямоугольнику снова применяют операцию Евклида, и т. д.
а) Сколько и каких квадратов получится, если $a = 324$ мм, $b = 141$ мм?
б) Докажите: если a и b соизмеримы, то прямоугольник разрежут на конечное число квадратов;
в) Докажите, что если в итоге прямоугольник разрежут на конечное число квадратов, то стороны прямоугольника соизмеримы, и сторона самого маленького квадрата является их общей мерой;
г) Докажите, что в пункте в) сторона последнего квадрата является *наибольшей* общей мерой сторон прямоугольника, и любая другая их общая мера укладывается в ней целое число раз.

Задача 4. От прямоугольника отрезали квадрат и получили прямоугольник, подобный исходному.
а) Найдите отношение сторон исходного прямоугольника. **б)** Соизмеримы ли его стороны?

Определение 2. *Наибольшим общим делителем* целых чисел a и b называется наибольшее целое число, делящее и a и b. Обозначение: (a, b). Если $(a, b) = 1$, то a и b называют *взаимно простыми*.

Задача 5. Для каких целых a, b число (a, b) существует (и единственно)?

Задача 6. Докажите, что $(a, b) = (a - b, b) = (r, b)$, где r — остаток от деления a на b.

Задача 7. Найдите возможные значения **а)** $(n, 12)$; **б)** $(n, n+1)$; **в)** $(2n+3, 7n+6)$; **г)** $(n^2, n+1)$.

Задача 8. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размерами $a \times b$ клеток (стороны лежат на линиях сетки). На сколько частей делят его диагональ **а)** узлы сетки; **б)** линии сетки?

Задача 9. Даны целые числа $a > b > 0$. *Алгоритм Евклида* можно описать так: делим a на b, получаем остаток $r_1 < b$, затем делим b на r_1, получаем остаток $r_2 < r_1$, делим r_1 на r_2, получаем остаток $r_3 < r_2$, и т. д. Докажите, что какой-то остаток r_{n-1} разделится нацело на r_n, и $r_n = (a, b)$.

Задача 10. Найдите **а)** $(525, 231)$; **б)** $(7\,777\,777, 7\,777)$; **в)** $(10946, 17711)$; **г)*** $(2^m - 1, 2^n - 1)$.

Задача 11. **а)** В обозначениях задачи 9 докажите, что каждое из чисел r_1, r_2, … можно представить в виде $ax + by$, подобрав подходящие целые x и y.
б) Как с помощью алгоритма Евклида найти такие целые числа x и y, что $ax + by = (a, b)$?

Задача 12. Числа a, b и c целые, $(a, b) = 1$. Докажите, что если $ac \,\vdots\, b$, то $c \,\vdots\, b$.

Задача 13. Найдите наибольшую общую меру отрезков длиной 15/28 мм и 6/35 мм.

Задача 14. Решите в целых числах x, y уравнения **а)** $12x = 42y$; **б)** $ax + by = 0$, где $(a, b) = d$.

Задача 15. **а)** Докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых числах x, y если и только если $c \,\vdots\, (a, b)$. **б)** Как найти одно из решений? **в)** Зная одно решение, найдите остальные.

Задача 16. Решите в целых числах x, y: **а)** $17x+23y = 36$; **б)** $nx+(2n-1)y = 3$; **в)** $525x-231y = 42$.

Задача 17. По окружности длины a см катится колесо длины b см (a и b натуральные, $(a, b) = d$). В колесо вбит гвоздь, он оставляет отметки на окружности. Сколько отметок оставит гвоздь?

Задача 18. Синим на числовой оси отметили числа, дающие при делении на 24 остаток 17, белым — дающие при делении на 40 остаток 7. Найти наименьшее расстояние между белой и синей точками.

Задача 19*. Даны m целых чисел. За один ход разрешается прибавить по единице к любым n из них. При каких m и n всегда можно за несколько таких ходов сделать числа одинаковыми?

Задача 20*. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что уравнение $ax + by = c$

а) при любом целом c имеет такое решение в целых числах x и y, что $0 \leqslant x < b$;
б) имеет решение в целых неотрицательных числах x и y, если c целое, большее $ab-a-b$;
в) при целых c от 0 до $ab-a-b$ ровно в половине случаев имеет целое неотрицательное решение, причём если для $c = c_0$ такое решение есть, то для $c = ab-a-b-c_0$ таких решений нет.

Листок №7. **Простые числа. Основная теорема арифметики** 11.2003

Задача 1. **а)** (*Решето Эратосфена*) Выпишем в ряд целые числа от 2 до n. Подчеркнём число 2 и сотрём числа, делящиеся на 2. Первое неподчёркнутое число подчеркнём и сотрём теперь числа, делящиеся на него, и т. д. Будем действовать так, пока все числа от 2 до n не будут либо подчёркнуты, либо стерты. Докажите, что мы подчеркнём в точности простые числа от 1 до n. **б)** Пусть очередное число, которое мы хотим подчеркнуть, больше $\sqrt{n}$. Докажите, что нестёртые к этому моменту числа от 2 до n простые. **в)** Найдите все простые числа, меньшие 100.

Задача 2. (*Основная теорема арифметики*) Докажите следующие утверждения:

а) если p — простое число, a и b — целые, и $ab \,\vdots\, p$, то либо $a \,\vdots\, p$, либо $b \,\vdots\, p$;
б) для каждого целого $n > 1$ найдутся такие простые $p_1, \ldots, p_k$, что $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$;
в) (*каноническое разложение*) Для каждого целого $n > 1$ найдутся такие различные простые $p_1, \ldots, p_k$ и натуральные $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$;
г) разложения из пунктов б) и в) единственны с точностью до порядка сомножителей.

Задача 3. Назовём чётное число n *чётнопростым*, если n не раскладывается в произведение двух чётных чисел. (Например, 6 — чётнопростое, а 12 — нет.) Какие пункты задачи 2 будут верны, если заменить в условии целые числа на чётные, а простые — на чётнопростые?

Задача 4. Числа a, b, c, n натуральные, $(a,b) = 1$, $ab = c^n$. Найдется ли такое целое x, что $a = x^n$?

Задача 5. Решите в натуральных числах уравнение $x^{42} = y^{55}$.

Задача 6. Найдите каноническое разложение числа **а)** 2004; **б)** 17!; **в)** C_{20}^{10}.

Задача 7. **а)** (*Теорема Лежандра*) Докажите, что простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$ в степени $[n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \ldots$ (где $[x]$ — это *целая часть* числа x). С какого момента слагаемые в этой сумме станут равными нулю?
б) Сколько у 2000! нулей в конце его десятичной записи? **в)** Может ли $n!$ делиться на 2^n $(n \geqslant 1)$?

Задача 8. Число p простое. Докажите, что C_p^k делится на p, если k — целое и $0 < k < p$.

Задача 9. (*Малая теорема Ферма*) Пусть p — простое число, n — целое число. Докажите, что **а)** $n^p - n$ делится на p; **б)** если $(n,p) = 1$, то $n^{p-1} - 1$ делится на p.

Задача 10*. **а)** Числа p и q простые, $2^p - 1 \,\vdots\, q$. Докажите, что $q - 1 \,\vdots\, p$. **б)** Простое ли $2^{13} - 1$?

Задача 11*. Может ли быть целым число **а)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n}$; **б)** $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{1}{2n+1}$?

Определение 1. *Наименьшим общим кратным* ненулевых целых чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое делится на a и на b. Обозначение: $[a,b]$.

Задача 12. Докажите, что $[a,b]$ существует и единственно для любых ненулевых целых a и b.

Задача 13. **а)** Пусть известны канонические разложения двух натуральных чисел a и b. Как по этим разложениям найти (a,b) и $[a,b]$? **б)** Найдите $[192, 270]$.

Задача 14. Верно ли, что **а)** $[ca, cb] = c[a,b]$ при $c > 0$; **б)** $[a,b]/a$ и $[a,b]/b$ взаимно просты?

Задача 15. Докажите, что любое общее кратное целых чисел a и b делится на $[a,b]$.

Задача 16. Докажите, что $ab = (a,b) \cdot [a,b]$ для любых натуральных чисел a и b.

Задача 17. Про натуральные числа a и b известно, что $(a,b) = 15$, $[a,b] = 840$. Найдите a и b.

Задача 18. Найдите все натуральные числа с нечётным числом натуральных делителей.

Задача 19. Число n натуральное. Докажите, что у n меньше чем $2\sqrt{n}$ натуральных делителей.

Задача 20. Пусть $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n, и пусть $\tau(n)$ и $S(n)$ — соответственно количество и сумма натуральных делителей числа n.
а) Найдите $\tau(p_1^{\alpha_1})$. **б)** Верно ли, что $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$, если $(a, b) = 1$? **в)** Найдите $\tau(n)$. **г)** Найдите $S(p_1^{\alpha_1})$. **д)** Верно ли, что $S(ab) = S(a)S(b)$, если $(a, b) = 1$? **е)** Найдите $S(n)$.

Задача 21. Какие натуральные числа делятся на 30 и имеют ровно 20 натуральных делителей?

Задача 22*. Число n натуральное.Докажите, что количество упорядоченных пар натуральных чисел $(u; v)$, где $[u, v] = n$, равно количеству натуральных делителей у числа n^2.

Задача 23*. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, меньших его самого. Докажите, что чётное число n совершенно тогда и только тогда, когда найдется такое простое p, что $2^p - 1$ также простое, и $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

Листок №8. Множества и отображения 01.2004

Множество целиком определяется элементами, из которых оно состоит. Если элемент a принадлежит множеству A, пишут $a \in A$. Множество иногда записывают, перечисляя в фигурных скобках через запятую его элементы, например, $\{2, 5\}$ — множество, состоящее из элементов 2 и 5. Для многих множеств есть стандартные обозначения, например, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Множество можно задавать каким-нибудь свойством, которому должны удовлетворять его элементы, например, $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \text{ делится на } 2\}$ — множество чётных чисел.

Определение 1. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A содержится в множестве B. Обозначение: $A \subset B$.

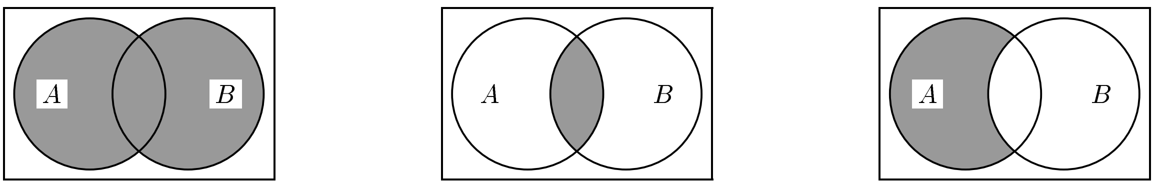
Задача 1. Для каждых двух из следующих множеств укажите, является ли одно из них подмножеством другого: $\{1, 2\}$, $\{\{1, 2\}, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$, $\{\{2, 1\}\}$.

Определение 2. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*. Обозначение: $\varnothing$.

Задача 2. Совпадают ли множество целых чисел, которые делятся и на 5 и на 7, но не делятся на 35, и множество прямоугольных треугольников с длиной гипотенузы 6 см и площадью 10 см^2?

Задача 3. **а)** Сколько подмножеств у множества из n элементов?
б) Пусть в множестве A содержится n элементов, а в его подмножестве B содержится k элементов. Сколько существует множеств C, для которых $B \subset C \subset A$?

Определение 3. *Объединением* множеств A и B называют множество, состоящее из всех таких x, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B (т. е. $x \in A$ или $x \in B$). Обозначение: $A \cup B$. *Пересечением* множеств A и B называют множество, состоящее из всех таких x, что $x \in A$ и $x \in B$. Обозначение: $A \cap B$. *Разностью* множеств A и B называют множество, состоящее из всех таких x, что $x \in A$ и $x \notin B$. Обозначение: $A \setminus B$. Изображать объединение, пересечение и разность удобно с помощью *кругов Эйлера*:



Задача 4. Пусть $A = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Найдите $A \cap B$ и $B \setminus A$.

Задача 5. Верно ли, что для любых множеств A, B и C
а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; **б)** $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$; **в)** $A \setminus B = C \Leftrightarrow A = B \cup C$?

Задача 6. Докажите[1)] тождества для любых множеств A, B и C:
а) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; **б)** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; **в)** $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Определение 4. *Отображением* f из множества X в множество Y называется соответствие, при котором каждому элементу x множества X ставится в соответствие ровно один элемент y множества Y (он называется *образом* x при отображении f и обозначается $f(x)$). Обозначение: $f\colon X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$.

Задача 7. Какие из следующих соответствий задают отображения между множествами X и Y?
а) X — множество точек декартовой плоскости, Y — множество точек оси абсцисс, точке плоскости ставится в соответствие абсцисса этой точки.
б) $X = Y = \mathbb{N}$, числу $x \in X$ ставится в соответствие число x^2.
в) $X = Y = \mathbb{Z}$, число $y \in Y$ ставится в соответствие тем числам $x \in X$, для которых $|x| = |y|$.
г) $X = Y = \mathbb{R}$, число $y \in Y$ ставится в соответствие тем числам $x \in X$, для которых $x^3 = y$.
д) $X = Y = \mathbb{R}$, числу $x \in X$ ставится в соответствие одно такое число $y \in Y$, что $x = y^2$.

Определение 5. Пусть $f\colon X \to Y$ и $y \in Y$. Всякий элемент $x \in X$, такой что $f(x) = y$, называется *прообразом* элемента y при отображении f.

Задача 8. Для каждого отображения из задачи 7 найдите все прообразы каждого элемента $y \in Y$.

Задача 9. **а)** Найдите все отображения из множества $\{0, 1, 2\}$ в множество $\{0, 1\}$ (их удобно рисовать, стрелочками обозначая, какой элемент в какой переходит, смотрите пример на рис. 1.5).
б) Сколько есть отображений из n-элементного множества в m-элементное?

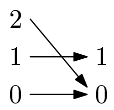


Рис. 1.5.

Определение 6. *Композицией отображений* $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ называется отображение, сопоставляющее элементу x множества X элемент $g(f(x))$ множества Z. Обозначение: $g \circ f$.

Задача 10. Докажите, что для произвольных отображений $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ и $h\colon Z \to W$ выполняется равенство $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Задача 11. Найдите $g \circ f$, если
а) g и f — повороты плоскости относительно одной и той же точки O на углы α и β соответственно.
б) g и f — симметрии плоскости относительно двух параллельных прямых l_1 и l_2 соответственно.
в) g и f — симметрии плоскости относительно двух непараллельных прямых l_1 и l_2 соответственно.

Определение 7. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *взаимно однозначным*, если для каждого $y \in Y$ найдётся ровно один $x \in X$, такой что $f(x) = y$.

Задача 12. Какие из отображений задачи 7 взаимно однозначны?

Задача 13. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие того, что между двумя конечными множествами существует взаимно однозначное соответствие.

Задача 14. Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Верно ли, что если f и g взаимно однозначны, то и $g \circ f$ взаимно однозначно?

Задача 15. Пусть $f\colon X \to Y$ — взаимно однозначное отображение. Докажите, что существует и единственно такое отображение $g\colon Y \to X$, что $g(f(x)) = x$ при любом $x \in X$ и $f(g(y)) = y$ при любом $y \in Y$. Его называют *обратным к* f. Обозначение: f^{-1}.

Задача 16. Найдите обратные к тем отображениям задачи 7, которые взаимно однозначны.

Задача 17. Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что количество чётных делителей этого числа равно количеству его нечётных делителей.

Задача 18. Каких треугольников с целыми сторонами больше:

[1)]Указание: множества X и Y совпадают, если каждый элемент множества X принадлежит множеству Y, и наоборот.

а) тех, периметр которых равен 2002, или тех, периметр которых равен 2005?
б) тех, периметр которых равен 2003, или тех, периметр которых равен 2006?

Задача 19. Даны три множества: $\mathbb{N}$, множество четных натуральных чисел и множество натуральных чисел без числа 3. Про каждые два из этих множеств выясните, существует ли взаимно однозначное отображение из первого во второе.

Задача 20. Докажите, что между следующими множествами точек на прямой есть взаимно однозначное отображение: **а)** любые два отрезка; **б)** любые два интервала.

Листок №9. Бесконечные множества 01.2004

Определение 1. Множество X называется *счётным*, если существует взаимно однозначное отображение $f\colon X \to \mathbb{N}$. Говорят, что X *не более чем счётно,* если X пусто, конечно или счётно.

Задача 1. Верно ли, что X счётно, если существует взаимно однозначное отображение $f\colon \mathbb{N} \to X$?

Задача 2. Докажите, что следующие множества счётны: **а)** $\mathbb{Z}$; **б)** $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ делится на $9\}$.

Задача 3. **а)** Докажите, что подмножество счётного множества или конечно, или счётно.
б) Докажите, что если A и B — счётные множества, то $A \cup B$ тоже счётно.
в) Докажите, что конечное объединение счётных множеств счётно.
г) Докажите, что счётное объединение счётных множеств счётно.
д) Верно ли, что счётное объединение конечных множеств всегда счётно?

Задача 4. Докажите, что счётно **а)** множество точек плоскости, координаты которых — целые числа; **б)** множество $\mathbb{Q}$; **в)** множество пар $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$, где A и B счётны.

Задача 5*. Найдите алгебраическое выражение от двух переменных x и y, задающее взаимно однозначное соответствие между множеством неотрицательных целых чисел и множеством точек плоскости, координаты которых — неотрицательные целые числа.

Задача 6. Докажите, что счётно **а)** множество конечных последовательностей из 0 и 1;
б) множество предложений русского языка; **в)** множество конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$.

Задача 7. Счётно ли **а)** множество точек плоскости, обе координаты которых рациональны;
б) множество всех треугольников на плоскости, координаты вершин которых рациональны;
в) множество всех многоугольников на плоскости, координаты вершин которых рациональны?

Задача 8. Счётно ли любое бесконечное множество непересекающихся
а) интервалов длины более 1 на прямой; **б)** интервалов на прямой; **в)** кругов на плоскости; **г)** восьмёрок на плоскости (восьмёрка — это две касающиеся (внешним образом) окружности; восьмерки могут быть разных размеров); **д)*** букв «Т» (любых размеров) на плоскости?

Определение 2. Множества X и Y называются *равномощными*, если существует взаимно однозначное отображение $f\colon X \to Y$. Обозначение: $|X| = |Y|$.

Задача 9. Докажите следующие утверждения:
а) $|X| = |X|$; **б)** если $|X| = |Y|$, то $|Y| = |X|$; **в)** если $|X| = |Y|$ и $|Y| = |Z|$, то $|X| = |Z|$.

Задача 10. **а)** Докажите, что в любом бесконечном множестве найдется счётное подмножество.
б) Докажите, что множество M является бесконечным тогда и только тогда, когда оно равномощно множеству, полученному из M удалением одного элемента.

Задача 11. Равномощны ли следующие множества точек: **а)** интервал и отрезок; **б)** полуокружность (без концов) и прямая; **в)** интервал и прямая; **г)** любые два круга; **д)** квадрат[2] и плоскость; **е)** квадрат и круг; **ж)** отрезок и счётное объединение множеств, равномощных отрезку?

Задача 12. Докажите, что множество S бесконечных последовательностей из 0 и 1, множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ и множество бесконечных вправо и вверх таблиц из 0 и 1 равномощны.

[2] Квадрат в этом листке — это квадрат с внутренностью, например множество точек (x, y), где $0 \leqslant x, y \leqslant 1$.

Задача 13. **а)** Дана бесконечная вправо и вниз таблица из 0 и 1. Покажите, как по этой таблице составить бесконечную строку из 0 и 1, которая не совпадёт ни с одной из строк таблицы. (Указание: надо, чтобы новая строка отличалась от каждой строки таблицы хотя бы в одном месте.)
б) Докажите, что множество S из задачи 12 *несчётно:* бесконечно, но не является счётным.

Задача 14*. Докажите, что множество точек любого отрезка I равномощно **а)** множеству S задачи 12; **б)** множеству точек квадрата $I \times I$ (множеству пар (x, y), где x, y — любые точки из I).

Задача 15*. (*Теорема Кантора–Бернштейна*) Если множество A равномощно подмножеству множества B и множество B равномощно подмножеству множества A, то A и B равномощны.

Задача 16*. Докажите, что любой круг и любое круговое кольцо на плоскости равномощны.

Задача 17*. **а)** Квадрат представлен в виде объединения двух множеств. Докажите, что одно из них равномощно отрезку. **б)** Та же задача, но вместо квадрата — отрезок.

Задача 18*. Докажите, что множества задачи 12 равномощны **а)** множеству взаимно однозначных отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$; **б)** множеству бесконечных последовательностей натуральных чисел.

Задача 19*. Может ли множество быть равномощно множеству всех своих подмножеств?

Листок №10. **Неравенства и оценки** 02.2004

Задача 1. Что больше: **а)** 5^{15} или 15^5; **б)** 2^{100} или 10^{30}; **в)** 7^8 или 8^7; **г)** 3^{500} или 7^{300}?

Задача 2. **а)** Число x изменили не более, чем на 0,1. Могло ли при этом значение x^2 измениться более, чем на 10? **б)** Тот же вопрос для значения $\sqrt{x}$.

Задача 3. **а)** Докажите, что $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$ при $a > 0$. **б)** Каково наименьшее значение $a + \dfrac{9}{a}$ при $a > 0$?

Задача 4. Найдите первые девять знаков после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{0{,}999999999}$.

Задача 5. Десятичная запись числа $a \in \mathbb{N}$ состоит из n цифр. **а)** Сколько цифр может быть в десятичной записи числа a^3? **б)** Десятичная запись a^3 состоит из k цифр. Возможно ли, что $n + k = 2005$?

Задача 6. В банк кладут 1000 рублей. В каком случае спустя 10 лет получат больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы раз в год или если он начисляет (5/12)% раз в месяц?

Задача 7. Докажите, что при всех натуральных n и при всех неотрицательных a выполнены неравенства **а)** (*неравенство Бернулли*) $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$; **б)** $(1 + a)^n \geqslant 1 + an + a^2n(n - 1)/2$.

Задача 8. Укажите такое целое $n > 1$, что **а)** $1{,}001^n > 10^5$; **б)** $0{,}999^n < 10^{-5}$; **в)*** $\sqrt[n]{n} < 1{,}001$.

Определение 1. Говорят, что неравенство выполнено «при всех достаточно больших n» или «при n много больше нуля», если найдётся такое число k, что это неравенство выполнено при всех $n > k$. Обозначение: неравенство выполнено при $n \gg 0$.

Задача 9. **а)** Докажите: $n^n > 10^6 \cdot n!$ при $n \gg 0$. **б)** Можно ли заменить 10^6 на любое другое число?

Задача 10. Докажите, что если $a > 1$ и C — любое, то **а)** $a^n > C$ при $n \gg 0$; **б)** $a^n > n$ при $n \gg 0$.

Задача 11. **а)** Докажите, что $0{,}001n^2 > 100n + 57$ при $n \gg 0$.
б) Число C — любое, n и m — натуральные, причём $n > m$. Докажите, что $x^n > Cx^m$ при $x \gg 0$.
в) Дан многочлен $P(x) = p_kx^k + p_{k-1}x^{k-1} + \dots + p_1x + p_0$, где $p_k > 0$. Верно ли, что $P(x) > 0$ при $x \gg 0$?

Задача 12. Верно ли, что **а)** $1{,}01^n > 100n$ при $n \gg 0$; **б)** если $a > 1$, $C > 0$, то $a^n > Cn$ при $n \gg 0$?

Определение 2. Говорят, что задана *последовательность* (x_n) чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$, если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n. Другими словами, *последовательность* — это любая числовая функция, определённая на множестве натуральных чисел.

Задача 13. **а)** Пусть $q > 1$, и последовательность положительных чисел (x_n) такова, что $x_{n+1}/x_n > q$ при $n \gg 0$. Докажите, что $x_n > 1$ при $n \gg 0$. **б)** Верно ли утверждение пункта а), если $q = 1$?

Задача 14. Докажите, что при натуральных $n \gg 0$ **а)** $2^n > n^{100}$; **б)** если $a > 1$ и $k \in \mathbb{N}$, то $a^n > n^k$.

Задача 15. Докажите, что для любого a неравенство $n! > a^n$ выполнено при $n \gg 0$.

Задача 16. **а)** Докажите, что $1/(n+1) + 1/(n+2) + \cdots + 1/2n \geqslant 1/2$ при любом $n \in \mathbb{N}$.
б) (*Гармонический ряд*) Для любого ли числа C найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что будет выполнено неравенство $1 + 1/2 + \cdots + 1/n \geqslant C$? **в)** Тот же вопрос для неравенства $1/1^2 + 1/2^2 + \cdots + 1/n^2 \geqslant C$.

Задача 17*. Есть неограниченное число одинаковых кирпичей в форме прямоугольного параллелепипеда. Кирпичи кладут друг на друга со сдвигом так, чтобы они не падали (см. рис. 1.6). «Крышу» какой наибольшей длины можно так получить?

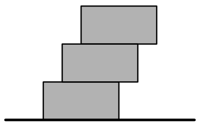


Рис. 1.6.

Задача 18. Докажите для $n \in \mathbb{N}$: **а)** $a^{n+1}/b^n \geqslant (n+1)a - nb$, если $a, b > 0$; **б)** $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \geqslant (1 + \frac{1}{n})^n$; **в)** $(1 + \frac{1}{n-1})^n \geqslant (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$; **г)** $2 \leqslant (1 + \frac{1}{n})^n \leqslant 4$; **д)*** (*неравенство Коши*) $(a_1 + \ldots + a_n)/n \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$, если числа $a_1, \ldots, a_n$ положительны; **е)*** $(n/4)^n \leqslant n! \leqslant ((n+1)/2)^n$; **ж)*** $(1 + \frac{1}{n})^n \leqslant 3$.

Задача 19. Пусть $P(x) = x^{n_1} - x^{n_2} + x^{n_3} - x^{n_4} + \cdots + x^{n_{2k+1}}$, где $n_1 > n_2 > \cdots > n_{2k+1}$ — набор натуральных чисел. Докажите что $P(x) \geqslant 0$ при всех $x > 0$.

Задача 20. Решите в натуральных числах: **а)** $a! + b! + c! = d!$; **б)** $x + y + z = xyz$; **в)** $x^2 + 3x = y^2$.

Задача 21. Описанный около круга квадрат разбили на 100×100 равных квадратиков и закрасили квадратики, не выходящие за пределы круга. Докажите, что площадь получившейся закрашенной фигуры составляет не менее 94% от площади всего круга.

Задача 22*. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.

Задача 23*. Коэффициенты p и q квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ изменили не больше, чем на 0,01. Мог ли больший корень уравнения измениться больше, чем на 100?

Задача 24*. Найдётся ли такое целое n, что первые 9 знаков после запятой в десятичной записи числа $\{\sqrt{n}\}]$ будут 987654321? ($\{x\} = x - [x]$ — дробная часть x.)

Листок №11. Логика 03.2004

Задача 1. За день до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня Петин кот чихнул. «Завтра будет дождь», — подумал Петя. Прав ли он?

Задача 2. В парламенте некой страны 100 депутатов. Каждый депутат либо честный, либо продажный. Известно, что среди любых двух депутатов хотя бы один — продажный. Сколько честных?

Задача 3. Три человека — A, B и C — обладают абсолютными логическими способностями. Кроме того, каждый из них знает, что двое других мыслят абсолютно логично. Этой троице показали 7 марок: 2 красных, 2 зелёных и 3 синих. Затем всем троим завязали глаза и наклеили на лоб по марке, а остальные марки спрятали. После того, как повязки с глаз были сняты, у A спросили: «Можете ли вы назвать хотя бы один цвет, которого на вас наверняка нет?», и A ответил: «Нет». Когда тот же вопрос задали B, он тоже ответил: «Нет». Про кого из A, B и C можно сказать, какая на нём марка?

Задача 4. Двум гениальным математикам сообщили по натуральному числу, сказав, что эти числа различаются на 1. После этого они по очереди задают друг другу один и тот же вопрос: «Знаешь ли ты моё число?» (отвечают только «да» или «нет»). Сможет ли каждый из математиков узнать оба числа?

Задача 5. Каждый туземец с острова Амба — либо честный, либо лжец. Честные изрекают только истинные высказывания, лжецы — только ложные.

а) Вам навстречу идут двое туземцев. На вопрос «Вы — честный?» первый из них буркает что-то неразборчивое. Второй туземец приходит Вам на помощь: «Мой друг ответил «да». Но верить ему не стоит — он лжец». Что вы можете сказать про этих туземцев?

б) Один из следующей пары туземцев говорит: «Я лжец или мой друг лжец». Ваши выводы?

в) Что вы подумаете, услышав высказывание: «Я лжец и мой друг лжец»?

г) А услышав: «Если я честный, то мой друг лжец»?

Определение 1. Назовём *высказыванием* любое повествовательное предложение, которое либо истинно, либо ложно. Если A и B — некоторые высказывания, то можно определить следующие высказывания: «не A» (обозначение $\overline{A}$) — *отрицание* высказывания A, истинно если и только если A ложно;
«A и B» (обозначение $A \wedge B$) — *конъюнкция* A и B, истинно если и только если и A, и B истинны;
«A или B» ($A \vee B$) — *дизъюнкция* A и B, истинно если и только если хотя бы одно из A и B истинно;
«если A, то B» (обозначение $A \to B$), истинно если и только если A ложно или и A, и B истинны.

Задача 6. Выразите **а)** $A \to B$; **б)** $A \wedge B$ через A и B, используя только дизъюнкцию и отрицание.

Задача 7. Выразите **а)** $\overline{A \to B}$; **б)** $A \vee B$ через A и B, используя только конъюнкцию и отрицание.

Задача 8*. Докажите, что высказывание, истинность которого зависит только от истинности высказываний $A_1, \ldots, A_n$, выражается через них с помощью только дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Задача 9. Назовём контрольную лёгкой, если за каждой партой найдётся ученик, решивший все задачи. Дайте определение трудной (т. е. не являющейся лёгкой) контрольной, не используя частицы «не».

Задача 10. Рассмотрим два определения лёгкой контрольной:

I. *В каждом варианте каждую задачу решил хотя бы один ученик.*

II. *В каждом варианте хотя бы один ученик решил все задачи.*

Может ли контрольная быть лёгкой в смысле определения I и трудной в смысле определения II?

Задача 11. Солдату-цирюльнику пришел приказ: брить тех солдат его взвода, которые не бреются сами (а остальных не брить). Сможет ли он его выполнить?

Задача 12. Являются ли следующие утверждения истинными или ложными:

Утверждение в рамке ложно

Утверждение в двойной рамке истинно

Задача 13*. (*Истинное происшествие*) Н.Н.Константинов сказал участникам своего семинара: «В январе занятия проходят 13, 17, 20, 24, 27 и 31 числа. В один из этих дней вам будет предложена контрольная работа на логическую тему, но в какой именно день, вы накануне знать ещё не будете.»

а) Докажите, что эта контрольная не могла быть предложена 31 января.

б) Докажите, что эта контрольная не могла быть предложена 27 января.

в) Докажите, что эта контрольная не могла быть предложена 20 января.

г) Однако 20 января эта контрольная состоялась (кстати говоря, единственную задачу этой контрольной вы сейчас читаете). Ясное дело, накануне ни один участник семинара об этом не знал. Как это совместить с решением предыдущих пунктов задачи?

Листок №12. Последовательности 04.2004

Определение 1. Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху*, если найдётся такое число C, что при всех натуральных n будет выполнено неравенство $x_n < C$.

Задача 1. **а)** Дайте определение последовательности, ограниченной снизу.

б) Докажите, что (x_n) *ограничена* (т. е. ограничена и сверху и снизу) тогда и только тогда, когда найдётся такое число $C > 0$, что при всех натуральных n будет выполнено неравенство $|x_n| < C$.

Задача 2. Придумайте ограниченную последовательность, у которой **а)** есть и наибольший, и наименьший член; **б)** есть наибольший, но нет наименьшего члена; **в)** есть наименьший, но нет наибольшего члена; **г)** нет ни наименьшего, ни наибольшего члена.

Задача 3. Найти наибольший член последовательности: **а)** $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$; **б)** $y_n = \dfrac{n}{100+n^2}$; **в)** $z_n = \dfrac{1000^n}{n!}$.

Задача 4. Найти наименьший член последовательности: **а)** $x_n = n^2-5n+1$; **б)** $y_n = n+5\sin\dfrac{\pi n}{2}$.

Задача 5. Перепишите, не используя отрицания: «(x_n) не является ограниченной».

Задача 6. При каких q последовательность $x_n = 1+q+q^2+\ldots+q^n$ является ограниченной?

Определение 2. Сумма последовательностей (x_n) и (y_n) — последовательность (z_n), где $z_n = x_n+y_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Аналогично определяют разность, произведение, отношение двух последовательностей.

Задача 7. Верно ли, что **а)** сумма; **б)** разность; **в)** произведение; **г)** отношение ограниченных последовательностей — ограниченная последовательность?

Определение 3. Последовательность (x_n) называется *бесконечно малой*, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что при любом натуральном $n \geqslant N$ будет выполнено неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

Задача 8. Для последовательности (x_n) найдите по данному числу $\varepsilon > 0$ какой-нибудь номер N, начиная с которого верно, что $|x_n| < \varepsilon$, если **а)** $x_n = \dfrac{1}{n}$; **б)** $x_n = \dfrac{2}{n^3}$; **в)** $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$; **г)** $x_n = \dfrac{1}{2n^2+n}$.

Задача 9. Известно, что последовательности (x_n) и (y_n) бесконечно малые. Составим последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$ Будет ли эта последовательность бесконечно малой?

Задача 10. Докажите, что сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей — бесконечно малая последовательность.

Задача 11. Последовательности (x_n) и (y_n) бесконечно малые, а последовательность (z_n) такова, что $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ при всех натуральных n. Докажите, что последовательность (z_n) бесконечно малая.

Задача 12. Является ли бесконечно малой последовательность **а)** $x_n = \dfrac{\cos n - 0,5^n}{n+7}$; **б)** $y_n = \dfrac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$?

Задача 13. Дана последовательность (x_n) с положительными членами. Верно ли, что (x_n) бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $(\sqrt{x_n})$ бесконечно малая?

Задача 14. Даны две последовательности: (x_n) — бесконечно малая, а (y_n) — ограниченная. Докажите, что (x_n+y_n) — ограниченная последовательность, а (x_ny_n) — бесконечно малая последовательность.

Задача 15. В бесконечно малой последовательности (x_n) переставили члены (то есть взяли какое-то взаимно однозначное соответствие $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и получили новую последовательность (y_n), где $y_n = x_{f(n)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$). Обязательно ли полученная последовательность будет бесконечно малой?

Задача 16. Последовательность состоит из положительных членов, причём сумма любого количества её членов не превосходит 1. Докажите, что эта последовательность бесконечно малая.

Определение 4. Последовательность (x_n) называется *бесконечно большой*, если для любого числа $C > 0$ найдётся такое число k, что при всех натуральных n, больших k, будет верно неравенство $|x_n| > C$.

Задача 17. Последовательность не является ограниченной. Обязательно ли она бесконечно большая?

Задача 18. Запишите без отрицания: (x_n) не является **а)** бесконечно малой; **б)** бесконечно большой.

Задача 19. Какие из последовательностей ограничены, какие — бесконечно малые, а какие — бесконечно большие: **а)** $x_n = (1,1)^n$; **б)** $y_n = (0,9)^n$; **в)** $z_n = \sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3}$; **г)** $t_n = \sqrt[n]{n!}$; **д)** $s_n = \dfrac{n^5+1}{n^4+n^2}$?

Задача 20. Верно ли, что последовательность (x_n) с ненулевыми членами бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $(1/x_n)$ бесконечно большая?

Задача 21. Одна последовательность бесконечно большая, а другая бесконечно малая. Что можно сказать **а)** о сумме; **б)** об отношении; **в)** о произведении этих последовательностей?

Задача 22. Любую ли последовательность можно представить как отношение
а) двух ограниченных; **б)** двух бесконечно малых последовательностей?

Задача 23. Есть ли последовательность, члены которой найдутся в любом интервале числовой оси?

Задача 24. Для каждого натурального n пусть x_n — сумма чисел вида $1/k$, где k — натуральное, $1 \leqslant k \leqslant n$ и в десятичной записи числа k нет цифры 9. Ограничена ли последовательность (x_n)?

Листок №13. Предел последовательности 04.2004

Задача 1. В два сосуда разлили (не поровну) 1 л воды. Из 1-го сосуда перелили половину имеющейся в нём воды во 2-й, затем из 2-го перелили половину оказавшейся в нём воды в 1-й, снова из 1-го перелили половину во 2-й, и т. д. Сколько воды (с точностью до 1 мл) будет в 1-м сосуде после 50 переливаний?

Определение 1. Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если (x_n) можно представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где (α_n) — бесконечно малая последовательность. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Говорят также, что (x_n) *стремится к a при n, стремящемся к бесконечности* (и пишут $x_n \to a$ при $n \to \infty$).

Задача 2. Докажите, что последовательность не может иметь более одного предела.

Задача 3. Найдите предел (x_n) (если он существует): **а)** $x_n = 1+(-0,1)^n$; **б)** $x_n = \dfrac{n}{n+1}$; **в)** $x_n = (-1)^n$; **г)** $x_n = (2^n-1)/(2^n+1)$; **д)** $x_n = 1 + 0,1 + \ldots + (0,1)^n$; **е)** $x_n = (1+3+\ldots+3^n)/5^n$; **ж)** $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Определение 2. *ε-окрестность* точки a (где $\varepsilon > 0$) — это интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Обозначение: $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$.

Задача 4. Докажите, что любые две точки на прямой имеют непересекающиеся окрестности.

Определение 3. Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если для каждого $\varepsilon > 0$ в ε-окрестности числа a содержатся *почти все* члены (x_n) (то есть все, кроме конечного числа).

Определение 4. Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что при любом натуральном $k > N$ будет выполнено неравенство $|x_k - a| < \varepsilon$.

Задача 5. Докажите эквивалентность определений 1, 3 и 4.

Задача 6. Запишите, не используя отрицания: **а)** «число a не является пределом (x_n)»; **б)** «(x_n) не имеет предела».

Задача 7. Предел (x_n) положителен. Верно ли, что все члены (x_n), начиная с некоторого, положительны?

Задача 8. Последовательность (x_n) имеет предел a. **а)** Обязательно ли (x_n) ограничена?
б) Пусть $a > 0$ и все члены (x_n) положительны. Докажите, что последовательность $(1/x_n)$ ограничена.

Задача 9. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Докажите: **а)** $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = ab$; **в)** если $b \neq 0$ и все элементы последовательности (y_n) отличны от нуля, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n) = a/b$.

Задача 10. Найдите предел (x_n) (если он существует): **а)** $x_n = 1 + q + \dots + q^n$; **б)** $x_n = (n^2 + 5n + 7)/n^2$; **в)** $x_n = C_n^{50}/n^{50}$; **г)** $x_n = n^{50}/10^n$; **д)** $x_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$; **е)** $x_n = \sqrt[n]{n}$; **ж)** $x_n = 1/2 + 2/2^2 + 3/2^3 + \ldots + n/2^n$.

Задача 11. Последовательность (x_n) с положительными членами такова, что последовательность (x_{n+1}/x_n) имеет пределом некоторое число, меньшее 1. Докажите, что (x_n) бесконечно малая.

Задача 12. Найдите: **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} 4n^2/(n^2 + n + 1)$ **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 + 2n - 2)/(n^3 + n)$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}(n^9 - n^4 + 1)/(2n^9 + 7n - 5)$.

Задача 13. Найдите ошибку в рассуждении: «Пусть $x_n = (n-1)/n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - 1/n) = 1$. С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1/n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = 0 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = 0$. Отсюда $0 = 1$.»

Задача 14. Про последовательность (x_n) известно, что она имеет предел и содержит бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов. Докажите, что (x_n) бесконечно малая.

Задача 15. **а)** (x_n) имеет предел. Докажите, что $(x_{n+1} - x_n)$ бесконечно малая. **б)** Верно ли обратное?

Задача 16. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причём $x_n > y_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Верно ли, что **а)** $a > b$; **б)** $a \geqslant b$?

Задача 17. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Найти **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2}{7}$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1}$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n}$; **г)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

Задача 18. **а)** Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком функции $y = x^2$, осью Ox и прямой $x = 1$. Разобьём отрезок $[0, 1]$ на n равных частей и построим на каждой части прямоугольник так, чтобы его правая верхняя вершина лежала на графике (см. рис. 1.7). Сумму площадей прямоугольников обозначим S_n. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n)$.
б) Построим прямоугольники так, чтобы их левые верхние вершины лежали на графике (см. рис. 1.8). Сумму их площадей обозначим s_n. Докажите, что (s_n) стремится к тому же числу, что и (S_n) (его естественно считать *площадью* нашей фигуры).
в)* Решите ту же задачу для функции $y = x^k$, где $k \in \mathbb{N}$.

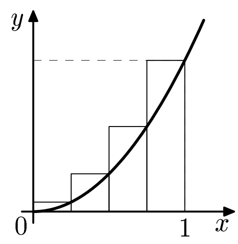


Рис. 1.7.

Задача 19*. С незапамятных времён жители островов Чунга и Чанга раз в год обмениваются драгоценностями. Жители Чунги привозят половину своих драгоценностей на Чангу, а жители Чанги одновременно привозят треть своих драгоценностей на Чунгу. Какая часть драгоценностей находится на каждом из островов? (Новые драгоценности за это время на островах не появлялись, а старые не терялись).

Задача 20*. Дано m последовательностей, сумма которых стремится к $m\alpha$, и сумма квадратов которых стремится к $m\alpha^2$. Докажите, что каждая из этих последовательность стремится к α.

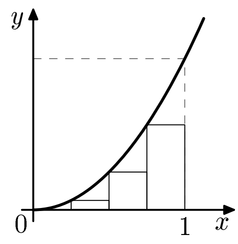


Рис. 1.8.

Задача 21*. Петя шел из дома в школу. На полпути он решил, что лучше
пойти в кино, и свернул к кинотеатру. На полпути к кинотеатру ему захотелось покататься на коньках, и он повернул к катку. Пройдя половину пути до катка, он подумал, что нужно всё-таки учиться, и повернул к школе. Но на полпути к школе снова свернул к кинотеатру, и т. д. Куда придёт Петя, если будет идти таким образом?

Листок №14. Повторение 05.2004

Задача 1. У каждого целого числа от $n+1$ до $2n$ включительно (где n — натуральное[3)]) возьмём наибольший нечётный делитель и сложим все эти делители. Докажите, что получится n^2.

Задача 2. Витя и Гриша учатся в классе из 20 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Витя и Гриша не входили в команду одновременно?

Задача 3. Сколькими нулями оканчивается число $11^{100}-1$?

Задача 4. В библиотеке n книг и несколько читателей (каждый прочёл хотя бы одну книгу). Про любые k книг ($1 \leqslant k \leqslant n$) известно, сколько читателей прочитало их все. Как найти общее число читателей?

Задача 5. Сколькими способами на трёхмерной шахматной доске $3\times3\times3$ можно расставить 9 одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга? (Ладья держит под боем свои строку, столбец и вертикаль.)

Задача 6. **а)** На полоске написано слово «снегопад». Сколькими способами её можно разрезать на 5 частей? (Резать можно только между буквами.) **б)** Сколькими способами можно раздать 8 одинаковых слив 5-ти разным ученикам, чтобы каждый что-то получил? **в)** А если можно давать сливы не всем?

Задача 7. Сколько букетов из пяти роз можно составить, если имеются розы трёх сортов?

Задача 8. Сколькими способами число $n\in\mathbb{N}$ можно представить[1)] в виде суммы **а)** k натуральных слагаемых; **б)** k неотрицательных целых слагаемых; **в)** нескольких натуральных слагаемых?

Задача 9. Фигура на плоскости переходит в себя при повороте вокруг точки O на угол 48°. Обязательно ли эта фигура переходит в себя при повороте вокруг точки O на угол **а)** 72°; **б)** 90°?

Задача 10. **а)** При каких $k\in\mathbb{N}$ число $(k-1)!$ не делится на k? **б)** Делится ли C_{100}^{50} на 83? А на 16?

Задача 11. Натуральные числа m и n взаимно просты. Дробь $\dfrac{m+2003n}{2003m+n}$ можно сократить на число k. Каково наибольшее возможное значение k?

Задача 12. Решите в целых числах уравнение $2x+3y+5z=11$.

Задача 13. Докажите, что **а)** $(i+1)^{k+1}-i^{k+1}=i^k\cdot C_{k+1}^1+i^{k-1}\cdot C_{k+1}^2+\dots+i\cdot C_{k+1}^k+1$;
б) $(n+1)^{k+1}-1=S_k(n)\cdot C_{k+1}^1+S_{k-1}(n)\cdot C_{k+1}^2+\dots+S_1(n)\cdot C_{k+1}^k+n$, где $S_m(n)=1^m+2^m+\dots+n^m$.
в) Как по формулам для $S_1(n),\dots,S_{k-1}(n)$ найти формулу для $S_k(n)$? Найдите $S_2(n)$ и $S_3(n)$.
г) Докажите, что $S_k(n)$ — многочлен от n. Найдите его степень, старший и свободный коэффициенты.

Задача 14. Найдите максимальное число частей, на которое могут разбить плоскость n окружностей.

Задача 15. Натуральное число n назовём *хорошим*, если найдётся такая перестановка $x_1, x_2, \dots, x_n$ чисел $1, 2, \dots, n$, что все числа $x_1+1, x_2+2, \dots, x_n+n$ — степени двойки. Найти все хорошие числа.

[3)]В этом листке $\mathbb{N}=1,2,3,\dots$

[1)]Представления, отличающиеся порядком слагаемых, считаются различными.

Задача 16. Есть некое свойство, каждое множество им обладает или нет. Известно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обладает этим свойством. Обязательно ли тогда $\mathbb{N}$ обладает этим свойством?

Задача 17. Сколько есть троек целых чисел $(x;y;z)$, где **а)** $0 < x < y < z < 14$; **б)** $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 10$?

Задача 18. Равномощно ли множество всех лучей на плоскости множеству всех окружностей на плоскости?

Задача 19. Равномощно ли отрезку множество точек плоскости, у которых координата x целая?

Задача 20. Число $x \in (0;1)$ назовём *вычислимым*, если есть конечное правило (данное в математических знаках или словесное), которое позволяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ определить n-й знак после запятой в десятичной записи x. **а)** Докажите, что множество вычислимых чисел из интервала $(0;1)$ счётно. **б)** Выпишем десятичные записи всех вычислимых чисел в таблицу, и диагональным методом (как в задаче 13а листка 9) построим вычислимое число, не входящее в таблицу. Объясните это противоречие.

Задача 21. Сколько цифр в десятичной записи числа **а)** 2^{40}; **б)** 2^{100}?

Задача 22. Найдите десятый знак после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{0{,}999999999}$.

Задача 23. Каких 100-значных чисел больше: содержащих в своей десятичной записи 7 или остальных?

Задача 24. Решите в натуральных числах $(x;y;z)$ уравнение $xy + yz + xz = xyz + 2$.

Задача 25. Из клетчатой плоскости вырезали клетки, обе координаты которых делятся на 10. Можно ли оставшуюся часть плоскости разрезать на доминошки (каждая состоит из двух соседних клеток)?

Задача 26. (*«Теорема о двух милиционерах»*) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, и последовательность (z_n) такова, что $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ при любом номере n. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Задача 27. Может ли последовательность иметь предел, не имея ни наименьшего, ни наибольшего членов?

Задача 28. Пусть $A(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ и $B(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ — многочлены степеней k и m соответственно. Найдите: **а)** $\lim\limits_{n\to\infty} A(n)/n^k$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty} A(n)/B(n)$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty} (S_k(n)/n^k - n/(k+1))$.

Листок №15. **Многочлены. Корни многочленов** 09.2004

Определение 1. *Многочленом степени n от одной переменной x* называется любое выражение вида

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а *коэффициенты* $a_n, \ldots, a_0$ — действительные числа, причём $a_n \neq 0$. Краткое обозначение: $A(x)$ или A. Коэффициент a_n называют *старшим*. Степень ненулевого многочлена A обозначают $\deg A$. Число 0 называют *нулевым* многочленом, его степень не определена.

Задача 1. Определите *сумму* и *произведение* многочленов.

Задача 2. **а)** Пусть $\deg A = 10$, $\deg B = \deg C = 7$. Какими могут быть $\deg(A+B)$ и $\deg(B+C)$? **б)** Докажите, что $\deg AB = \deg A + \deg B$. **в)** Докажите, что $\deg A(B(x)) = \deg A \cdot \deg B$.

Задача 3. Может ли произведение нескольких ненулевых многочленов быть нулевым многочленом?

Замечание. Многочлен $A(x)$ задаёт функцию $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая сопоставляет каждому действительному числу $s \in \mathbb{R}$ число $A(s)$ (результат подстановки в выражение $A(x)$ числа s вместо переменной x).

Задача 4. Пусть $\deg A > 0$. Докажите, что последовательность $A(1)$, $A(2)$, ... бесконечно большая.

Задача 5. Могут ли разные многочлены задавать одну и ту же функцию?

Задача 6. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена: **а)** $(x-1)^n$; **б)** $(x+1)^n$; **в)** $(x-2)^n$; **г)** $(x+2)^n$; **д)** $(1-x+x^4)^{1000}$. **е)** Найдите сумму коэффициентов при нечётных степенях у многочлена из пункта д).

Число корней многочлена

Определение 2. Число s называется *корнем* многочлена A, если $A(s)=0$.

Задача 7. Докажите, что если многочлен A *делится* на многочлен B, то есть существует такой многочлен C, что $A=BC$, то все корни B являются корнями A. Верно ли обратное утверждение?

Задача 8. Делится ли многочлен x^9-1 на многочлен x? А на многочлен x^2-1?

Задача 9. Докажите, что число s — корень многочлена $A(x)$ если и только если $A(x)$ делится на $x-s$.

Задача 10. Пусть $A(1)=A(2)=0$. Докажите, что $A(x)$ делится на $(x-1)(x-2)$.

Задача 11. Докажите, что число различных корней многочлена A не больше $\deg A$.

Задача 12. Можно ли задать многочленом функцию $\sin x$?

Задача 13. Пусть значения многочленов A и B совпадают при n различных значениях переменной, и степени этих многочленов меньше n. Докажите, что тогда $A=B$.

Задача 14. В скольких точках прямая может пересекать параболу?

Задача 15. **а)** Докажите, что любой квадратный трёхчлен можно представить в виде $a+bx+cx(x-1)$.
б) Найдите уравнение параболы, проходящей через точки $(0;1)$, $(1;2)$ и $(2;4)$.
в) Докажите, что любой многочлен степени 3 представляется в виде $a+bx+cx(x-1)+dx(x-1)(x-2)$.
г) Найдите такой многочлен $P(x)$ степени 3, что $P(0)=1$, $P(1)=2$, $P(2)=4$, $P(3)=8$.

Задача 16*. Докажите, что для любых различных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и любых чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ существует единственный многочлен $P(x)$ степени меньше n такой, что $P(a_1)=b_1, \dots, P(a_n)=b_n$.

Корни многочленов с целыми коэффициентами

Задача 17. Докажите, что если многочлен $A(x)$ с целыми коэффициентами принимает при $x=0$ и $x=1$ нечётные значения, то уравнение $A(x)=0$ не имеет целых решений.

Задача 18. **а)** Ненулевая несократимая дробь p/q — корень многочлена $A(x)=a_nx^n+\dots+a_0$ с целыми коэффициентами. Докажите, что тогда a_n делится на q и a_0 делится на p.
б) Пусть в предыдущем пункте $a_n=1$. Докажите, что все рациональные корни A — целые числа.

Задача 19. Найдите все рациональные корни многочленов: **а)** $x^3-6x^2+15x-14$; **б)** $6x^4+19x^3-7x^2-26x+12$.

Задача 20. **а)** Коэффициенты многочлена Q рациональны, $Q(\sqrt{2})=0$. Докажите, что $Q(-\sqrt{2})=0$.
б) Найдите ненулевой многочлен P с целыми коэффициентами и корнем $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Найдите все корни P.

Теорема Виета

Задача 21. **а)** Пусть многочлен $a(x)=x^3+ax^2+bx+c$ раскладывается на *линейные* множители (то есть, многочлены первой степени): $a(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$. Докажите, что справедливы следующие *формулы Виета:* $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-a$, $\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=b$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-c$.
б)* Найдите подобные формулы, если $\deg a(x)=n$, $a(x)$ раскладывается на линейные множители.

Задача 22. **а)** Про числа a, b, c известно, что $a+b+c>0$, $ab+bc+ac>0$, $abc>0$. Докажите, что a, b и c положительны. **б)** Пусть $a+b+c<0$, $ab+bc+ac<0$, $abc<0$. Какие знаки могут иметь числа a, b, c?

Задача 23*. **а)** Пусть число $c \neq 0$. Докажите, что многочлен x^5+ax^2+bx+c не может раскладываться на пять линейных множителей. **б)** Та же задача для многочлена $x^5+ax^4+bx^3+c$.

Задача 24. Коэффициенты многочлена $(x-a)(x-b)$ целые. Докажите, что число a^n+b^n целое при $n \in \mathbb{N}$.

Задача 25*. Найдите первые n цифр после запятой в десятичной записи числа $(\sqrt{26}+5)^n$.

Листок №16. Многочлены. Разложение на неприводимые множители 09.2004

Обозначение. Множества всех многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ обозначаются соответственно $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$.

Определение 1. Пусть A и B — многочлены, причём $\deg B>0$. Разделить A на B с остатком значит найти такие многочлены Q и R, что $A=BQ+R$, где либо $R=0$, либо $\deg R<\deg B$.

Задача 1. Разделите с остатком $2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ на x^2-3x+1.

Задача 2. **а)** Докажите, что деление многочленов с остатком всегда возможно.
б) Докажите, что при делении с остатком многочлены Q и R определяются однозначно.

Задача 3. (*Теорема Безу*) Докажите, что остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $x-a$ равен значению многочлена $A(x)$ при $x=a$.

Задача 4. **а)** Остаток от деления $A(x)$ на $x-1$ равен 5, а на $x-3$ равен 7. Найдите остаток от деления $A(x)$ на $(x-1)(x-3)$. **б)** Найдите остаток от деления x^{1000} на x^2+x-1.

Определение 2. Многочлен со старшим коэффициентом 1 называется *приведённым*.

Определение 3. *Наибольшим общим делителем* НОД(A, B) двух многочленов A и B, хотя бы один из которых ненулевой, называют приведённый многочлен, который
1) делит и A, и B (то есть является общим делителем A и B);
2) делится на любой общий делитель A и B.

Задача 5. Однозначно ли определяется НОД двух многочленов?

Задача 6. **а)** Верно ли, что НОД(A, B) = НОД(A, B − A · C), где C — любой многочлен?
б) Сформулируйте и докажите алгоритм Евклида вычисления НОД многочленов.

Задача 7. Найдите НОД многочленов: **а)** $x(x-1)^3(x+2)$ и $(x-1)^2(x+2)^2(x+5)$; **б)** $3x^3-2x^2+x+2$ и x^2-x+1; **в)*** x^m-1 и x^n-1; **г)*** x^m+1 и x^n+1.

Задача 8. Пусть A и B — любые многочлены степени m и n соответственно.
а) Докажите, что существуют такие многочлены U и V, что НОД(A, B) = AU + BV.
б) Докажите, что если $m,n>0$, то U и V можно выбрать так, чтобы $\deg U<n$ (или $U=0$) и $\deg V<m$ (или $V=0$).
в) Найдите такие U и V, если A и B — многочлены из пункта б) предыдущей задачи.

Задача 9. Докажите, что НОД(A, B) — это приведённый многочлен наибольшей степени, делящий и A, и B.

Определение 4. Многочлен положительной степени из $\mathbb{R}[x]$ называется *неприводимым* (*над* $\mathbb{R}$), если он не представляется в виде произведения двух многочленов меньшей степени из $\mathbb{R}[x]$. Аналогично определяется понятие неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена положительной степени из $\mathbb{Q}[x]$.

Задача 10. Может ли неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ не быть неприводимым над $\mathbb{R}$?

Задача 11. Разложите на неприводимые множители над $\mathbb{R}$ и на неприводимые множители над $\mathbb{Q}$:
а) $5x+7$; **б)** x^2-2; **в)** x^3+x^2+x+1; **г)** $x^3-6x^2+11x-6$; **д)** x^3+3; **е)** x^4+4.

Задача 12. Пусть многочлены $A(x)$ и $B(x)$ из $\mathbb{R}[x]$ не имеют общего делителя положительной степени. Докажите, что тогда существуют такие многочлены $U(x)$ и $V(x)$ из $\mathbb{R}[x]$, что $AU+BV=1$.

Задача 13. Докажите, что если неприводимый над $\mathbb{R}$ многочлен $P(x)$ из $\mathbb{R}[x]$ делит произведение двух многочленов $A(x)$ и $B(x)$ из $\mathbb{R}[x]$, то он делит один из этих многочленов.

Задача 14. Докажите, что любой многочлен из $\mathbb{R}[x]$ ненулевой степени однозначно (с точностью до множителей из $\mathbb{R}$) раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{R}$ многочленов из $\mathbb{R}[x]$.

Задача 15. Верно ли, что любой многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ ненулевой степени однозначно (с точностью до множителей из $\mathbb{Q}$) раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{Q}$ многочленов из $\mathbb{Q}[x]$?

Задача 16. Пусть $a \in \mathbb{R}$ — общий корень многочленов S и T из $\mathbb{Q}[x]$, причём T неприводим над $\mathbb{Q}$. Докажите, что S делится на T, и частное — многочлен с рациональными коэффициентами.

Задача 17. Делится ли **а)** многочлен $x^{100}-32x^{90}+x^4+5x^3-3x^2-10x+2$ на многочлен x^2-2? **б)** многочлен $x^{11}+x^9-5x^8+x^7-6x^6-7x^4-98x^2-49$ на многочлен x^3-7?

Задача 18*. **а)** Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ — корень некоторого ненулевого многочлена из $\mathbb{Q}[x]$. Пусть $G(x)$ — произвольный многочлен из $\mathbb{Q}[x]$, такой что $G(\alpha) \neq 0$. Докажите, что существует такой многочлен $H(x) \in \mathbb{Q}[x]$, что $\dfrac{1}{G(\alpha)} = H(\alpha)$. **б)** Найдите такой многочлен $H(x)$, если $\alpha = \sqrt[3]{2}$ и $G(x) = x+1$.

Листок №17. **Аксиомы поля** 10.2004

Определение 1. *Полем* называется любое множество $\Bbbk$, на котором заданы операции *сложения* $(+)$ и *умножения* $(\cdot)$, удовлетворяющие следующим условиям (аксиомам поля):

(A1) Для любых $a, b \in \Bbbk$ выполнено равенство $a+b=b+a$ (*коммутативность сложения*).

(A2) Для любых $a, b, c \in \Bbbk$ выполнено равенство $(a+b)+c = a+(b+c)$ (*ассоциативность сложения*).

(A3) В $\Bbbk$ существует такой элемент 0, что для любого $a \in \Bbbk$ выполнено равенство $a+0=a$ (*существование нуля*).

(A4) Для любого $a \in \Bbbk$ существует такой $b \in \Bbbk$, что $a+b=0$ (*существование противоположного элемента*: такой элемент b называется *противоположным* к a и обозначается $-a$).

(M1) Для любых $a, b \in \Bbbk$ выполнено равенство $a \cdot b = b \cdot a$ (*коммутативность умножения*).

(M2) Для любых $a, b, c \in \Bbbk$ выполнено равенство $(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*ассоциативность умножения*).

(M3) В $\Bbbk$ существует такой элемент 1, не равный нулю, что для любого $a \in \Bbbk$ выполнено равенство $a \cdot 1 = a$ (*существование единицы*).

(M4) Для любого $a \in \Bbbk$, не равного нулю, существует такой $b \in \Bbbk$, что $a \cdot b = 1$ (*существование обратного элемента*: такой элемент b называется *обратным* к a и обозначается $\dfrac{1}{a}$ или a^{-1}).

(AM) Для любых $a, b, c \in \Bbbk$ выполнено равенство $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a \cdot c$ (*дистрибутивность умножения относительно сложения*).

Задача 1. Пусть $\Bbbk$ — поле. Докажите, что
а) в $\Bbbk$ есть только один ноль;
б) у каждого элемента только один противоположный;
в) для любого $a \in \Bbbk$ выполнено равенство $-(-a) = a$;
г) для любых $a, b \in \Bbbk$ уравнение $a + x = b$ имеет ровно одно решение в $\Bbbk$ (оно обозначается $b-a$; таким образом, в поле определена операция *вычитания*).

Задача 2. Пусть $\Bbbk$ — поле. Докажите, что
а) в $\Bbbk$ есть только одна единица;
б) у каждого ненулевого элемента только один обратный;
в) для любого ненулевого $a \in \Bbbk$ выполнено равенство $(a^{-1})^{-1} = a$;
г) для любого $b \in \Bbbk$ и любого ненулевого $a \in \Bbbk$ уравнение $a \cdot x = b$ имеет ровно одно решение в $\Bbbk$ (оно обозначается $\dfrac{b}{a}$; таким образом, в поле определена операция *деления* на ненулевые элементы).

Задача 3. Пусть $\Bbbk$ — поле. Докажите, что
а) для любого $a \in \Bbbk$ выполнено равенство $a \cdot 0 = 0$;
б) если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.
в)* Останется ли верным утверждение пункта б), если исключить из аксиом поля аксиому M4?

Задача 4. Пусть $\Bbbk$ — поле. Докажите, что для любого $a \in \Bbbk$ выполнены равенства
а) $a \cdot (-1) = -a$;
б) $(-a) \cdot (-a) = a \cdot a$;
в) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$, если $a \neq 0$.

Задача 5. Пусть $\Bbbk$ — поле. Докажите, что для любых $a, c \in \Bbbk$ и любых ненулевых $b, d \in \Bbbk$ выполнено равенство **а)** $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$; **б)** $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$.

Задача 6. Какие из следующих числовых множеств являются полями: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$?

Задача 7. Является ли полем множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$ (сложение и умножение обычные)?

Задача 8. Пусть $\mathbb{R}(x)$ — множество $\left\{ \dfrac{P(x)}{Q(x)} \;\middle|\; P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x],\ Q(x) \text{ не равен нулевому многочлену} \right\}$. Является ли $\mathbb{R}(x)$ полем (с обычным сложением и умножением)?

Задача 9. Существует ли поле из **а)** одного элемента; **б)** двух элементов; **в)** трёх элементов?

Задача 10*. Постройте поле из p элементов, где p — произвольное простое число.

Задача 11*. Постройте поле из четырёх элементов.

Листок №18. Аксиомы порядка 10.2004

Определение 1. Множество E называется *линейно упорядоченным*, если на нём задано отношение «меньше или равно» (то есть известно, для каких $a, b \in E$ выполнено неравенство $a \leqslant b$), причём выполнены следующие *аксиомы порядка*:

(O1) Для любого $a \in E$ выполнено неравенство $a \leqslant a$.

(O2) Если $a, b \in E$, $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$.

(O3) Если $a, b, c \in E$, $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$.

(O4) Для любых $a, b \in E$ выполнено неравенство $a \leqslant b$ или выполнено неравенство $b \leqslant a$.

Вместо $a \leqslant b$ пишут также $b \geqslant a$, а запись $a < b$ (или, что то же самое, $b > a$) означает, что $a \leqslant b$ и $a \neq b$.

Определение 2. Поле $\Bbbk$ называется *упорядоченным полем*, если множество $\Bbbk$ линейно упорядочено, причём выполнены следующие аксиомы:

(AO) Если $a, b, c \in \Bbbk$ и $a \leqslant b$, то $a + c \leqslant b + c$.

(MO) Если $a, b, c \in \Bbbk$, $0 \leqslant c$ и $a \leqslant b$, то $a \cdot c \leqslant b \cdot c$.

Задача 1. Пусть $\Bbbk$ — упорядоченное поле. Докажите, что
а) если $a \leqslant b$ и $c \leqslant d$, то $a + c \leqslant b + d$;
б) если $0 \leqslant a \leqslant b$ и $0 \leqslant c \leqslant d$, то $a \cdot c \leqslant b \cdot d$;
в) $1 > 0$.

Задача 2. **а)** Пусть $\Bbbk$ — упорядоченное поле, а P — множество его *положительных* элементов, то есть $P = \{a \in \Bbbk \mid a > 0\}$. Докажите, что выполнены следующие свойства:

(P1) Для любого $a \in \Bbbk$ верно ровно одно из следующих утверждений: $a \in P$; $a = 0$; $-a \in P$.

(P2) Если $a, b \in P$, то $a + b \in P$ и $a \cdot b \in P$.

б)* Пусть $\Bbbk$ — поле, $P \subset \Bbbk$ — подмножество, удовлетворяющее условиям (P1) и (P2). Докажите, что поле $\Bbbk$ можно сделать упорядоченным так, что P будет множеством положительных элементов, причём отношение порядка $\leqslant$ однозначно определяется множеством P.

Задача 3. Докажите, что в любом упорядоченном поле бесконечно много элементов.

Задача 4. Пусть $\Bbbk$ — упорядоченное поле. Поставим в соответствие каждому натуральному числу n следующий элемент поля $\Bbbk$: $\overline{n} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}$ (сумма n экземпляров единицы поля $\Bbbk$).

а) Докажите, что для любых m и n имеют место равенства $\overline{m} + \overline{n} = \overline{m + n}$ и $\overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{mn}$.
б) Докажите, что если $m \leqslant n$, то $\overline{m} \leqslant \overline{n}$.
в) Докажите, что если $m \neq n$, то $\overline{m} \neq \overline{n}$.
г) Докажите, что каждому *целому* числу n можно поставить в соответствие элемент $\overline{n} \in \Bbbk$ так, что все пункты а)–в) останутся верными.
д) Докажите, что то же самое можно сделать для всех *рациональных* чисел.

Замечание. В дальнейшем мы будем писать n вместо $\overline{n}$, считая, тем самым, что все натуральные (целые, рациональные) числа являются элементами любого упорядоченного поля $\Bbbk$.

Листок №19. Действительные числа: определение. Следствия аксиомы полноты 10.2004

Определение 1. Подмножество M упорядоченного поля $\Bbbk$ называют *ограниченным сверху*, если найдётся такой $c \in \Bbbk$, что при любом $x \in M$ верно $x \leqslant c$ (каждый такой элемент c называют *верхней гранью* M). Аналогично определяют понятия множества, ограниченного снизу и нижней грани. Элемент $c \in \Bbbk$ называют *точной верхней гранью* множества M, если c является верхней гранью M, но никакой меньший элемент не является верхней гранью M. Обозначение: $\sup M$ (читается «супремум» M).

Задача 1. Докажите, что подмножество упорядоченного поля $\Bbbk$ *ограничено* (то есть ограничено и сверху, и снизу) если и только если найдётся такой $c \in \Bbbk$, что при любом $x \in M$ будет верно $|x| \leqslant c$ (т. е. $-c \leqslant x \leqslant c$).

Задача 2. Дайте определение точной нижней грани множества M ($\inf M$, «инфимум» M).

Задача 3. Докажите, что элемент c есть $\sup M$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия: 1) для всех $x \in M$ верно, что $x \leqslant c$; 2) для любого элемента $c_1 < c$ найдётся такой $x \in M$, что $x > c_1$.

Задача 4. Может ли у множества быть несколько точных верхних (нижних) граней?

Задача 5. Найдите $\sup M$ и $\inf M$, если $M = \{a^2 + 2a \mid -5 < a \leqslant 5\}$.

Задача 6. Пусть A и B — некоторые подмножества упорядоченного поля, и пусть известны $\sup A$ и $\sup B$.
а) Найдите $\sup(A \cup B)$. **б)** Найдите $\sup(A + B)$, где $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.
в) Найдите $\inf(A \cdot B)$, где $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$, если A и B состоят из отрицательных элементов.

Определение 2. Упорядоченное поле $\Bbbk$ называется *полным*, если выполнена следующая *аксиома полноты*:
(C) Всякое ограниченное сверху непустое подмножество поля $\Bbbk$ имеет точную верхнюю грань.

Определение 3. Полное упорядоченное поле называется *полем действительных чисел*. Обозначение: $\mathbb{R}$.

Задача 7. Каждое ли ограниченное снизу непустое подмножество поля $\mathbb{R}$ имеет точную нижнюю грань?

Задача 8. **а)** Пусть $c = \sup\{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \text{ и } q^2 < 2\}$. Докажите, что $c^2 = 2$. **б)** Докажите, что для любого $a \geqslant 0$ есть ровно одно такое $x \geqslant 0$, что $x^2 = a$ (это число обозначают $\sqrt{a}$). **в)** Является ли $\mathbb{Q}$ полным? **г)*** Для любого $a \geqslant 0$ и любого $r \in \mathbb{Q}$ определите число a^r, докажите его существование и единственность.

Задача 9. (*Принцип вложенных отрезков*) Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$ — последовательность вложенных отрезков. Докажите, что **а)** у отрезков есть общая точка; **б)** если $\lim\limits_{i\to\infty}(b_i - a_i) = 0$, то общая точка одна.

Задача 10. **а)** Любая ли последовательность $(a_1, b_1) \supseteq (a_2, b_2) \supseteq \ldots$ вложенных интервалов имеет непустое пересечение? **б)** А если известно, что и (a_n), и (b_n) содержат бесконечно много различных элементов?

Задача 11. На прямой дано некоторое множество отрезков. Известно, что любые два из них имеют общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам.

Задача 12. **а)** (*Компактность отрезка*) Отрезок покрыт системой интервалов. Всегда ли можно выбрать из системы конечное число интервалов, покрывающих отрезок? **б)** А если заменить отрезок на интервал?

Задача 13. Докажите следующие утверждения: **а)** Для любого $c \in \mathbb{R}$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $n > c$.
б) Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$. **в)** (*Аксиома Архимеда*) Для любого положительного $h \in \mathbb{R}$ и для любого $a \in \mathbb{R}$ существует и единственно такое целое число n, что $nh \leqslant a < (n+1)h$.

Задача 14. Докажите, что любой отрезок из $\mathbb{R}$ содержит бесконечно много чисел **а)** из $\mathbb{Q}$; **б)** из $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Задача 15. Выведите из принципа вложенных отрезков и аксиомы Архимеда аксиому полноты.

Задача 16. (*Аксиома Больцано-Вейерштрасса*) Докажите, что любая неубывающая ограниченная сверху последовательность действительных чисел имеет предел.

Задача 17. Найдите пределы последовательностей: **а)** $x_1 = 2$, $x_{n+1} = (x_n + 1)/2$; **б)** $y_1 = \sqrt{2}$, $y_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $y_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\ldots$; **в)** $z_1 = \sqrt{2}$, $z_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $z_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\ldots$; **г)*** $t_1 = 1$, $t_{n+1} = 1/(1+t_n)$.

Задача 18. Докажите, что последовательность $x_n = 1 - 1/2 + 1/3 - \cdots + (-1)^{n+1}/n$ имеет предел.

Задача 19. (*Число Эйлера*) Докажите, что **а)** существует $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$ (его обозначают буквой e); **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}(1+k/n)^n = e^k$ при любом $k \in \mathbb{N}$; **в)** $\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/n)^n = 1/e$; **г)*** $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + 1/1! + 1/2! + \cdots + 1/n!)$.

Задача 20. (*Вычисление квадратного корня методом последовательных приближений*) Пусть $a > 0$. Возьмём любое $x_1 > 0$ и построим последовательность (x_n) по закону: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$ при $n \in \mathbb{N}$.
а) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$. **б)*** Для $a = 10$ найдите n, при котором $|x_n - \sqrt{10}| < 0{,}0001$, если $x_0 = 3$.

Задача 21*. (*Критерий Коши*) Докажите, что последовательность (x_n) *сходится* (то есть имеет предел) тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $k \in \mathbb{N}$, что для любых

$m, n \geqslant k$ имеем $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Задача 22*. На прямоугольную карту положили карту той же местности, но меньшего масштаба (меньшая карта целиком лежит внутри большей). Докажите, что можно проткнуть иголкой сразу обе карты так, чтобы точка прокола изображала на обеих картах одну и ту же точку местности.

Задача 23. (*Задача Кириллова о манной каше*) По кругу сидят n ребят, у каждого по тарелке каши. Каждую минуту одновременно каждый из ребят берет себе по половине каши своих соседей. Сначала в тарелках было $1, 2, \ldots, n$ поварёшек каши. Сколько каши будет в тарелках спустя достаточно долгое время, если **а)** $n = 3$; **б)** $n = 4$; **в)*** $n \in \mathbb{N}$?

Листок №20. Графики и кривые. Определение непрерывности 12.2004

Задача 1. График $f(x)$ изображён на рис. 1.9. Нарисуйте графики функций: **а)** $2f(x)$; **б)** $f(2x)$; **в)** $f(x+2)$; **г)** $f(x)+2$; **д)** $f(-x)$; **е)** $f(|x|)$; **ж)** $|f(-|x|)|$; **з)** $1-2f(x)$; **и)** $f\left(\dfrac{1}{2}x-3\right)$; **к)** $3-2f(3-2x)$; **л)** $1-\left|f\left(\dfrac{1-|x|}{3}\right)\right|$; **м)** $\dfrac{1}{f(x)}$.

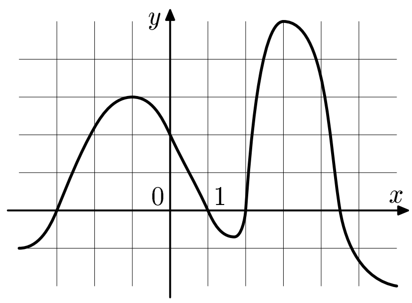


Рис. 1.9.

Задача 2. Выразите функцию g через функцию f, если известно, что график g получается из графика f **а)** параллельным переносом на вектор $(3,5)$; **б)** сжатием в 2 раза к оси OY; **в)** симметрией относительно оси OX; **г)** симметрией относительно прямой $x = 3$; **д)** растяжением в 3 раза от прямой $y = -1$; **е)** центральной симметрией относительно начала координат; **ж)** гомотетией с коэффициентом 2 относительно начала координат; **з)** гомотетией с коэффициентом $-1/3$ относительно точки $(-3,2)$.

Задача 3. Постройте графики: **а)** $\sin(1/x)$; **б)** $x\sin(1/x)$; **в)** $\cos^2 x$; **г)** $\sqrt{\cos x}$.

Определение 1. Функция f определена на множестве $A \subseteq \mathbb{R}$ и принимает значения в множестве $B \subseteq \mathbb{R}$. Если найдётся функция g, которая определена на множестве B, принимает значения в множестве A и $g(f(x)) = x$ для всех $x \in A$, $f(g(y)) = y$ для всех $y \in B$, то g называют *обратной* к функции f. Обозначение: $g = f^{-1}$.

Задача 4. Докажите, что графики $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

Задача 5. Найдите обратную к функции **а)** $2x+3$; **б)** x^3; **в)** $1/x$; **г)** x^3+1; **д)** $x/(1+x)$; **е)** $\sqrt{1-x^2}$, $x \geqslant 0$.

Задача 6. Нарисуйте кривые: **а)** $x^2 = y^2$; **б)** $x^2y - xy^2 = x - y$; **в)** $4x^2 + 9y^2 = 36$; **г)** $16x^2 - 25y^2 = 400$.

Задача 7. Нарисуйте кривые: **а)** $y^2 = x^3$; **б)** $y = 1 + x^3$; **в)** $y^2 = 1 + x^3$; **г)** $y^2 = x + x^3$; **д)** $y^2 = x^2 + x^3$.

Задача 8. Кривая на рис. 1.10 задана уравнением $\Phi(x,y) = 0$. Нарисуйте кривые: **а)** $\Phi(x+2, y-1) = 0$; **б)** $\Phi(y,x) = 0$; **в)** $\Phi(-x,-y) = 0$; **г)** $\Phi(2x,y) = 0$; **д)** $\Phi\left(\dfrac{x}{2}, 2y\right) = 0$; **е)** $\Phi(|y|, x) = 0$; **ж)** $\Phi(x+y, x-y) = 0$.

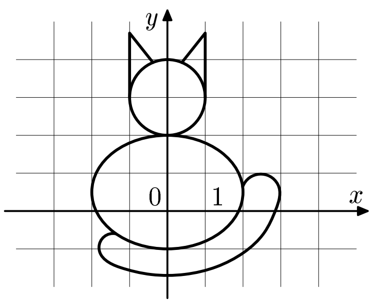


Рис. 1.10. Кривая $\Phi(x,y) = 0$.

Задача 9. Задайте уравнением кривую, получающуюся из кривой $\Phi(x,y) = 0$ **а)** сдвигом на вектор $(-2,3)$; **б)** растяжением в 2 раза от оси OX; **в)** симметрией относительно OY; **г)** симметрией относительно прямой $y = 2$; **д)** центральной симметрией относительно начала координат; **е)** гомотетией с коэффициентом 2 относительно начала координат; **ж)** поворотом на $45°$ вокруг точки

O; **з)** сжатием в 3 раза к прямой $x = 1$; **и)** гомотетией с коэффициентом $-1/3$ относительно точки $(1, -1)$.

Задача 10*. Найдите уравнение, задающее **а)** гиперболу $y = 1/x$, сдвинутую и повёрнутую так, что её центр находится в точке $(-5, 2)$, а асимптоты составляют углы в $45°$ с OX; **б)** параболу $y = x^2$, сдвинутую и повёрнутую так, что её вершина находится в точке $(-1, -1)$, а ось идёт под углом $45°$ к OX.

* * *

Определение 2. (*Непрерывность по Коши*) Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* $a \in M$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что будет верно утверждение: *для каждого x из M, такого что $|x-a| < \delta$, выполнено неравенство* $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. Обозначение: $f \in C(a)$.

Задача 11. Запишите без отрицаний: «$f : M \to \mathbb{R}$ *разрывна* (т. е. не является непрерывной) в точке $a \in M$».

Задача 12. Укажите множество точек непрерывности функций[4]: **а)** x; **б)** $\operatorname{sgn} x$; **в)** x^2; **г)** $\{x\}$; **д)** $\frac{1}{x}$; **е)** $\sqrt{x}$.

Задача 13. Будет ли функция, непрерывная в точке a, ограниченной в некоторой окрестности точки a?

Задача 14. Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in M$, причём $f(a) > 0$. Докажите, что существует такая окрестность U точки a, что f положительна на множестве $U \cap M$.

Задача 15. Какие функции окажутся «непрерывными», если в определении 2 забыть, что **а)** $\varepsilon > 0$; **б)** $\delta > 0$?

Определение 3. (*Непрерывность по Ге́йне.*) Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* $a \in M$, если для каждой сходящейся к a последовательности (x_n), все элементы которой принадлежат M, справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Обозначение: $f \in C(a)$.

Задача 16. Докажите эквивалентность определений 2 и 3.

Задача 17. Функции f, g непрерывны в точке $a \in \mathbb{R}$. Докажите: **а)** $|f| \in C(a)$; **б)** $f \pm g \in C(a)$; **в)** $f \cdot g \in C(a)$; **г)** если $g(a) \neq 0$, то функция f/g определена в некоторой окрестности точки a и непрерывна в точке a.

Задача 18. Докажите непрерывность функции (во всех точках её области определения): **а)** x^n, где $n \in \mathbb{N}$; **б)** многочлен из $\mathbb{R}[x]$; **в)** $P(x)/Q(x)$, где $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q \neq 0$; **г)** $\sqrt[n]{x}$, где $n \in \mathbb{N}$; **д)** $\sin x$; **е)** $\cos x$; **ж)** $\operatorname{tg} x$.

Задача 19. Придумайте функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **а)** всюду разрывную; **б)** непрерывную лишь в одной точке; **в)** разрывную в точках вида $1/n$, где $n \in \mathbb{N}$, и только в них; **г)*** разрывную в точках из $\mathbb{Q}$ и только в них.

Задача 20*. Существует ли функция, которая на каждом отрезке принимает все действительные значения?

Листок №21. Непрерывность: основные теоремы и приложения 12.2004

Определение 1. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$ (например, M — отрезок или вся прямая). Говорят, что функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* M, если f непрерывна в каждой точке $a \in M$. Обозначение: $f \in C(M)$. Говорят, что $f\colon M \to \mathbb{R}$ *ограничена на* M, если найдётся такое число k, что $|f(x)| < k$ при всех $x \in M$.

[4] Как обычно, функцию, заданную формулой, мы считаем определённой всюду, где эта формула имеет смысл.

Задача 1. **а)** Пусть $f \in C([a;b])$, причём $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Найдётся ли такое $\gamma \in (a,b)$, что $f(\gamma) = 0$?
б) (*Теорема о промежуточном значении*) Пусть $f \in C([a;b])$, причём $f(a) < f(b)$. Докажите, что для любого $k \in [f(a), f(b)]$ найдётся такая точка $\gamma \in [a,b]$, что $f(\gamma) = k$.

Задача 2. Докажите, что любой многочлен нечётной степени из $\mathbb{R}[x]$ имеет хотя бы один корень из $\mathbb{R}$.

Задача 3. (*Теорема Л. Бра́уэра о неподвижной точке для отрезка*) Пусть $f \in C([0;1])$ и все значения функции f содержатся в отрезке $[0;1]$. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет корень.

Задача 4. Функция непрерывна на отрезке. Всегда ли она на этом отрезке **а)** ограничена; **б)** достигает своего наибольшего и наименьшего значений? **в)** Та же задача, но отрезок заменен на интервал; прямую.

Задача 5. Непостоянная функция f определена и непрерывна на множестве $I \subseteq \mathbb{R}$. Каким может быть множество значений этой функции на I, если I **а)** отрезок; **б)** интервал; **в)** прямая?

Задача 6. Функция f непрерывна на отрезке $I \subseteq \mathbb{R}$. Докажите, что f обратима на I если и только если f строго монотонна на I, причём функция f^{-1} строго монотонна и непрерывна (на отрезке $[\min\limits_{x\in I} f(x); \max\limits_{x\in I} f(x)]$).

Задача 7. Докажите непрерывность $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$ (на их области определения).

Задача 8. Пусть $A, B \subseteq \mathbb{R}$, и функции $f\colon A \to B$, $g\colon B \to \mathbb{R}$ непрерывны. Докажите, что $g \circ f \in C(A)$.

Задача 9. Функции f и g непрерывны на $\mathbb{R}$, причём $f(x) = g(x)$ для любого $x \in \mathbb{Q}$. Докажите, что $f = g$.

Задача 10. Найдите все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции f, такие что $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной на* M, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любой пары точек $x, y \in M$, таких что $|x - y| < \delta$, выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Задача 11. Функция f равномерно непрерывна на множестве $M \subseteq \mathbb{R}$. Обязательно ли тогда $f \in C(M)$?

Задача 12. Какие из функций x^2, $\sqrt{x}$, $1/x$ равномерно непрерывны **а)** на луче $[1;\infty)$; **б)** на интервале $(0;1)$? **в)** (*Теорема Ка́нтора*) Докажите, что функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нём.

* * *

Задача 13. Уравнение $x^3 + ax + 1 = 0$ имеет три действительных корня. Докажите, что найдётся такое $\varepsilon > 0$, что для всякого $b \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ уравнение $x^3 + bx + 1 = 0$ имеет три действительных корня.

Задача 14. Функции f и g непрерывны на $\mathbb{R}$. Верно ли, что функция $\max(f(x), g(x))$ непрерывна на $\mathbb{R}$?

Задача 15. Однажды утром (в 9^{00}) турист вышел из лагеря к вершине горы и добрался туда в 20^{00}. В 9^{00} следующего дня он начал спуск с вершины (по той же тропе, что и поднимался) и в 20^{00} вернулся в лагерь. Найдётся ли на тропе точка, которую турист проходил в одно и то же время в день подъёма и в день спуска?

Задача 16. Верно ли, что каждая внутренняя точка любого выпуклого многогранника принадлежит какому-то отрезку, концы которого находятся на рёбрах этого многогранника?

Задача 17. Выпуклый многоугольник M, прямая l и точка A лежат в одной плоскости. Докажите, что найдётся прямая l', которая делит M на две равновеликие части и **а)** параллельна l; **б)** проходит через A.

Задача 18*. Пусть S^1 — окружность на плоскости. **а)** Дайте определение непрерывной функции $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$.
б) Пусть $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что у S^1 найдётся такой диаметр AB, что $f(A) = f(B)$.

Задача 19*. (*Теоремы о блинах*) **а)** На сковороде лежат два блина (выпуклые многоугольники). Докажите, что найдётся прямая, делящая каждый блин на две равновеликие части. **б)** На сковороде лежит блин (выпуклый многоугольник). Докажите, что найдутся две перпендикулярные прямые, делящие блин на четыре равновеликие части.

Задача 20*. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *выпукла вниз*: для любого отрезка $[a;b]$ график f на $[a;b]$ лежит не выше прямой, соединяющей точки $(a;f(a))$ и $(b;f(b))$. Докажите, что f непрерывна на $\mathbb{R}$.

Задача 21*. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$, f не является константой. Докажите, что найдётся такое $r \notin \mathbb{Q}$, что $f(r) \notin \mathbb{Q}$.

Задача 22*. Пусть $M \subset \mathbb{R}$ — счётно. Найдётся ли $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, множество точек разрыва которой есть M?

Задача 23*. Пусть $f \in C([0;1])$ и $f(0) = f(1)$. **а)** Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ у графика f найдётся *горизонтальная хорда длины* $1/n$ (т. е. найдутся такие точки $x, y \in [0;1]$, что $|x - y| = 1/n$ и $f(x) = f(y)$). **б)** Есть ли ещё числа a, для которых у графика f обязательно найдётся горизонтальная хорда длины a?

Задача 24*. Среди ровной степи стоит гора. На вершину ведут две тропы (считаем их графиками непрерывных функций), не опускающиеся ниже уровня степи. Два альпиниста одновременно начали подъём (по разным тропам), соблюдая условие: всё время быть на одинаковой высоте. Смогут ли они достичь вершины, двигаясь непрерывно, если **а)** тропы состоят из конечного числа подъёмов и спусков; **б)** в общем случае?

Задача 25*. (*Н. Н. Константинов*) Из A в $Б$ ведут две дороги, не пересекающие друг друга и сами себя. Две машины, связанные верёвкой длины 15 м, проехали из A в $Б$ по разным дорогам, не порвав верёвки. Два круглых воза радиуса 8 м выезжают одновременно по разным дорогам, один из A в $Б$, другой из $Б$ в A. Могут ли они разминуться?

Листок №22. Комплексные числа 02.2005

Определение 1. *Комплексное число* z — это выражение вида $z = a + bi$, где a и b — числа из $\mathbb{R}$, а i — *мнимая единица*: символ, квадрат которого равен (-1). Число a называют *вещественной частью* z (пишется $a = \mathrm{Re}\,(z)$), а число b — *мнимой частью* z (пишется $b = \mathrm{Im}\,(z)$). Комплексные числа можно складывать и умножать («раскрывая скобки и приводя подобные»). Множество комплексных чисел обозначают буквой $\mathbb{C}$.

Задача 1. Найдите вещественную и мнимую части суммы и произведения комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$.

Определение 2. Сопоставим каждому комплексному числу $z = a + bi$ вектор (a, b). Длина этого вектора называется *модулем* числа z и обозначается $|z|$. Пусть $z \neq 0$. Угол, отсчитанный против часовой стрелки от вектора $(1, 0)$ до вектора (a, b), называется *аргументом* числа z и обозначается $Arg\,(z)$. (Углы измеряем в радианах.) Аргумент комплексного числа определен с точностью до прибавления числа вида $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент чисел: -4, $1+i$, $1-i\sqrt{3}$, $\sin\alpha + i\cos\alpha$, $\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$.

Задача 3. (*Тригонометрическая форма записи*) Докажите, что для любого ненулевого комплексного числа z имеет место равенство $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = |z|$, $\varphi = Arg\,(z)$.

Задача 4. **а)** Докажите, что сумме комплексных чисел отвечает вектор, равный сумме векторов, отвечающих слагаемым. **б)** Пусть z и w — комплексные числа. Выразите $|zw|$ и $Arg\,(zw)$ через $|z|$, $|w|$, $Arg\,(z)$ и $Arg\,(w)$.

Задача 5. Верно ли, что $|z+w| \leqslant |z|+|w|$ при любых комплексных числах z и w?

Определение 3. Пусть $z = a+bi$ (где $a, b \in \mathbb{R}$). Число $\overline{z} = a-bi$ называется *комплексно-сопряжённым* к z.

Задача 6. Выразите модуль и аргумент числа $\overline{z}$ через модуль и аргумент числа z.

Задача 7. Докажите, что **а)** $|z|^2 = z\overline{z}$ для любого $z \in \mathbb{C}$; **б)** $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$ и $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Задача 8. Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $z \in \mathbb{C}$ и $P(z) = 0$. Докажите, что $P(\overline{z}) = 0$.

Задача 9. Докажите, что **а)** $\mathbb{C}$ — поле; **б)** из любого комплексного числа можно извлечь квадратный корень.

Задача 10. Можно ли ввести на $\mathbb{C}$ отношение порядка $\leqslant$ так, чтобы получилось упорядоченное поле?

Задача 11. Вычислите: **а)** $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; **б)** $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; **в)** $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$; **г)** $(1+i\sqrt{3})^{150}$; **д)** $\frac{(\sqrt{3}+i)}{(1-i)^{30}}$.

Задача 12. Решите уравнения: **а)** $z^2 = i$; **б)** $z^2 = 5-12i$; **в)** $z^2+(2i-7)z+13-i = 0$; **г)** $\overline{z} = z^2$; **д)** $\overline{z} = z^3$.

Задача 13. Вычислите суммы: **а)** $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$; **б)** $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \ldots$

Задача 14. (*Формула Муавра*) Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Задача 15. Найдите суммы: **а)** $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$; **б)** $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi$; **в)** $\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \ldots + \frac{1}{2^n}\sin n\varphi$; **г)** $1 + 2\cos\varphi + 3\cos 2\varphi + \ldots + (n+1)\cos n\varphi$.

Задача 16. Выразите $\sin^4 x$ и $\cos^5 x$ в виде суммы чисел вида $\alpha\sin kx$ и $\beta\cos lx$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $k, l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Задача 17. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Выразите $\cos nx$ и $\sin nx$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Задача 18. Докажите, что многочлен степени n с коэффициентами из $\mathbb{C}$ имеет не более n корней из $\mathbb{C}$.

Задача 19. **а)** Найдите (и нарисуйте) все комплексные корни многочленов: z^2-1, z^3-1, z^4-1, z^5-1, z^6-1.

б) Сколько комплексных корней имеет уравнение $z^n = 1$, где $n \in \mathbb{N}$? Найдите их сумму и произведение.

в) Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — все корни степени n из 1, $\alpha_1 = 1$. Найдите $\alpha_1^s + \ldots + \alpha_n^s$ (где $s \in \mathbb{N}$) и $(1-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1-\alpha_n)$.

Задача 20. Пусть P — многочлен степени k с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Докажите, что среднее арифметическое значений P в вершинах правильного n-угольника равно значению P в центре многоугольника, если $n > k$.

Задача 21. **а)** Пусть $z = (3+4i)/5$. Найдётся ли такое $n \in \mathbb{N}$, что $z^n = 1$? **б)** Докажите, что $\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{4}{3} \notin \mathbb{Q}$.

Задача 22. Пусть $z, v, w \in \mathbb{C}$, причём $z+v+w = z^2+v^2+w^2 = z^3+v^3+w^3 = 0$. Верно ли, что $z^4+v^4+w^4 = 0$?

Задача 23. Нарисуйте множество комплексных чисел z, для которых **а)** $z^n+1 = 0$; **б)** $|z-i| \leqslant 2$; **в)** $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$; **г)** $|z-1| = 2|z-i|$; **д)** $z^2 - \overline{z}^2 = 4$; **е)** $|z-1|-|z+1| \leqslant 3$; **ж)** $|z-1|+|z+1| = 3$; **з)** $z+\bar{z} = |z-1|$.

Задача 24. Каким геометрическим преобразованиям соответствуют следующие отображения: **а)** $z \longmapsto \overline{z}$; **б)** $z \longmapsto z+b$, где $b \in \mathbb{C}$; **в)** $z \longmapsto (\cos\varphi + i\sin\varphi)z$, где $\varphi \in \mathbb{R}$; **г)** $z \longmapsto \lambda z$, где $\lambda \in \mathbb{R}$; **д)** $z \longmapsto wz$, где $w \in \mathbb{C}$.

Задача 25. Пусть карты из задачи 22 листка 19 лежат на координатной плоскости. Докажите, что найдутся такие $q, b \in \mathbb{C}$, что если $z \in \mathbb{C}$ — любая точка на первой карте, то этой же точкой местности на второй карте будет точка $qz+b$. Выразите с помощью q и b точку, изображающую на картах одну и ту же точку местности.

Задача 26. Запишите как функцию комплексного переменного **а)** ортогональную проекцию на ось x; **б)** симметрию относительно оси y; **в)** центральную симметрию с центром A; **г)** поворот на угол φ относительно точки A; **д)** гомотетию с коэффициентом k и центром A; **е)** симметрию относительно прямой $y=3$ со сдвигом на 1 влево; **ж)** поворот, переводящий ось x в прямую $y=2x+1$; **з)** симметрию относительно прямой $y=2x+1$.

Задача 27. Куда отображение $z\longmapsto z^2$ переводит **а)** декартову координатную сетку; **б)** полярную координатную сетку; **в)** окружность $|z+i|=1$; **г)** кошку из листка 20 (см. рис. 1.10)? **д)** Те же вопросы для отображения $z\longmapsto 1/z$.

Задача 28. Куда отображение $z\longmapsto\sqrt{z}$ переводит верхнюю полуплоскость (без границы)?

Задача 29. Куда отображение **а)** $z\longmapsto 1/z$; **б)*** $z\longmapsto 0{,}5(z+1/z)$ переводит $\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\,(z)>0,\ |z|\leqslant 1\}$?

Листок №23. Предел функции 04.2005

Определение 1. Число $x\in\mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $M\subset\mathbb{R}$, если для всякого $\varepsilon>0$ множество $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap M$ бесконечно.

Определение 2. (*Предел функции по Гейне*) Пусть даны множество $M\subseteq\mathbb{R}$, точка a, предельная для множества M, и функция $f\colon M\to\mathbb{R}$. Число $b\in\mathbb{R}$ называется пределом функции f в точке a, если для каждой сходящейся к a последовательности (x_n), все элементы которой отличны от a и принадлежат M, справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=b$. Обозначения: $b=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ или $f(x)\to b$ при $x\to a$ (читается «$f(x)$ стремится к b при x, стремящемся к a»).

Замечания. 1) Значение f в точке a не влияет на существование предела и на его значение.
2) Предел функции определяется только в точках, предельных к её области определения.

Задача 1. Может ли у функции быть два предела в одной точке?

Задача 2. Напишите, что значит, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке a.

Задача 3. Пусть точка a принадлежит области определения функции f и является предельной точкой для этой области. Докажите, что f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда её предел в точке a равен $f(a)$.

Задача 4. Дайте определение предела функции по аналогии с определением 2 из листка 20.

Задача 5. Найдите следующие пределы (если они существуют):

а) $\lim\limits_{x\to1}\{x\}$; **б)** $\lim\limits_{x\to1}[x]$; **в)** $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-6x^2+9x}{x-3}$; **г)** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$; **д)** $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$; **е)*** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Задача 6. Дайте определение **а)** предела функции при $x\to+\infty$;
б) того, что $f(x)$ стремится к $+\infty$, при $x\to a$ (где $a\in\mathbb{R}$ или $a=+\infty$).

Задача 7. Найдите пределы (если они существуют) при $x\to+\infty$ функций из задачи 5.

Задача 8. Сформулируйте и докажите **а)** теоремы о пределе суммы, разности, произведения и отношения двух функций; **б)** «принцип двух милиционеров» для функций

Задача 9. Найдите пределы при $x\to\pm\infty$ функции $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены.

Задача 10. **а)** Пусть функции f и g определены на $\mathbb{R}$, причём $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to A}g(x)=B$. Верно ли, что $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=B$? **б)** Докажите предыдущее утверждение, если $g(A)=B$.

Задача 11. Докажите неравенства: **а)** $\sin x<x$ при $x>0$; **б)** $x<\mathrm{tg}\,x$ при $0<x<\pi/2$.

Задача 12. (*Первый «замечательный» предел*) Докажите, что $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Задача 13. Найдите: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$; **г)** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$; **д)*** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_2 x}{x}$.

Задача 14. Найдите: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; **б)*** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n\in\mathbb{N})$; **в)*** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m,n\in\mathbb{N})$.

Задача 15. Докажите, что: **а)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$; **б)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$;

Задача 16. (*Второй «замечательный» предел*) Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$.

Задача 17. Определите предел слева (справа) функции f в точке a ($\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$; $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$).

Задача 18. Приведите пример функции f, которая в точке $a\in\mathbb{R}$ **а)** имеет разные пределы слева и справа; **б)** имеет предел слева, но не имеет предела справа; **в)** не имеет предела ни справа, ни слева.

Задача 19. Докажите, что функция, **а)** непрерывная на некотором интервале; **б)** монотонная на некотором интервале, имеет предел как слева, так и справа в каждой точке этого интервала.

Задача 20*. Докажите, что монотонная функция, определённая на отрезке, непрерывна во всех точках этого отрезка, за исключением не более чем счётного числа точек.

Задача 21*. Приведите пример функции, определённой на $\mathbb{R}$, не равной тождественно нулю ни на каком интервале, но имеющей в каждой точке нулевой предел.

Задача 22*. **а)** Приведите пример функции, определённой на $\mathbb{Q}$, имеющей в каждой действительной точке бесконечный предел. **б)** Существует ли функция, определённая на $\mathbb{R}$, имеющая в каждой действительной точке бесконечный предел?

Листок №24. Производная 04.2005

Определение 1. Пусть функция f определена на некотором интервале, и пусть точка x_0 принадлежит этому интервалу. *Производной функции f в точке x_0* называется число $f'(x_0)\stackrel{\text{def}}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, в случае, если этот предел существует (тогда говорят, что функция f *дифференцируема* в точке x_0).

Задача 1. Докажите, что $f'(x_0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$.

Задача 2. Для каждой точки $a\in\mathbb{R}$ найдите $f'(a)$, если **а)** $f(x)=c$, где $c\in\mathbb{R}$; **б)** $f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$.

Задача 3. Докажите, что $f'(x_0)=A$ тогда и только тогда, когда найдётся такая функция $o(t)$, что для всех достаточно малых t будет верно $f(x_0+t)=f(x_0)+At+o(t)$, причём $\lim\limits_{t\to 0}o(t)/t=0$.

Задача 4. Верно ли, что функция, дифференцируемая в некоторой точке, непрерывна в этой точке?

Определение 2. Говорят, что функция f *дифференцируема* на интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала. При этом её *производной* называется функция $f'\colon x\mapsto f'(x)$.

Задача 5. Найдите производные функций (там, где они существуют): **а)** $|x|$; **б)** $\frac{1}{x}$; **в)** $\sqrt{x}$; **г)** $x^{3/2}$.

Задача 6. Автомобиль едет по прямой дороге так, что в каждый момент времени t он находится в точке с координатой $s(t)$. Что будет показывать спидометр автомобиля в момент времени t_0?

Задача 7. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности U точки x_0. Для каждой точки $x\in U$, $x\neq x_0$, рассмотрим прямую $l(x)$, проходящую через точки $(x_0,f(x_0))$ и $(x,f(x))$.
а) Если существует предельная прямая для семейства прямых $l(x)$ при $x\to x_0$, то она называется *касательной* к графику функции f в точке x_0. Напишите уравнение касательной.
б) Проверьте, что в случае окружности это определение совпадает с известным из геометрии.

Задача 8. Пусть функции f и g дифференцируемы на некотором интервале. Докажите, что
а) функция $f+g$ тоже дифференцируема на этом интервале и $(f+g)'=f'+g'$;

б) для любой константы C функция Cf тоже дифференцируема на этом интервале и $(Cf)' = Cf'$;
в) функция fg тоже дифференцируема на этом интервале и $(fg)' = f'g + fg'$;
г) функция f/g дифференцируема во всех точках интервала, где $g(x) \neq 0$, и $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.

Задача 9. Найдите производные функций (там, где они существуют): **а)** $a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$; **б)** $\frac{5x+6}{7x+8}$; **в)** $\frac{1}{x^3-5x-2}$; **г)** $\sin x$; **д)** $\cos x$; **е)** $\operatorname{tg} x$; **ж)** $\operatorname{ctg} x$; **з)** $x^{m/n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$; **и)*** e^x.

Задача 10. (*Производная сложной функции*) Пусть $F(x) = f(g(x))$. Докажите, что если g дифференцируема в точке x_0, а f дифференцируема в точке $g(x_0)$, то $F(x)$ дифференцируема в точке x_0, и $F'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Задача 11. (*Производная обратной функции*) **а)** Пусть функция f на некотором интервале имеет обратную функцию g. Докажите, что если f дифференцируема в точке x_0 из этого интервала и $f'(x_0) \neq 0$, то g дифференцируема в точке $f(x_0)$ и $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$. **б)** Объясните геометрический смысл формулы из пункта а).

Задача 12. Найдите производные функций: **а)** $\sin(\cos x)$; **б)** $\arcsin x$; **в)** $\arccos x$; **г)** $\operatorname{arctg} x$; **д)*** $\ln x$; **е)*** a^x, где $a > 0$; **ж)*** x^α.

Задача 13. **а)** Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), и $f'(x_0) > 0$ в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$. Найдется ли такая окрестность U точки x_0, что для всех $x \in U$ если $x > x_0$, то $f(x) > f(x_0)$, а если $x < x_0$, то $f(x) < f(x_0)$?
б)* Верно ли, что f из пункта а) монотонно возрастает в некоторой окрестности точки x_0?

Определение 3. Точка x_0 называется точкой *локального максимума* функции f, если $f(x_0) \geqslant f(x)$ для всех x из некоторой окрестности x_0. Аналогично определяется точка *локального минимума*.

Задача 14. (*Теорема Ферма*) Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Докажите, что если $x \in (a, b)$ — точка локального максимума (минимума) f, то $f'(x) = 0$. Верно ли обратное?

Задача 15. Докажите для всех x: **а)** $x^4 + x^3 \geqslant -\frac{3^3}{4^4}$; **б)** $x^6 - 6x + 5 \geqslant 0$; **в)** $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5 \geqslant 0$.

Задача 16. Найдите наибольшее и наименьшее значение при $x \in [0, 1]$ функций из задачи 15.

Задача 17. Найдите наименьшее значение при $x > 0$: **а)** $x + \frac{1}{x}$; **б)** $x + \frac{1}{x^2}$; **в)** $x^2 + 2x + \frac{4}{x}$.

Задача 18. Какую наибольшую площадь может иметь трапеция, три стороны которой равны 1?

Задача 19. (*Теорема Ролля*) Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), и, кроме того, $f(a) = f(b)$. Докажите, что найдётся такая точка $x \in (a, b)$, что $f'(x) = 0$.

Задача 20. (*Теорема Лагранжа*) Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Докажите, что найдётся такое $x \in (a, b)$, что $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ и объясните геометрический смысл этой теоремы.

Задача 21. Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Докажите, что если для всех $x \in (a, b)$ выполнено: **а)** $f'(x) = 0$, то f постоянна на $[a, b]$. **б)** $f'(x) > 0$, то f возрастает на $[a, b]$.

Задача 22. Докажите для всех $x > 0$: **а)** $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$; **б)** $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$; **в)*** $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Листок №25. Производная. Часть 2 05.2005

Задача 1. Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки a.
а) Пусть для всех $x \in \mathcal{U}$ если $x < a$, то $f'(x) < 0$, и если $x > a$, то $f'(x) > 0$. Докажите, что a — точка строгого локального минимума f. Есть ли аналогичная теорема о локальном максимуме?
б) Пусть $f'(x) < 0$ для всех $x \neq a$ из $\mathcal{U}$. Может ли a быть точкой локального экстремума f?
в)* Пусть a — точка строгого локального минимума f. Найдётся ли такая окрестность точки a, что $f'(x) < 0$ для всех $x < a$ из этой окрестности, и $f'(x) > 0$ для всех $x > a$ из этой окрестности?

Задача 2. Из пункта A, находящегося в лесу в 5 км от прямой дороги, пешеходу нужно попасть в пункт B, расположенный на этой дороге в 13 км от A. Наибольшая скорость пешехода на дороге — 5 км/ч, а в лесу — 3 км/ч. За какое наименьшее время пешеход сможет попасть из A в B?

Задача 3. Найдите точку параболы $y = x^2$, ближайшую к точке $(-1; 2)$.

Задача 4. Найдите на эллипсе $4x^2 + 9y^2 = 36$ точку, касательная в которой образует вместе с осями координат треугольник минимально возможной площади.

Задача 5. Под каким углом пересекаются кривые: **а)** $y = x^2$ и $x = y^2$; **б)** $y = \sin x$ и $y = \cos x$?

Задача 6. Параллельный пучок лучей, падающий на параболу $y = x^2$ по вертикали сверху, отражается от неё по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что все лучи этого пучка после первого отражения пройдут через одну и ту же точку, и найдите эту точку.

Определение 1. Функция $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз* на $(a;b)$, если для каждого отрезка $[x_1;x_2] \subseteq (a;b)$ выполнено условие: график функции f лежит не выше графика прямой L, соединяющей точки $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$, то есть $f(x) \leqslant L(x)$ при любом $x \in [x_1;x_2]$.

Задача 7. Пусть функция f определена и два раза дифференцируема на интервале (a,b). Выясните, какие из следующих условий эквивалентны тому, что f выпукла вниз на (a,b):

а) $\alpha \cdot f(x) + (1-\alpha)\cdot f(y) \geqslant f(\alpha \cdot x + (1-\alpha)\cdot y)$ для любых $x, y \in (a,b)$ и любого $\alpha \in [0,1]$;

б) надграфик f на $(a;b)$, то есть $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a,b), y \geqslant f(x)\}$ — выпуклое множество;

в) f' монотонно неубывает на интервале (a,b);

г) $f''(x) \geqslant 0$ для любого $x \in (a,b)$;

д) любая касательная l к графику f расположена не выше его: $f(x) \geqslant l(x)$ при всех $x \in (a,b)$;

е) (*неравенство Йенсена*) $\frac{\alpha_1 f(x_1)+\dots+\alpha_n f(x_n)}{\alpha_1+\dots+\alpha_n} \geqslant f\left(\frac{\alpha_1 x_1+\dots+\alpha_n x_n}{\alpha_1+\dots+\alpha_n}\right)$ для любых чисел $x_1, \ldots, x_n \in (a,b)$ и любых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$?

Задача 8. Дайте эквивалентные определения функции, выпуклой вверх на (a,b) (можно устно).

Задача 9. Найдите промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз следующих функций:
а) $\sin x$; **б)** x^3; **в)** x^4; **г)** $\sqrt{|x|}$; **д)** $5x^4 + 7x^3$; **е)** $\sin x + \cos x$; **ж)** $(x(x-1))^{-1}$; **з)** $x^2 + \frac{1}{x}$.

Задача 10. Что больше: $\sqrt[3]{60}$ или $2 + \sqrt[3]{7}$?

Задача 11. Докажите неравенства: **а)** $\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{n}$ для любых чисел $x_1, \ldots, x_n$;
б) (*неравенство Коши-Буняковского*) $(x_1y_1 + \dots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$;
в)* $\sin x \sin y \sin z \leqslant 3\sqrt{3}/8$, если x, y, z — углы некоторого треугольника.

Определение 2. Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции f, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что f выпукла вниз на $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и выпукла вверх на $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ (или наоборот).

Задача 12. Пусть функция f дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0.

а) Пусть x_0 — точка перегиба функции f. Верно ли, что $f''(x_0) = 0$? Верно ли обратное?

б) Докажите, что x_0 — точка перегиба f если и только если f'' меняет знак в точке x_0.

Задача 13. Нарисуйте графики функций из задачи 9 и найдите точки перегиба этих функций.

Задача 14. Пусть f дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причём $f'(x_0) = 0$ и **а)** $f''(x_0) > 0$; **б)** $f''(x_0) < 0$. Имеет ли f в x_0 локальный экстремум, и если да, то какого типа?

Определение 3. Прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $f(x) - (kx + b) \to 0$ при $x \to +\infty$. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0 слева, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$.

Задача 15. Дайте определение асимптот графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to x_0 + 0$.

Задача 16. Верно ли, что график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда существуют пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$?

Задача 17. Постройте (с полным исследованием) графики следующих функций:
а) $x+\frac{1}{x}$; **б)** $\frac{x+3}{2-x}$; **в)** $\sqrt{x(1+x)}$; **г)** $x\operatorname{arctg}x$; **д)** $\frac{x}{(x+1)^2}$; **е)** $\sqrt[3]{9-x^3}$; **ж)** $\frac{x^3}{1-x^2}$; **з)*** $\frac{\cos x}{\cos 2x}$.

Листок №26. **Арифметика остатков** 09.2005

Определение 1. Пусть $m\in\mathbb{N}$. Говорят, что *a сравнимо с b по модулю m*, если $a-b$ делится на m. Обозначение: $a\equiv b \pmod m$. Для каждого целого r множество целых чисел, сравнимых с r по модулю m, называется *классом вычетов по модулю m* и обозначается через $[r]_m$. Если известно, о каком числе m идёт речь, мы будем иногда писать $[r]$ вместо $[r]_m$. Множество всех классов вычетов по модулю m обозначается $\mathbb{Z}_m$. Класс $[0]_m$ называется *нулевым* классом.

Задача 1. Докажите, что $[r]_m=\{mq+r \mid q\in\mathbb{Z}\}$. Сколько элементов в множестве $\mathbb{Z}_m$?

Определение 2. Для любых классов вычетов $[r]$ и $[s]$ по модулю m определим их сумму и произведение, положив $[r]+[s]=[r+s]$ и $[r]\cdot[s]=[r\cdot s]$.

Задача 2. Докажите, что сложение и умножение в $\mathbb{Z}_m$ определены корректно.

Замечание. Можно представлять себе $\mathbb{Z}_m$ как множество чисел $0, 1, 2, \ldots, m-1$, которые складываются и умножаются «по модулю m» (как остатки от деления на m).

Задача 3. Составьте таблицы сложения и умножения в $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ и $\mathbb{Z}_4$.

Задача 4. Вычислите сумму всех элементов $\mathbb{Z}_m$.

Задача 5. Пусть p — простое число. Докажите, что C_p^k делится на p при всех таких целых k, что $1<k<p$. Докажите, что в $\mathbb{Z}_p$ выполнено тождество $([a]+[b])^p=[a]^p+[b]^p$.

Задача 6. Приведите пример, когда произведение двух ненулевых классов вычетов по модулю m является нулевым классом. Такие классы называют *делителями нуля* в $\mathbb{Z}_m$.

Задача 7. Докажите, что целое число $m>1$ простое если и только если в $\mathbb{Z}_m$ нет делителей нуля.

Задача 8. Докажите, что целое число $m>1$ является простым тогда и только тогда, когда для любого ненулевого класса вычетов $[a]_m$ найдётся такой $[b]_m$, что $[a]_m\cdot[b]_m=[1]_m$ (такой класс $[b]$ называется *обратным* (по умножению) к классу $[a]$).

Задача 9. Пусть p — простое число. **а)** Найдите все такие $[a]$ из $\mathbb{Z}_p$, что $[a]^2=[1]$ (то есть, $[a]$ обратен (по умножению) сам себе). **б)** Чему равно произведение всех ненулевых элементов $\mathbb{Z}_p$?

Задача 10. (*Теорема Вильсона*[5]) Докажите, что натуральное число $m>1$ является простым тогда и только тогда, когда $(m-1)!+1\equiv 0 \pmod m$.

Задача 11. (*Малая теорема Ферма*[6]) Пусть p — простое число, a — целое, и пусть $(a,p)=1$.
а) Домножим все элементы $\mathbb{Z}_p$ на $[a]$. Верно ли, что снова получатся все элементы $\mathbb{Z}_p$?
б) Докажите, что $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$. **в)** Докажите, что $b^p\equiv b \pmod p$ при любом целом b.

Задача 12*. **а)** Докажите, что если x^2+1 делится на нечётное простое число p, то p имеет вид $4k+1$. **б)** Докажите, что простых чисел вида $4k+1$ бесконечно много.

Задача 13*. **а)** Числа p и q простые, $2^p-1\,\vdots\,q$. Докажите, что $q-1\,\vdots\,p$. **б)** Простое ли $2^{13}-1$?

Задача 14*. Изобразим элементы $\mathbb{Z}_n$ точками, зафиксируем какой-либо класс $[a]\in\mathbb{Z}_n$, и из каждой точки $[x]\in\mathbb{Z}_n$ проведём стрелку в точку $[ax]$. Докажите, что если $[a]$ обратим (по умножению), то на этой картинке движение по стрелкам распадается на непересекающиеся циклы, причём каждый цикл, содержащий хоть одно обратимое число, весь состоит из обратимых чисел, и все циклы, состоящие из обратимых чисел, имеют одинаковую длину.

[5] Александр Вильсон (1714 – 1786) — шотландский астроном и математик-любитель.
[6] Пьер Ферма (1602 – 1665) — великий французский математик, один из основоположников теории чисел.

Задача 15*. (*Теорема Эйлера*[7]) Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\varphi(m)$ — количество натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с m. Докажите, что $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, если $a \in \mathbb{Z}$ и $(a, m) = 1$.

Задача 16*. **а)** Пусть p — простое число, $\alpha \in \mathbb{N}$. Найдите $\varphi(p^\alpha)$.
б) Как найти $\varphi(n)$ по каноническому разложению n на простые множители?

Задача 17*. Пусть a_n есть число, образованное последними десятью цифрами числа 2^n. Докажите, что последовательность (a_n) периодична (с некоторого момента), и найдите длину периода.

Задача 18. (*Китайская теорема об остатках*) Пусть натуральные числа $m_1, \ldots, m_k$ попарно взаимно просты. Докажите, что для любых целых чисел $b_1, \ldots, b_k$ существует такое число x, что $x \equiv b_1 \pmod{m_1}$, …, $x \equiv b_k \pmod{m_k}$, и это x можно выбрать так, что $0 \leqslant x < m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k$.

Задача 19*. Существует ли **а)** сколь угодно длинная; **б)** бесконечная арифметическая прогрессия, каждый член которой — степень натурального числа с целым показателем, большим 1?

Листок №27. Преобразования плоскости 09.2005

Движения

Определение 1. *Преобразованием* множества M называется взаимно-однозначное отображение M на себя. *Композиция* $f \circ g$ преобразований g и f определяется формулой $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Определение 2. *Движением* или *перемещением* называется преобразование плоскости, не меняющее расстояния между точками. Обозначим тождественное преобразование плоскости через E, параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ через $T_{\vec{a}}$, осевую симметрию относительно прямой l через S_l, центральную симметрию относительно точки O через Z_O, поворот вокруг точки O на угол α через R_O^α.

Задача 1. Найдите композиции: **а)** $T_{\vec{x}} \circ T_{\vec{y}}$; **б)** $Z_A \circ Z_B$; **в)** $S_l \circ S_m$; **г)** $T_{\vec{x}} \circ Z_A$; **д)** $S_l \circ R_O^\alpha$, где $O \in l$; **е)** n центральных симметрий (с разными центрами).

Задача 2. При каких n можно однозначно восстановить n-угольник по серединам сторон?

Задача 3. Пусть точки A, B и C не лежат на одной прямой. Докажите, что движение однозначно определяется тем, куда оно переводит эти точки.

Задача 4. Верно ли, что для любых движений F, G и H **а)** $F \circ G = G \circ F$; **б)** $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$?

Определение 3. *Скользящей симметрией* называется движение, являющееся композицией осевой симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси. (Если вектор нулевой, получается обычная осевая симметрия, мы будем рассматривать её как частный случай скользящей симметрии.)

Задача 5. Докажите, что композиция осевой симметрии и параллельного переноса на произвольный вектор — скользящая симметрия.

Определение 4. *Неподвижной точкой* преобразования F называется такая точка x, что $F(x) = x$.

Задача 6. **а)** Найдите множество неподвижных точек для тождественного преобразования, поворота, параллельного переноса, симметрии и скользящей симметрии (с ненулевым вектором).
б) Докажите, что множество неподвижных точек движения плоскости есть либо пустое множество, либо одна точка, либо прямая, либо вся плоскость.

Задача 7. (*Теорема Шаля*) Докажите, что любое движение плоскости есть поворот, параллельный перенос или скользящая симметрия.

[7] Леонард Эйлер (1707 – 1783) — швейцарец, работавший главным образом в России и в Германии. Крупнейший математик XVIII в., внёсший значительный вклад во все разделы математики.

Задача 8. Докажите, что любое движение плоскости можно представить как композицию не более трёх осевых симметрий.

Задача 9. Пусть композиция m осевых симметрий равна композиции n осевых симметрий. Докажите, что $(n-m)$ чётно.

Преобразования подобия

Определение 5. *Преобразованием подобия* с коэффициентом $k>0$ называется преобразование плоскости, меняющее расстояния между точками ровно в k раз. *Гомотетия* H_O^k с центром в точке O и коэффициентом $k\neq 0$ переводит каждую точку A в такую точку A', что $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$.

Задача 10. Какое преобразование является композицией двух гомотетий с коэффициентами k_1 и k_2, если **а)** $k_1k_2=1$; **б)** $k_1k_2\neq 1$?

Задача 11. **а)** Даны два параллельных отрезка разной длины. Укажите все гомотетии, переводящие первый отрезок во второй.
б) (*Замечательное свойство трапеции*) Докажите, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Задача 12. Какое преобразование является композицией гомотетии и параллельного переноса?

Задача 13. **а)** Даны две окружности. Укажите все гомотетии, переводящие первую во вторую.
б) Даны три окружности различных радиусов. Для каждой пары окружностей нашли точку пересечения их общих внешних касательных. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.

Задача 14. В окружности проведены два радиуса. Постройте хорду, которая делится этими радиусами на три равные части.

Задача 15. Докажите, что любое преобразование подобия есть композиция гомотетии и движения.

Задача 16. Можно ли перевести **а)** любую параболу в любую другую параболу преобразованием подобия; **б)** график функции $y=\sin x$ в график функции $y=\sin^2 x$ преобразованием подобия? А гомотетией?

Задача 17. Докажите, что всякое преобразование подобия с коэффициентом, не равным 1,
а) имеет неподвижную точку; **б)** является композицией гомотетии и поворота с общим центром или композицией гомотетии и симметрии относительно оси, проходящей через центр гомотетии.

Задача 18. На стене висят двое часов, одни побольше, другие поменьше. Докажите, что прямые, соединяющие концы минутных стрелок в разные моменты времени, проходят через одну точку.

Листок №28. Интеграл 10.2005

Определение 1. Интегралом функции f на отрезке $[a,b]$ называется площадь под графиком функции f на этом отрезке (при этом на участках, где функция отрицательна, площадь считается со знаком «минус»). Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Попробуйте дать строгое определение интеграла и решите следующие задачи.

Задача 1. Найдите: **а)** $\int\limits_3^7 5\,dx$; **б)** $\int\limits_{-1}^2 x\,dx$; **в)** $\int\limits_{-2}^1 |x|\,dx$; **г)** $\int\limits_0^1 x^2\,dx$; **д)** $\int\limits_0^1 (x^2-3x+1)\,dx$.

Задача 2. Докажите, что

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 3. Пусть c — некоторое число. Докажите, что

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Задача 4. Пусть $a < b < c$. Докажите, что

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Задача 5. Пусть при любом $x \in [a, b]$ выполнено $f(x) \leqslant g(x)$. Докажите, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 6. **а)** У любой ли функции, определённой на $[a; b]$, есть интеграл на этом отрезке?
б) А если функция непрерывна?

Задача 7. Пусть F — многочлен, f — его производная. Докажите, что тогда
а) $F(t) = \int\limits_0^t f(x)\,dx + F(0)$; **б)** $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$;

Задача 8. Пусть функция f непрерывна (на $\mathbb{R}$). Зафиксируем точку a и рассмотрим функцию $F(t) = \int\limits_a^t f(x)\,dx$ от переменной t.
а) Докажите, что функция F непрерывна.
б) Верно ли, что функция F дифференцируема? Если верно, то найдите производную.

Задача 9*. У каких функций, определённых на отрезке $[a; b]$, существует интеграл на этом отрезке (по Вашему определению)? Попробуйте найти как можно более широкий класс функций, у которых интеграл существует (например, интегрируемы ли многочлены, непрерывные функции, …?).

Листок №29. **Логарифм, экспонента и число e** 10.2005

Задача 1. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две такие функции, что $(F_1(x))' = (F_2(x))'$. Верно ли, что найдётся константа C, такая, что $F_1(x) = F_2(x) + C$?

Определение 1. *Натуральным логарифмом* положительного числа t назовем интеграл $\int\limits_1^t \frac{1}{x}\,dx$. Обозначение: $\ln t$.

Задача 2. Докажите, что $(\ln t)' = 1/t$.

Задача 3. Докажите, что натуральный логарифм — монотонно возрастающая функция.

Задача 4. **а)** Пусть a — положительное число. Найдите производную функции $\ln at$.
б) Докажите, что $\ln ab = \ln a + \ln b$ для любых положительных чисел a и b.

Задача 5. Докажите, что $\ln t^r = r \ln t$ при любом рациональном r.

Задача 6. Докажите, что $\ln t$ неограниченно возрастает при $t \to +\infty$.

Задача 7. Докажите, что уравнение $\ln t = a$ имеет единственное (положительное) решение при любом $a \in \mathbb{R}$ (при $a = 1$ это решение обозначается буквой e).

Задача 8. а) Пусть f — непрерывная функция. Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\right)$ (если указанный справа предел существует и вместе с последовательностью (x_n) принадлежит области определения функции f).

б) Докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+1/n)}{1/n} = 1$, и выведите отсюда, что $e = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+1/n)^n$, то есть новое определение числа e совпадает со старым.

Задача 9. Докажите, что функция $y = \ln t$ имеет обратную функцию (обозначим ее $E(y)$). Где определена эта функция? Непрерывна ли она? Как ведет себя эта функция при $y \to -\infty$ и при $y \to +\infty$?

Задача 10. Докажите, что $E(a)\cdot E(b) = E(a+b)$ при любых a и b из $\mathbb{R}$.

Задача 11. Докажите, что $E(r) = e^r$ при любом рациональном r.

Определение 2. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Определим x-ю степень числа e формулой $e^x = E(x)$. В результате
1) получилась непрерывная на $\mathbb{R}$ функция,
2) для рациональных x определение e^x эквивалентно известному из алгебры,
3) $e^a e^b = e^{a+b}$ при любых a и b из $\mathbb{R}$.

Задача 12. Найдите производную функции e^x.

Задача 13. Докажите, что $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+x/n)^n$.

Задача 14. Пусть a — положительное число. Определите для каждого $x \in \mathbb{R}$ число a^x так, чтобы a^x была непрерывной функцией от x, причём для рациональных чисел x определение a^x было эквивалентно уже известному из алгебры.

Задача 15. Докажите, что $a^x a^y = a^{x+y}$ при любых x и y из $\mathbb{R}$.

Задача 16. Найдите производную функции a^x.

Определение 3. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция $x \mapsto x^\alpha$, определённая на множестве $\mathbb{R}_+$, называется *степенной функцией*, а число α называется *показателем степени*.

Задача 17. Представьте степенную функцию в виде композиции показательной и логарифмической функций.

Задача 18. Найдите производную функции x^α, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Задача 19. Найдите все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех $x, y \in \mathbb{R}$ условию **а)** $f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$; **б)** $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$; **в)** $f(x\cdot y) = f(x) + f(y)$.

Задача 20*. Сколько решений имеет уравнение $\log_{1/16} x = \left(\dfrac{1}{16}\right)^x$?

Листок №30. **Интеграл 2** 11.2005

Определение 1. *Разбиением отрезка* $[a,b]$ называется всякий конечный набор точек $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ с условием $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Разность $x_i - x_{i-1}$ обозначается Δx_i.

Определение 2. Пусть σ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, f — функция, ограниченная на этом отрезке. Положим $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Числа $s_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$ и $S_\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ называются соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу* функции f при разбиении σ.

Задача 1. Объясните геометрический смысл верхней и нижней сумм Дарбу и «нарисуйте» их для функций:
а) $f(x) = x$ на отрезке $[0,1]$ при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{4} \mid i = 0, \ldots, 4\}$;
б) $f(x) = (x-1)^2$ на отрезке $[0,2]$ при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{4} \mid i = 0, \ldots, 8\}$.

Задача 2. Можно ли исключить из определения 2 условие ограниченности функции f на отрезке $[a,b]$?

Задача 3. Найдите нижние и верхние суммы Дарбу при разбиении $\sigma = \{\frac{i}{n} \mid i = 0, \ldots, n\}$ отрезка $[0, 1]$ функций **а)** $f(x) = x$; **б)** $f(x) = x^2$; **в)** $f(x) = \sin \pi n x$.

Задача 4. Что происходит с суммами Дарбу при добавлении к разбиению новых точек?

Задача 5. Докажите, что любая верхняя сумма Дарбу функции не меньше любой её нижней суммы Дарбу.

Задача 6. Докажите, что для любой ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции f существуют $I_* = \sup s_\sigma$ и $I^* = \inf S_\sigma$, где супремум и инфимум берутся по всем разбиениям σ отрезка. Сравните I_* и I^*. Эти числа называются *нижним и верхним интегралами Дарбу* функции f на отрезке $[a, b]$.

Задача 7. Найдите I_* и I^* для **а)** $f(x) = x$ на $[0, 1]$;
б) $f(x) = x^2$ на $[0, 1]$;
в) функции Дирихле на отрезке $[a, b]$.

Определение 3. Функция f называется *интегрируемой (по Риману)* на отрезке $[a, b]$, если она ограничена на этом отрезке, и $I_* = I^*$. Обозначение: $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Число $I_* = I^*$ называется *определённым интегралом (Римана)* функции f на отрезке $[a, b]$. Обозначение: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Задача 8. Верно ли, что всякая ограниченная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке?

Задача 9. Докажите, что функция, монотонная на некотором отрезке, интегрируема на нём.

Задача 10. **а)** Докажите, что интеграл от неотрицательной функции неотрицателен.
б) Верно ли, что если интеграл функции равен нулю, то и сама функция тождественно равна нулю?
в) А если эта функция неотрицательна?
г) А если эта функция неотрицательна и непрерывна?
д)* Верно ли, что интеграл от строго положительной функции строго больше нуля?

Задача 11. Если $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, то $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$, и выполнено равенство

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 12. Если $f \in \mathcal{R}([a, b])$, $c \in \mathbb{R}$, то $cf \in \mathcal{R}([a, b])$, и выполнено равенство

$$\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Задача 13. Если $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ и при любом $x \in [a, b]$ выполнено $f(x) \leqslant g(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Задача 14. Если $f \in \mathcal{R}([a, b])$ и для любого $x \in [a, b]$ выполнено $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b - a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a).$$

Задача 15. **а)** Докажите, что $I_* = I^* \iff \inf_\sigma(S_\sigma - s_\sigma) = 0$.

б) Если $f \in \mathcal{R}([a,b])$, то $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$, и выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Задача 16. Если $f \in \mathcal{R}([a,b])$ и $[c,d] \subset [a,b]$, то $f \in \mathcal{R}([c,d])$.

Задача 17. Пусть $a < b < c$. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на двух из трёх отрезков $[a,b]$, $[b,c]$ и $[a,c]$, то она интегрируема и на третьем, причём

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$

Определение 4. Функция f называется *равномерно непрерывной* на множестве M, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любых $x, y \in M$ таких, что $|x-y| < \delta$, выполнено $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Задача 18. Если функция равномерно непрерывна, то она непрерывна.

Задача 19. (*Теорема Кантора*) Докажите, что функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нём.

Задача 20. Верно ли утверждение, аналогичное теореме Кантора, для функции, заданной на **а)** интервале; **б)** прямой?

Задача 21. Докажите, что непрерывная на отрезке функция интегрируема на нём.

Задача 22. Докажите интегрируемость на отрезке

а) ограниченной функции с конечным числом точек разрыва на этом отрезке;

б)* ограниченной функции со счётным числом точек разрыва на этом отрезке.

Листок №31. Неопределённый интеграл 11.2005

Определение 1. Пусть f — функция, определённая на некотором конечном или бесконечном интервале. Её *первообразная* — это такая дифференцируемая на этом интервале функция F, что $F' = f$. Словосочетание *неопределённый интеграл* — синоним слова *первообразная*. Первообразная функции f будет обозначаться $\int f(x)\,dx$ (при этом $\int f(x)\,dx$ определён не однозначно, а лишь с точностью до прибавления константы).

Задача 1. Приведите пример функции, не имеющей ни одной первообразной.

Задача 2. **а)** Докажите, что у каждой непрерывной функции существует первообразная.

б)* Приведите пример разрывной функции, у которой существует первообразная.

Задача 3. Пусть на некотором интервале существуют неопределённые интегралы $\int f(x)\,dx$ и $\int g(x)\,dx$. Тогда для любых постоянных α и β на этом интервале существует неопределённый интеграл $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ и $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx$.

Задача 4. Найдите первообразные следующих функций: **а)** $f = 1$; **б)** $f = x$; **в)** $f = x^k$, $k \in \mathbb{N}$; **г)** $f = 1/x$; **д)** $f = x^k$, $k \in \mathbb{Z}$; **е)** $f = e^x$; **ж)** $f = \sin x$; **з)** $f = \cos x$; **и)** $f = \operatorname{tg} x$; **к)** $f = \operatorname{ctg} x$.

Задача 5. (*Формула Ньютона-Лейбница*) Пусть f — непрерывная функция и F — её первообразная. Докажите, что $\int\limits_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$.

Задача 6. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной дугой синусоиды.

Формула замены переменных

Задача 7. Пусть $\int f(x)\,dx = F(x)$. Докажите, что $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$.

Задача 8. Пусть $\omega(x)$ — дифференцируемая функция с непрерывной производной. Пусть f — непрерывная функция, и $\int f(x)\,dx = F(x)$. Докажите, что существует $\int f(\omega(x))\omega'(x)\,dx$ и $\int f(\omega(x))\omega'(x)\,dx = F(\omega(x))$.

Задача 9. Вычислите: **а)** $\int e^{e^x+x}\,dx$; **б)** $\int xe^{x^2}\,dx$; **в)** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$; **г)** $\int \sin x\cos x\,dx$; **д)** $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$.

Задача 10. **а)** Пусть $\omega(x)$ монотонна и дифференцируема на отрезке $[a,b]$, а её производная $\omega'(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Пусть ещё $\omega(a)=c$, $\omega(b)=d$. Докажите, что $\int\limits_c^d f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(\omega(x))\omega'(x)\,dx$ для любой непрерывной на отрезке $[c;d]$ функции f. **б)** Верно ли утверждение пункта а), если $\omega(x)$ не является монотонной?

Задача 11. Вычислите интегралы **а)** $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; **б)** $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

Интегрирование по частям

Задача 12. **а)** Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции. Пусть существует интеграл $\int u(x)v'(x)\,dx$. Докажите, что существует интеграл $\int u'(x)v(x)\,dx$ и $\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$.

б) Пусть $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на $[a,b]$. Докажите, что $\int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx$.

Задача 13. Найдите ($k\in\mathbb{N}$): **а)** $\int \ln x\,dx$; **б)** $\int x^k e^x\,dx$; **в)** $\int e^x\sin x\,dx$; **г)** $\int \ln^k x\,dx$; **д)** $\int\limits_0^\pi x\sin x\,dx$.

Задача 14. (*Формула Тейлора*) Пусть $f(x)$ — функция с непрерывной $n{+}1$ производной. Докажите, что $f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$.

Разные задачи

Задача 15. **а)** (*Интегральный признак сходимости*) Пусть $f\colon [1,+\infty)\to\mathbb{R}$ неотрицательна, монотонна и непрерывна. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\int\limits_1^x f(t)\,dt$. **б)** При каких $s>0$ сходится ряд $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$? **в)** Найдите $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \ln t\,dt$.

Задача 16. Пусть M — максимум $|f'|$ на отрезке $[0;2\pi]$, $n\in\mathbb{N}$. Докажите, что $\left|\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\right| \leqslant 2\pi M/n$.

Задача 17. **а)** Найдите точную верхнюю грань чисел $\int\limits_0^1 xf(x)\,dx$ по всем непрерывным неотрицательным на $[0;1]$ функциям f, для которых $\int\limits_0^1 f(x)\,dx \leqslant 2$. **б)** Каким будет ответ, если не требовать неотрицательность f?

Задача 18. Разделите отрезок $[-1;1]$ на черные и белые отрезки так, чтобы сумма определённых интегралов произвольного многочлена степени n по белым отрезкам была равна сумме определённых интегралов этого же многочлена по чёрным отрезкам, если **а)** $n=1$; **б)** $n=2$; **в)*** n — любое натуральное число.

Листок №32. Формула Тейлора 12.2005

Определение 1. Говорят, что функция $f(x)$ есть «о маленькое» от функции $g(x)$ (при $x \to a$), если существует такая функция $\alpha(x)$, что $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ и $f(x) = g(x)\cdot\alpha(x)$. Обозначение: $f(x) = o(g(x))$.

Задача 1. Докажите, что $\sin x = o(1)$ и $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$; $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$.

Определение 2. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется n раз непрерывно дифференцируемой, если на M существуют и непрерывны производные $f', f'', \ldots, f^{(n)}$. Множество таких функций обозначают $C^n(M)$. Множество функций, дифференцируемых на M любое число раз, обозначают $C^\infty(M)$.

Задача 2. Пусть $f \in C^n(\mathcal{U}_\varepsilon(x_0))$, $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$. Докажите, что

а) для любого $k < n$ и для любого $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ существует такое $\alpha \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$, что $f^{(k)}(x) = (x - x_0)f^{(k+1)}(\alpha)$;

б) для любого $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ существуют такие $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$, что

$$f(x) = (x - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\ldots(x_{n-1} - x_0)f^{(n)}(x_n);$$

в) $f(x) = o((x - x_0)^n)$.

Задача 3. Пусть $f \in C^n(\mathcal{U}_\varepsilon(x_0))$. Докажите, что первые n производных в точке x_0 многочлена

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

совпадают с первыми n производными в точке x_0 функции $f(x)$.

Задача 4. **а)** Пусть $f \in C^n(\mathcal{U}_\varepsilon(x_0))$. Докажите, что при любом $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ справедливо следующее равенство:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

(оно называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).

б) Докажите, что выполнение равенства пункта а) при любом $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ означает в случае $n = 0$ непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0, а в случае $n = 1$ — дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0.

Задача 5. **а)** Пусть $f \in C^{n+1}(\mathcal{U}_\varepsilon(x_0))$. Докажите, что для любого $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ существует такое $\alpha \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$, что справедливо следующее равенство:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

(оно называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

б) Пусть $f \in C^\infty(\mathcal{U}_\varepsilon(x_0))$. Пусть $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ и существует такое число $c > 0$, что при любом $\alpha \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ и при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|f^{(n)}(\alpha)| < c$. Докажите, что тогда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

(т. е. стоящий справа ряд (называемый рядом Тейлора с центром в x_0 функции f) сходится к $f(x)$.)

Задача 6. Напишите ряд Тейлора с центром в $\pi/6$ функции $\sin x$. Сходится ли он к $\sin x$ при $x \in \mathbb{R}$?

Задача 7. Напишите ряды Тейлора с центром в нуле для следующих функций: **а)** e^x; **б)** a^x $(a > 0)$; **в)** $\sin x$; **г)** $\cos x$; **д)** $\frac{1}{1-x}$; **е)** $\ln(1+x)$; **ж)** $(1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; **з)*** $\operatorname{arctg} x$; **и)*** $\arcsin x$; **к)*** $\frac{1}{1+x^2}$.

Задача 8*. Исследуйте сходимость полученного ряда Тейлора к соответствующей функции при $x \in \mathbb{R}$ в каждом из пунктов задачи 7.

Задача 9. **а)** Докажите, что $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$. **б)** Докажите, что $e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}) < \frac{3}{(n+1)!}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и вычислите e с точностью до 10^{-5}. **в)** Докажите, что $|\sin x - (x - \frac{x^3}{6})| < 10^{-5}$ при $|x| < 1/4$.

Задача 10. Вычислите пределы: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(x+1)}{x^3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x}$.

Задача 11. Пусть $f(x)=e^{-1/x^2}$ при $x\neq 0$, $f(0)=0$. Найдите для f ряд Тейлора с центром в нуле.

Задача 12. Пусть $f\in C^\infty(\mathcal{U}_\varepsilon(0))$. Верно ли, что ряд Тейлора с центром в нуле для функции f **а)** сходится при всех x из $\mathcal{U}_\varepsilon(0)$? **б)** если сходится при некотором x из $\mathcal{U}_\varepsilon(0)$, то обязательно к $f(x)$?

Задача 13*. Перестановка $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ чисел $1,2,\dots,n$ называется *змеёй* (длины n), если выполнены неравенства $x_1<x_2>x_3<x_4>\dots$ (Например, при $n=2$ есть только одна змея $1<2$, при $n=3$ две: $1<3>2$ и $2<3>1$.) Пусть k_n — число змей длины n. **а)** Найдите рекуррентную формулу для вычисления k_n. **б)** Пусть $K(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}k_n\frac{x^n}{n!}$. Докажите, что $2K'(x)=1+K^2(x)$ и найдите $K(x)$, решив это уравнение. **в)** Докажите, что ряд Тейлора тангенса есть $\operatorname{tg} x = 1\frac{x}{1!}+2\frac{x^3}{3!}+16\frac{x^5}{5!}+\dots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}k_{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

Листок №33. Приложения математического анализа 02.2006

Задача 1. Спидометр на велосипеде считывает время, за которое колесо совершает один оборот. Какую величину в действительности он показывает и как он её получает?

Задача 2. На координатной плоскости дан единичный отрезок AB. Для каждого α из промежутка $[0;\pi]$ пусть $f(\alpha)$ — длина проекции отрезка AB на прямую, выходящую из начала координат под углом α к оси абсцисс. *Вариацией* AB называется среднее значение проекций AB по всем направлениям, то есть число
$$K=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\alpha)\,d\alpha.$$
Найдите K.

Задача 3. **а)** Пусть точка движется по прямой так, что в момент времени t она имеет координату $x(t)$. Определите скорость и ускорение точки в момент времени t_0. Какой должна быть функция $x(t)$?

б) Шпанская мушка летает по комнате так, что расстояние от неё до двух соседних стен и пола в момент времени t с — это $x(t)$ м, $y(t)$ м и $z(t)$ м соответственно. Найдите скорость мушки.

в) Пусть мушка летает по окружности радиуса R со скоростью v. Найдите её ускорение.

г) Пусть $x(t)=4t$ м, $y(t)=2t^2$ м, $z(t)=\frac{2t^3}{3}$ м. Найти расстояние, которое пролетит мушка за минуту.

д)* Найти длину эллипса $x(t)=a\cos t$, $y(t)=b\sin t$.

е) Напишите формулу длины кривой $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $t\to(x_1(t),\dots,x_n(t))$, где функции x_i дифференцируемы. Ответ обоснуйте.

Задача 4. **а)** Найти площадь под графиком фукции $\sqrt{x}$ между точками $x_0=0$ и $x_1=20$.

б) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $ax=y^2$, $ay=x^2$.

Задача 5. Пусть пара дифференцируемых функций $(x(t),y(t))$, $0\leqslant t\leqslant T$ задаёт замкнутую несамопересекающуюся кривую, причём для любого x_0 существуют не более 100 чисел t_i, таких что $x(t_i)=x_0$. Кривая ограничивает область площади S. Доказать, что
$$S=\left|\int\limits_0^T y(t)x'(t)dt\right|.$$

Задача 6. Докажите, что кривая $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$ является циклоидой и найдите площадь одной арки циклоиды.

Задача 7. Найти массу проволоки длиной 100 м, если известно что плотность проволоки на расстоянии x м от конца равна $\rho(x)$ кг/м.

Задача 8. Пусть на прямой установлено несколько точечных весов с массами m_i и координатами x_i. Найти центр масс этой системы.

Задача 9. Найти центр масс стержня длины 10 м, если его плотность изменяется по закону $\rho(x) = 6 + 0{,}3x$ (кг/м), где x — расстояние до одного из его концов.

Определение 1. Пусть для каждой пары $(x, p) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ определено число $f(x, p)$. Тогда говорят, что на множестве Ω задана функция двух переменных x и p.

Задача 10. Определите непрерывность в точке для функций двух переменных.

Определение 2. Пусть на множестве $\{(x, p) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ p \in [\varphi(x), \psi(x)]\}$ задана непрерывная ограниченная функция $f(x, p)$. Тогда можно определить интеграл с параметром:

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, p)\, dp.$$

Задача 11. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a р., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости с коэффициентом пропорциональность α. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным, то есть затраты на один километр пути будут минимальными?

Задача 12. Найти массу квадратной пластины размера 1×1, если её плотность на расстоянии x и y от сторон равна $x^2y + y^2x + x^3 \cos y$.

Задача 13. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = c^2x$, $z = 0$.

Задача 14. Доказать, что объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant y(x)$, где $y(x)$ — непрерывная функция, равен $V = 2\pi \int\limits_a^b xy(x)\, dx$.

Задача 15. **а)** Найти объём шара радиуса R.

б) Определить центр масс однородного полушария радиуса R.

в) Найти площадь сферы радиуса R.

г)* Найти объём четырёхмерного шара радиуса R (то есть фигуры, заданной уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leqslant R^2$).

д)* Найти объём пятимерного шара радиуса R.

е)* Найти объём шестимерного шара радиуса R.

Задача 16. С какой силой материальная бесконечная прямая постоянной плотности μ_0 притягивает материальную точку массы m, находящуюся на расстоянии a от этой прямой?

Задача 17. Найти кинетическую энергию цилиндра высоты h радиуса R постоянной плотности ρ, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью ω.

Определение 3. Функция $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ называется *логарифмической производной* функции f.

Задача 18. Найти все решения дифференциального уравнения $f'(x) = f(x)$.

Задача 19. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличному количеству. В начальный момент был 1 кг радия. Найти с точность до 50 лет время, за которое распадётся 0,999 кг радия, если известно, что через 1600 лет его количество уменьшится в два раза.

Задача 20. Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делает три витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен $\frac{1}{3}$, и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой $10 \cdot g$ Н? (g — ускорение свободного падения) (Указание: $F_{mp} = \mu \cdot N$, N можно найти для куска радианной меры $\Delta\varphi$, а силу можно выразить как функцию радианной меры угла φ.)

Задача 21*. В ванную площади 1 м^2 со скоростью 0,25 л/с течёт вода. В стенке ванной сделано сливное отверстие радиуса 2,3 см. Расстояние от края борта до середины отверстия равно 10 см. Пренебрегая различием уровня воды внизу и вверху отверстия найти, через какое время зальёт соседей, если вначале вода уже у середины отверстия?
(Напоминание. Согласно закону Торричелли скорость истечения жидкости из сосуда равна $v = c\sqrt{2gh}$, где g — ускорение свободного падения, h — высота уровня жидкости над отверстием, $c = 0{,}6$ — опытный коэффициент.)

Глава 2.

Дополнительные листки

Листок №1д. Геометрия на клетчатой бумаге 09.2003

Определение 1. Пусть дан многоугольник с вершинами в узлах сетки, S — его площадь, i — число узлов сетки, лежащих внутри него, b — число узлов сетки, лежащих на его сторонах (считая вершины). *Формулой Пика* называют формулу: $S = i + b/2 - 1$.

Задача 1. Докажите формулу Пика **а)** для прямоугольника со сторонами, лежащими на линиях сетки; **б)** для прямоугольного треугольника с вершинами в узлах и катетами, лежащими на линиях сетки.

Задача 2. Имеются три многоугольника (с вершинами в узлах), один из которых составлен из двух других. Пусть формула Пика верна для некоторых двух многоугольников из этих трёх. Докажите, что тогда она верна и для третьего многоугольника.

Задача 3. Докажите формулу Пика для любого треугольника с вершинами в узлах сетки.

Задача 4*. Докажите, что во всяком n-угольнике ($n > 3$) найдётся диагональ, принадлежащая ему целиком. (Замечание: результатом этой задачи можно пользоваться далее без доказательства.)

Задача 5. Докажите, что всякий многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы диагонали целиком принадлежали многоугольнику и не пересекались внутри многоугольника.

Задача 6. Докажите формулу Пика в общем случае.

Задача 7. Вершины треугольника $\triangle$ лежат в узлах квадратной сетки, других узлов на границе $\triangle$ нет, а внутри находится ровно один узел. Докажите, что он совпадает с точкой пересечения медиан $\triangle$.

Определение 2. Назовём треугольник (или параллелограмм) с вершинами в узлах сетки *простым*, если внутри него и на его сторонах нет других узлов сетки.

Задача 8. **а)** Докажите, что все простые треугольники имеют одинаковую площадь. Какую?
б) Может ли простой треугольник иметь сколь угодно большой периметр?

Задача 9. Пусть A и B — узлы сетки, причём на отрезке AB нет других узлов. Докажите, что для некоторого узла сетки C треугольник ABC будет простым.

Задача 10. Прямая l соединяет узлы сетки с координатами $(0; 0)$ и $(p; q)$, причём между этими узлами на прямой l нет других узлов. Найдутся ли среди не лежащих на l узлов ближайшие к ней и много ли их может быть? Найдите расстояние от такого узла до прямой l.

Задача 11. Пусть отношение площади многоугольника к квадрату длины какой-то его стороны иррационально. Докажите, что никакой подобный ему многоугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы вершины лежали в узлах.

Задача 12. Найдётся ли правильный **а)** треугольник; **б)** шестиугольник с вершинами в узлах сетки?

Задача 13. Дан правильный n-угольник M с вершинами в узлах сетки. Докажите, что существует правильный n-угольник с вершинами и центром в узлах сетки (используйте M для его построения).

Задача 14*. Для каких n существует правильный n-угольник с вершинами в узлах сетки?

Задача 15*. На плоскости провели много параллельных прямых на одинаковом расстоянии друг от друга («тетрадь в линейку»). Какие правильные n-угольники можно нарисовать на плоскости так, чтобы все их вершины лежали на проведённых прямых?

Задача 16. Докажите, что параллелограмм $ABCD$ с вершинами в узлах сетки является простым тогда и только тогда, когда все параллелограммы, полученные из $ABCD$ параллельными переносами, сдвигающими узел A в разные узлы сетки, покрывают плоскость и не накладываются друг на друга.

Задача 17*. **а)** На плоскости расположена фигура площади 1. Докажите, что найдутся такие две точки A и B, принадлежащие этой фигуре, что вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет целые координаты.
б) (*Теорема Минковского*) На плоскости расположена центрально-симметричная (относительно начала координат) выпуклая фигура площади 4. Докажите, что эта фигура содержит по крайней мере ещё один узел сетки (кроме начала координат).

Задача 18*. Каждый узел клетчатой бумаги накрыли кругом, центр которого находится в этом узле, а радиус в 1 000 000 раз меньше ширины клеток. Можно ли из начала координат выпустить луч, не пересекающий ни одного (кроме накрывающего начало) круга?

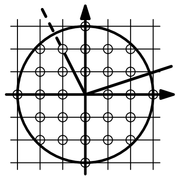


Рис. 2.1.

Задача 19*. В парке, имеющем форму круга радиуса s м (s — целое число), деревья посажены во всех вершинах квадратной сетки со стороной квадратов 1 м, кроме центра (см. пример для $s = 3$ на рис. 2.1). Докажите, что вид из центра **а)** полностью заслонён, если радиусы всех деревьев больше $1/s$ м; **б)** заслонён не полностью, если радиусы всех деревьев меньше $\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ м.

Листок №2д. “Иррациональная” прямая на квадратной решётке 09.2003

Пусть прямая $l:\ y = ax + b$, $a > 0$, составляет острый угол $\alpha = \operatorname{arctg} a$ с осью Ox. Рассмотрим квадратную решётку $\mathbf{Z}^2$ на плоскости Oxy, составленную из единичных квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Прямая l пересекает бесконечно много квадратов решетки, а эти квадраты, в свою очередь, разрезают l на бесконечное число отрезков. Обозначим длину отрезка в «первом квадрате» $\{(x, y)|\ 0 \leqslant x,\ y \leqslant 1\}$ через d_0, а длины «предшествующих» и «последующих» отрезков — через $\ldots, d_{-2}, d_{-1}$ и $d_1, d_2, \ldots$ соответственно.

Задача 1. Предположим, что прямая l — «рациональная», т. е. $a = \frac{p}{q}$ — рациональное число. Сколько различных чисел встретится в последовательности $\ldots, d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, \ldots$? (Выразите ответ в терминах p, q и b, и выпишите явно последовательность $d_0, d_1, d_2, \ldots$.)

Задача 2. Предположим теперь, что прямая l — «иррациональная», т. е. a — иррациональное число. Верно ли, что все числа $\ldots, d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, \ldots$ различны?

Задача 3. Если ответ на вопрос предыдущей задачи отрицательный, то некоторое число d встречается в последовательности длин $\{d_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ более одного раза. Может ли в этой последовательности содержаться бесконечно много *одинаковых* чисел? Бесконечно много *различных* чисел?

Задача 4. Пусть $n(k)$ обозначает, сколько раз число d_k встречается в последовательности $\{d_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$. Предположим, что при некотором k число $n = n(k)$ конечно. Найдите все возможные значения n. Например, может ли n быть равно 5? Зависит ли ответ от коэффициентов a и b?

Задача 5. Опишите все положения прямой l, для которых $n(k) > 1$ для всех k.

Задача 6. Найдите $\ldots, d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, \ldots$ в терминах α и b или a и b.

Задача 7. Спроектируем все вершины решетки на прямую l. Получим бесконечное множество точек на прямой. Будет ли это множество всюду плотным? (Множество на прямой называется всюду плотным, если любой отрезок этой прямой, как бы мал он ни был, содержит хотя бы одну точку множества.) Под проекцией понимается ортогональная проекция, но вы также можете рассматривать проекции в других направлениях.

Задача 8. Рассмотрим прямую l в 3-мерном пространстве и ее пересечения с кубами 3-мерной решетки $\mathbf{Z}^3$. Прямая l вновь разбивается на отрезки

$$\ldots, d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, \ldots$$

Ответьте в этом случае на вопросы 1–7.

Задача 9. Решите ту же задачу для n-мерной решетки $\mathbf{Z}^n$, $n \geqslant 4$.

Листок №3д. Анализ информации 10.2003

Задача 1. Загадано натуральное число от 1 до 100. Можно задавать вопросы, на которые дается ответ «да» или «нет». За какое наименьшее число вопросов всегда можно отгадать число, если
а) каждый следующий вопрос задается после того, как получен ответ на предыдущий вопрос;
б) надо заранее сказать все вопросы?

Задача 2. В каждую клетку доски 8×8 записано целое число от 1 до 64 (каждое по одному разу). За один вопрос, указав любую совокупность полей, можно узнать множество чисел, записанных на этих полях (без указания, какую клетку занимает каждое из этих чисел). За какое наименьшее число вопросов всегда можно выяснить, какие числа где стоят?

Задача 3. **а)** Задуманы k натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, меньшие 1000. За один вопрос разрешается выбрать любые натуральные числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$, и узнать сумму $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_kb_k$. За какое наименьшее количество вопросов можно наверняка отгадать все задуманные числа?
б) Та же задача, но задуманы произвольные (не обязательно меньшие 1000) натуральные числа.

Задача 4. Я задумал целое число от 1 до 3. Придумайте вопрос, на который я честно должен ответить «Да», «Нет» или «Не знаю», после чего вы наверняка отгадаете задуманное число.

Задача 5. **а)** Король собрал 1000 придворных мудрецов и объявил, что завтра устроит им испытание. Мудрецам завяжут глаза, наденут каждому на голову колпак одного из двух цветов, построят в колонну, затем развяжут глаза. После этого мудрецы по очереди, начиная с последнего, будут называть какой-нибудь цвет из возможных. Кто назовет цвет своего колпака неправильно — тому голову с плеч. Сколько мудрецов гарантированно может спастись?
б) Та же задача, но колпаки могут быть k разных цветов. (Каждый видит всех впереди стоящих; у мудрецов до испытания есть время, чтобы договориться.)

Задача 6. Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Вскоре надписи на банках стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он хочет доказать всем, что в какой банке находится, не вскрывая консервов и пользуясь только списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов на чашках. Докажите, что ему для этого **а)** хватит четырёх взвешиваний; **б)** не хватит трёх взвешиваний.

Задача 7. Из 11 шаров два радиоактивны. Про любой набор шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в нём хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). За какое наименьшее число проверок можно гарантированно найти оба радиоактивных шара?

Задача 8*. **а)** Есть M монет, из них одна фальшивая. Настоящие весят одинаково; фальшивая отличается по весу, но не известно, легче она или нет. Есть ещё эталонная (настоящая) монета.

Разрешено сделать n взвешиваний на весах с двумя чашами. При каком наибольшем M можно определить, какая монета фальшивая, и легче ли она? **б)** Тот же вопрос, но эталонной монеты нет. **в)** Тот же вопрос, но не требуется определять, легче ли фальшивая монета.

Задача 9. Обезьяна хочет определить, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У нее есть **а)** 1; **б)** 2 ореха. Какого наименьшего числа бросков ей заведомо хватит? (Неразбившийся орех можно бросать снова.)

Задача 10*. Есть n разных ключей от n разных замков (каждый ключ подходит ровно к одному замку). За какое наименьшее число попыток можно узнать, какой замок открывает какой ключ?

Задача 11. **а)** Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причём одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
б) Та же задача, но первый выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Второй должен угадать невыложенную карту.

Задача 12. Петя задумал целое число от 1 до 16. Вася может задавать Пете любые вопросы, на которые можно ответить «Да» или «Нет». Отвечая на эти вопросы, Петя может один раз соврать (но неизвестно, когда). Как Васе узнать Петино число, задав не более 7 вопросов?

Задача 13. Ботанический определитель использует 100 признаков. Каждый признак либо есть у растения, либо нет. Определитель «хороший», если любые два растения в нем отличаются более чем по 50 признакам. Может ли хороший определитель описывать более **а)** 50; **б)*** 34 растений.

Листок №4д. Графы 11.2003

Графы

Определение 1. *Граф* — это конечное множество точек на плоскости, некоторые пары которых соединены линиями. Эти точки называются *вершинами*, а линии — *рёбрами* графа. Ребро, соединяющее некоторую вершину саму с собой, называется *петлёй*. Рёбра, соединяющие одну и ту же пару вершин, называются *параллельными* или *кратными*. Граф, в котором нет петель и параллельных рёбер, называется *простым*. *Степень* $\deg V$ вершины V — это число выходящих из неё рёбер (петли считаются дважды).

Задача 1. В простом графе n вершин, каждые две из них соединены ребром (такие графы называются *полными*). Сколько графов можно из него получить, стирая некоторые рёбра?

Задача 2. (*Лемма о рукопожатиях*) Как связаны сумма степеней вершин любого графа и количество его рёбер? Верно ли, что число вершин нечётной степени любого графа чётно?

Задача 3. В простом графе более 1 вершины. Есть ли в нём две вершины одинаковой степени?

Задача 4. У Пети 28 одноклассников, причём они имеют различное число друзей в этом классе. Сколько из них дружит с Петей?

Задача 5*. (*Теорема Холла*) В некоторой компании n юношей. При каждом k от 1 до n верно утверждение: для любых k юношей в компании число девушек, знакомых хотя бы с одним из этих k юношей, не меньше k. Можно ли женить всех юношей на знакомых девушках?

Определение 2. *Путь* в графе — это последовательность вершин $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$, в которой каждые две соседние вершины соединены ребром. Последовательность рёбер $V_1V_2, V_2V_3, \ldots, V_nV_{n+1}$ также называют путём. Если $V_1 = V_{n+1}$, то путь называется *циклическим*, если при этом рёбра пути различны — *циклом*, а если ещё и вершины разные (кроме V_1 и V_{n+1}) — *простым циклом*. Граф называется *связным*, если каждые две его вершины соединены путём.

Задача 6. Верно ли, что любая последовательность рёбер, в которой каждые два соседних ребра *смежны* (то есть выходят из одной вершины), является путём?

Задача 7. В простом графе n вершин, степень каждой не меньше $(n-1)/2$. Связен ли граф?

Задача 8. Из столицы выходит 101 авиалиния, из города Дальний одна, а из остальных городов по 100. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

Задача 9. Докажите, что в связном графе есть цикл, содержащий все рёбра, тогда и только тогда, когда степень любой вершины графа чётна (такие графы называются *эйлеровыми*).

Определение 3. *Плоским графом* называется граф, рёбра которого не пересекаются (нигде, кроме вершин). Такой граф делит плоскость на части, называемые *гранями* графа.

Задача 10. Докажите, что связный плоский граф является эйлеровым если и только если его грани можно раскрасить в два цвета так, чтобы грани с общим ребром были разного цвета.

Определение 4. Раскраска вершин графа называется *правильной*, если никакие две вершины одного цвета не соединены ребром. Простой граф называется *k-дольным*, если правильная раскраска его вершин возможна k цветами, но не менее (такая раскраска называется *минимальной*).

Задача 11. Равносильна ли двудольность графа отсутствию в нём циклов нечётной длины?

Задача 12*. Есть ли в k-дольном графе с минимальной окраской путь из k разноцветных вершин?

Задача 13. На танцы пришли n девушек и n юношей. Каждый юноша знаком с двумя девушками, а каждая девушка — с двумя юношами. Докажите, что собравшихся можно разбить на n смешанных пар так, чтобы в каждой паре юноша и девушка были знакомы.

Задача 14. Каждый из 450 депутатов дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что из них можно выбрать 150 человек, среди которых никто никого не бил.

Задача 15*. Гриша забыл трёхзначный код своего замка́. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если ранее были набраны другие цифры). Докажите, что Гриша сможет открыть замок не более чем за 1002 секунды, набирая по одной цифре в секунду.

Задача 16*. Докажите, что среди любых 50 человек найдутся двое, у которых чётное число общих знакомых (быть может, 0) среди остальных 48 человек.

Листок №5д. Геометрия масс 12.2003

Определение 1. *Материальной точкой mM* называется точка M вместе с числом m, называемым *массой* точки M (масса может быть и отрицательной). *Центром масс* системы материальных точек $m_1M_1, m_2M_2, \ldots, m_nM_n$ называется такая точка Z, что $m_1\overrightarrow{ZM_1}+m_2\overrightarrow{ZM_2}+\ldots+m_n\overrightarrow{ZM_n} = \overrightarrow{0}$.

Задача 1. а) Докажите, что центр масс Z двух материальных точек m_1A_1 и m_2A_2 с положительными массами лежит на отрезке A_1A_2, причём $m_1 \cdot ZA_1 = m_2 \cdot ZA_2$ (архимедово правило рычага).
б) Пусть даны точки A, B и точка C на прямой AB. Какие массы надо поместить в точки A, B, чтобы центром масс системы была точка C?

Задача 2. а) Докажите, что если точка Z — центр масс системы m_1M_1, m_2M_2, …, m_nM_n с ненулевой суммой масс, то для любой точки O на плоскости $\overrightarrow{OZ} = \dfrac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + \ldots + m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$.
б) Докажите, что если хотя бы при одном выборе на плоскости точки O выполняется равенство из предыдущего пункта, то точка Z — центр масс системы материальных точек m_1M_1, …, m_nM_n.

Задача 3. В системе m_1M_1, m_2M_2, …, m_nM_n взяли k материальных точек m_1M_1, m_2M_2, …, m_kM_k, для которых $m_1 + \ldots + m_k \neq 0$, и нашли их центр масс Z. Докажите, что центр масс системы $(m_1 + \ldots + m_k)Z$, $m_{k+1}M_{k+1}$, …, m_nM_n будет центром масс всей системы m_1M_1, …, m_nM_n.

Задача 4. Докажите, что центр масс системы материальных точек с ненулевой суммой масс существует и определён однозначно.

Задача 5. а) Докажите, что центр масс системы трёх материальных точек $1A$, $1B$, $1C$ лежит на прямой, проходящей через точку A и середину отрезка BC.

б) Докажите, что медианы треугольника *конкурентны* (то есть пересекаются в одной точке).
в) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, конкурентны.
г) Докажите, что биссектрисы треугольника конкурентны. Какие массы нужно поместить в вершины треугольника, чтобы их центром масс была точка пересечения биссектрис?
д) Решите предыдущий пункт с заменой биссектрис на высоты.

Задача 6. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, конкурентны и делят друг друга пополам.

Задача 7. Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и середину L медианы BB_1. В каком отношении делит эта прямая сторону BC?

Задача 8. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC взяли точки A_1 и B_1 соответственно так, что $CA_1 : A_1B = \alpha$ и $CB_1 : B_1A = \beta$. В каком отношении делятся точкой пересечения отрезки AA_1 и BB_1?

Задача 9. (*Теорема Чевы*) Пусть A_1, B_1, C_1 — точки на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 конкурентны тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

Задача 10. а) Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон со вписанной окружностью, конкурентны.
б) (*Точка Нагеля*) Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и делящие пополам его периметр, конкурентны.

Задача 11. Три мухи равной массы ползают по сторонам треугольника так, что их центр масс остается на месте. Докажите, что он совпадает с точкой пересечения медиан этого треугольника, если известно, что одна муха проползла по всей границе этого треугольника.

Задача 12*. На окружности дано n точек. Через центр масс $n-2$ точек проведем прямую, перпендикулярную хорде, соединяющей оставшиеся точки. Докажите, что все такие прямые конкурентны.

Задача 13*. (*Неравенство Чебышёва*) Пусть $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$; $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, и пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — положительные числа с суммой 1. Докажите, что $(\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_n a_n)(\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n) \geqslant \mu_1 a_1 b_1 + \ldots + \mu_n a_n b_n$.

Задача 14*. На берегу круглого озера растут 6 сосен. Известно, что если взять такие два треугольника, что вершины одного совпадают с тремя из сосен, а вершины другого — с тремя другими, то в середине отрезка, соединяющего точки пересечения высот этих треугольников, на дне озера находится клад. Неизвестно только, как нужно разбить данные шесть точек на две тройки. Сколько раз придется опуститься на дно озера, чтобы наверняка отыскать клад?

Листок №6д. Деревья. Формула Эйлера. Плоские графы 12.2003

Задача 1. Докажите, что граф является *деревом* (то есть связным и без циклов), если и только если каждые две его вершины соединены ровно одним путём с различными рёбрами.

Задача 2. Верно ли, что в дереве с более чем одной вершиной найдутся **а)** одна; **б)** две *висячие* вершины (вершина называется *висячей*, если из неё выходит ровно одно ребро)?

Задача 3. Многоугольник разбит на треугольники несколькими диагоналями, не пересекающимися нигде, кроме вершин. Верно ли, что найдутся два треугольника разбиения, у каждого из которых две стороны совпадают со сторонами многоугольника?

Задача 4. Как связаны число вершин и число рёбер произвольного дерева?

Определение 1. Граф O называется *остовом* связного графа G, если O имеет те же вершины, что и G, получается из G удалением некоторых рёбер и является деревом.

Задача 5. Всякий ли связный граф имеет остов? Может ли граф иметь несколько различных остовов?

Задача 6. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

Задача 7. Всегда ли в связном графе можно удалить некоторую вершину вместе со всеми выходящими из неё рёбрами так, чтобы граф остался связным?

Задача 8. (*Формула Эйлера*) Докажите, что для каждого связного плоского графа с $в$ вершинами, $р$ рёбрами и $г$ гранями имеет место равенство: $в - р + г = 2$.

Задача 9. Для каких простых плоских графов верны неравенства: **а)** $2р \geqslant 3г$; **б)** $р \leqslant 3в - 6$?

Задача 10. Является ли плоским полный граф с пятью вершинами?

Задача 11. Можно ли построить три дома, вырыть три колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?

Задача 12. Пусть Γ — любой простой плоский граф. Докажите, что **а)** в графе Γ есть вершина степени меньше 6; **б)** вершины графа Γ можно правильно раскрасить в 6 или менее цветов.

Задача 13. Докажите формулу Эйлера **а)** для произвольного связного графа с непересекающимися рёбрами, нарисованного на сфере; **б)** для произвольного выпуклого многогранника.

Задача 14. Дан выпуклый многогранник, грани которого являются n-угольниками, и в каждой вершине сходится k граней. Докажите, что $1/n + 1/k = 1/2 + 1/r$, где r — число его рёбер.

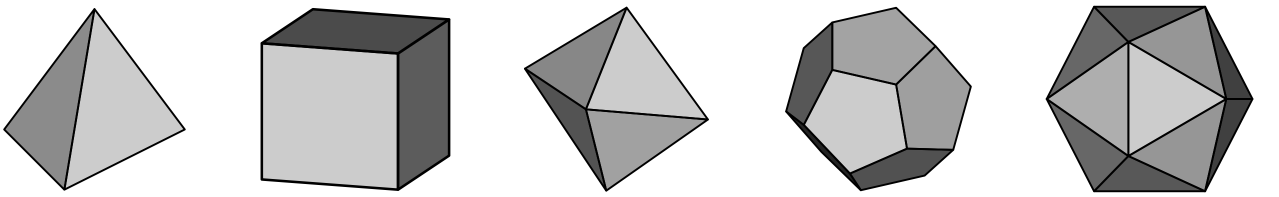


Рис. 2.2.

Задача 15. Выпуклый многогранник называют *правильным*, если все его грани — правильные n-угольники, и в каждой его вершине сходится k граней. Докажите, что любой такой многогранник — либо тетраэдр, либо куб, либо октаэдр, либо додекаэдр, либо икосаэдр (см. рис. 2.2).

Трудные задачи о графах

Задача 16*. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Двое играют в такую игру: они по очереди соединяют какие-то две ещё не соединённые точки отрезком так, чтобы отрезки не пересекались нигде, кроме отмеченных точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Зависит ли исход этой игры от того, как играют соперники?

Задача 17*. Опишите простые графы с n вершинами $A_1, \ldots, A_n$ и n рёбрами $b_1, \ldots, b_n$, со свойством: любые две вершины A_i и A_j соединены ребром если и только если рёбра b_i и b_j имеют общую вершину.

Задача 18*. В лесу $k \cdot l$ тропинок и несколько полянок. Каждая тропинка соединяет две полянки. Известно, что тропинки можно раскрасить в l цветов так, чтобы к каждой полянке сходились тропинки разного цвета. Докажите, что это можно сделать, покрасив каждым цветом ровно k тропинок.

Задача 19*. Сколько остовов имеет граф с вершинами $V_0, \ldots, V_n$ и $2n - 1$ ребром, где вершина V_0 соединена рёбрами с остальными вершинами, и при $1 \leqslant i < n$ соединены ребром вершины V_i и V_{i+1}?

Задача 20*. В гости ожидают m или n человек, где $(m, n) = 1$. На какое наименьшее число секторов надо разрезать круглый торт, чтобы из них можно было сложить как m, так и n одинаковых кусков?

Задача 21*. (*Теорема Кели*) Докажите, что полный граф с n вершинами имеет n^{n-2} остовов.

Листок №7д. Преследования на плоскости 01.2004

Задача 1. В поле проходит прямая дорога, по которой со скоростью 10 км/ч едет автобус. Укажите все точки поля, из которых можно догнать автобус, если бежать со скоростью **а)** 10 км/ч; **б)** 5 км/ч.

Задача 2. Человек может двигаться по полю со скоростью не более 3 км/ч, и по дороге со скоростью не более 6 км/ч. Нарисуйте множество точек, в которые он может попасть за 1 час, если сначала он находится **а)** на прямой дороге, проходящей по полю; **б)** на перекрёстке двух перпендикулярных прямых дорог, проходящих по полю; **в)** та же задача, но скорость человека в поле не превышает $3\sqrt{2}$ км/ч.

Задача 3. Пункт A находится в лесу в 5 км от прямой дороги, а пункт B — на этой дороге в 13 км от A. За какое наименьшее время можно попасть из A в B, если наибольшая скорость на дороге — 5 км/ч, в лесу — 3 км/ч?

Задача 4*. Где-то на плоскости расположены лиса и собака. Лиса бежит по прямой с постоянной скоростью. Собака гонится за лисой с той же скоростью, причём бежит так, что видит лису всё время перед собой. Опишите все случаи, когда собака догонит лису. (Указание. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы она равномерно двигалась вместе с лисой в направлении одной из своих осей (относительно неподвижного наблюдателя). Пусть в начальный момент лиса находилась в начале координат этой движущейся системы. Как будет двигаться собака относительно этой системы?)

Задача 5. В центре квадрата сидит заяц, а в каждом из четырёх углов — по одному волку. Может ли заяц выбежать из квадрата, если волки могут бегать только по сторонам квадрата с максимальной скоростью, которая больше максимальной скорости зайца **а)** в 1,4 раза; **б)** в 1,5 раза?

Задача 6. На бесконечной плоскости играют двое: один передвигает одну фишку-волка, другой — несколько фишек-овец. После хода волка ходит какая-нибудь из овец, после следующего хода волка — опять какая-нибудь из овец, и т. д. И волк и овцы передвигаются за ход в любую сторону не более, чем на метр. Для любого ли числа овец существует такая начальная позиция, что волк не поймает ни одной овцы?

Задача 7*. Город представляет собой бесконечную клетчатую плоскость (линии — улицы, клетки — кварталы). На одной из улиц через каждые 100 кварталов на перекрёстках стоит по милиционеру. Где-то в городе есть бандит (его местонахождение неизвестно, но перемещается он только по улицам). Цель милиции — увидеть бандита. Есть ли у милиции алгоритм наверняка достигнуть своей цели? (Максимальные скорости милиции и бандита — какие-то конечные, но неизвестные нам величины (у бандита скорость может быть больше, чем у милиции). Милиция видит вдоль улиц во все стороны на любое расстояние.)

Задача 8*. В городе из задачи 7 трое полицейских ловят вора (местонахождение вора неизвестно, но перемещается он только по улицам). Максимальные скорости у полицейских и вора одинаковы. Вор считается пойманным, если он оказался на одной улице с полицейским. Смогут ли полицейские поймать вора?

Охота на Снарка

Общая задача. Булочник охотится на Снарка на бесконечной клетчатой плоскости. Снарк за один ход может прыгнуть с клетки (x, y) на любую клетку (x', y'), где $|x - x'| \leqslant n$, $|y - y'| \leqslant n$. Число n называется *силой* Снарка. Булочник своим ходом может положить булочку на любую пустую клетку. Снарк ненавидит булочки, поэтому он никогда не прыгает на клетку с булочкой. Цель

Булочника — запереть Снарка, так чтобы ему некуда было прыгнуть. Цель Снарка — чтобы его не заперли.

Задачи 9 — 13 посвящены менее трудной охоте на более примитивных Снарков.

Задача 9. Пусть Снарк каждым ходом увеличивает ординату $(y' > y)$. Докажите, что Булочник может его запереть, если сила Снарка равна **а)** 1; **б)** n, где $n \in \mathbb{N}$ — любое.

Задача 10. Та же задача, но Снарк на каждом ходе не уменьшает ординату $(y' \geqslant y)$.

Задача 11. Пусть Снарк, однажды достигнув клетки (x, y), уже никогда не прыгает на клетки с ординатой, меньшей $y - 1000$. Докажите, что Булочник может его запереть, если сила Снарка равна **а)** 1; **б)** $n \in \mathbb{N}$.

Задача 12. Пусть Снарк каждым ходом увеличивает расстояние до начала координат. (Расстоянием от Снарка, находящегося на клетке (x, y), до начала координат называется наибольшее из чисел $|x|$ и $|y|$.) Докажите, что Булочник может его запереть, если сила Снарка равна **а)** 1; **б)** n, где $n \in \mathbb{N}$ — любое.

Задача 13. Пусть Снарк, однажды достигнув расстояния d от начала координат, никогда более не приближается к началу координат ближе, чем на $d - 1000$. Докажите, что Булочник может его запереть, если сила Снарка равна **а)** 1; **б)** n, где $n \in \mathbb{N}$ — любое.

Задача 14. Предположим, что Снарк подозрителен, и если он однажды мог прыгнуть на клетку, но не сделал этого, то никогда больше он на эту клетку не прыгнет. Докажите, что если Булочник может поймать подозрительного Снарка, то он может поймать и обыкновенного Снарка той же силы.

Задача 15*. Докажите, что Булочник может запереть Снарка силы 1.

Открытая проблема. Хотя бы для какого-нибудь одного $n > 1$ выясните, кто сможет добиться поставленной цели: Булочник или Снарк?

Листок №8д. Бесконечность 03.2004

Задача 1. Верно ли, что в натуральном ряду можно выделить
а) сколь угодно длинную; **б)** бесконечно длинную цепочку подряд идущих составных чисел?

Задача 2. Можно ли в последовательности $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ выделить
а) бесконечно длинную; **б)** сколь угодно длинную арифметическую прогрессию?

Задача 3. Докажите, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет периодической (начиная с некоторого момента).

Задача 4. Существует ли такая бесконечная последовательность натуральных чисел, что любая другая получается из неё вычёркиванием **а)** некоторых членов; **б)** некоторого конечного числа членов?

Задача 5. Клетки бесконечной клетчатой плоскости раскрашены в два цвета. Обязательно ли найдётся бесконечное множество вертикалей и бесконечное множество горизонталей, на пересечении которых все клетки будут одного цвета?

Задача 6. Можно ли покрыть **а)** прямую конечным числом кругов; **б)** плоскость конечным числом полос; **в)** плоскость конечным числом внутренностей углов, сумма которых меньше $360°$; **г)** плоскость конечным числом внутренностей парабол?

Задача 7. Можно ли покрыть все натуральные числа **а)** двумя геометрическими прогрессиями; **б)** конечным числом геометрических прогрессий; **в)** конечным числом арифметических прогрессий с разными неединичными натуральными разностями?

Задача 8. Докажите, что из любых одиннадцати бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

Задача 9. Докажите, что любое действительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичные записи которых содержат только цифры 0 и 8.

Задача 10. **а)** Есть 3 последовательности натуральных чисел: (a_n), (b_n) и (c_n). Докажите, что найдутся такие номера p и q, что $a_p \geqslant a_q$, $b_p \geqslant b_q$, $c_p \geqslant c_q$. **б)** А если последовательностей счётное число?

Задача 11. (*Лемма Кёнига*) Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен. Число людей в каждом поколении конечно. Докажите, что найдётся бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.

Задача 12. Имеется язык с конечным алфавитом. Словом в этом языке называется любая последовательность букв из алфавита этого языка. Часть слов (конечной длины) в языке — неприличные. Известно, что существуют сколь угодно длинные приличные слова (т. е. слова, не содержащие неприличных подслов). Докажите, что существует бесконечно длинное приличное слово.

Задача 13. Докажите бесконечную теорему Холла (см. листок 4 главы 2): юношей счётное число, и каждый знаком со счётным числом девушек.

Задача 14. Докажите, что в любой бесконечной последовательности **а)** натуральных; **б)*** действительных чисел можно вычеркнуть некоторые члены так, что останется либо бесконечная неубывающая, либо бесконечная невозрастающая последовательность.

Задача 15. Докажите, что существует такое подмножество $M \subset \mathbb{N}$, что каждое натуральное число представляется единственным образом в виде разности двух чисел из M.

Задача 16. Каждое конечное слово в неком языке либо хорошее, либо нехорошее. Докажите, что в любом бесконечном слове можно откинуть несколько начальных букв так, что оставшееся бесконечное слово можно будет нарезать либо только на хорошие слова, либо только на нехорошие.

Задача 17. Теорема о четырех красках утверждает, что вершины любого связного плоского графа можно раскрасить в четыре цвета так, что вершины, соединенные ребром, будут разного цвета. Докажите с помощью этой теоремы тот же результат для бесконечного графа (вершин счётное количество, но степень каждой вершины конечна).

Задача 18. Два бога по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Первый своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, второй — одну. Если в итоге получится периодическая дробь, выигрывает первый, иначе — второй. Кто выиграет при правильной игре?

Задача 19*. Можно ли в счётном множестве выделить несчётную систему подмножеств, такую что для любых двух подмножеств из этой системы их пересечение **а)** совпадает с одним из этих двух подмножеств; **б)** непусто и содержит не более десяти элементов; **в)** непусто и конечно?

Листок №9д. Вариация кривой 04.2004

Определение 1. Пусть на плоскости дан отрезок AB длины 1. Для каждой прямой l в этой плоскости определим *вариацию отрезка AB в направлении l* как длину проекции отрезка AB на прямую l (рис. 2.3). Обозначение: $V_l(AB)$ или просто V_l, если ясно, от какого отрезка берется вариация.

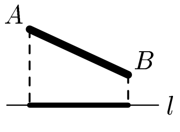


Рис. 2.3.

Определение 2. Интуитивно ясно, что существует среднее значение вариации по всем направлениям и что оно больше 0 и меньше 1. Более точно это означает, что если разделить угол в 360° на n равных частей и взять среднее арифметическое

$$V_n = \frac{V_{l_1} + V_{l_2} + \dots + V_{l_n}}{n}$$

вариаций отрезка AB в направлениях $l_1, l_2, \dots, l_n$ (рис. 2.4), то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = K$, причём K заключено между 0 и 1. Это число K называется *средней вариацией* или просто *вариацией* единичного отрезка AB. Мы вычислим число K позже (косвенным путем в задаче 7), но с самого начала будем пользоваться фактом существования числа K.

Задача 1. Найдите вариацию отрезка длины a (выразите через K).

Определение 3. *Вариацией ломаной по какому-нибудь направлению* называется сумма длин проекций ее звеньев на это направление (рис. 2.5).

Задача 2. Найти вариации единичного квадрата в направлениях сторон и диагоналей.

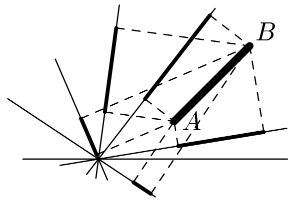


Рис. 2.4.

Определение 4. *Средняя вариация ломаной* (или просто *вариация ломаной*) по всем направлениям определяется, как и выше, с помощью предельного перехода.

Задача 3. Найдите вариацию ломаной длины a.

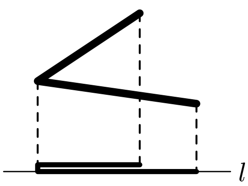


Рис. 2.5.

Перенесение понятия вариации на кривые требует уточнения понятия кривой. В общем случае это сделать трудно. Но пусть кривая выпуклая или состоит из нескольких выпуклых кусков. Тогда при проектировании кривой на любое, но определённое направление, можно разбить ее на конечное число кусков, каждый из которых пересекается только один раз любой проектирующей прямой (здесь не исключаются случаи, когда подобный кусок представляет собой прямолинейный отрезок и, следовательно, при проектировании в одном из направлений полностью попадает на проектирующую прямую). Тогда *вариацией кривой по выбранному направлению* назовем сумму длин проекций ее кусков на это направление (рис. 2.6.). Можно показать, что существует среднее значение этой величины по всем направлениям. Его мы и назовем *средней вариацией* или просто *вариацией*) кривой линии. Очевидно, если кривая — ломаная, то мы приходим к прежнему определению.

Задача 4. Найдите вариацию окружности диаметра D.

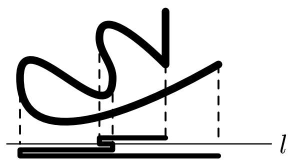


Рис. 2.6.

Выберем теперь на кривой несколько точек и соединим их последовательно, но подряд (рис. 2.7.) Получим ломаную. Можно показать, что для достаточно хороших (например, для выпуклых) кривых существует предел длин этих ломаных, при условии, что при изменении ломаной длина ее наибольшего звена стремится к нулю. Этот предел называется *длиной кривой*.

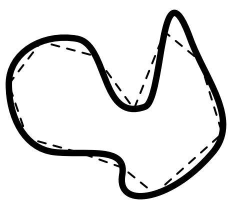


Рис. 2.7.

Можно показать также, что для кривых, которые могут быть разбиты на конечное число выпуклых кусков, существует предел вариаций этих ломаных, когда длина наибольшего звена стремится к нулю.

Задача 5. Найдите предел, к которому стремится вариация ломаной, вписанной в «достаточно хорошую» кривую длины a, когда ломаная изменяется так, что длина наибольшего ее звена стремится к нулю.

Задача 6. Найдите вариацию «достаточно хорошей» кривой длины a.

Задача 7. Найдите вариацию отрезка длины 1, используя результаты задач 4, 5 и 6.

Определение 5. *Шириной кривой по данному направлению* называется наименьшее расстояние между двумя прямыми этого направления, между которыми лежит кривая. Кривая имеет *постоянную ширину*, если ее ширина по всем направлениям одинакова. Простейшим примером такой кривой является окружность.

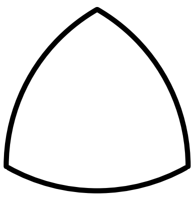


Рис. 2.8.

Задача 8. Отметим на плоскости вершины произвольного правильного треугольника и соединим каждые две вершины дугой окружности с центром в третьей вершине. Получится так называемый *треугольник Релло* (см. рис. 2.8). Докажите, что треугольник Релло является кривой постоянной ширины.

Задача 9. (*Теорема Барбье*) Кривая постоянной ширины h является границей выпуклой фигуры. Найдите длину такой кривой.

Задача 10. В круге радиуса 1 заключена какая-то кривая L длины 22. Докажите, что найдется прямая, пересекающая L не менее чем в 8 точках.

Листок №10д. Повторение 2 05.2004

Задача 1. Вершины треугольника $\triangle$ лежат в узлах квадратной сетки, других узлов на границе $\triangle$ нет, а внутри находится ровно один узел. Докажите, что он совпадает с точкой пересечения медиан $\triangle$.

Задача 2. На координатной плоскости дан выпуклый многоугольник. Известно, что на любом отрезке с концами на сторонах многоугольника находится не более n точек с целыми координатами. Докажите, что внутри многоугольника (включая границу) находится не более n^2 точек с целыми координатами.

Задача 3. Автобусный билет называется счастливым, если сумма первых трёх цифр его шестизначного номера равна сумме трёх последних цифр его номера.

а) Докажите, что счастливых билетов столько же, сколько номеров с суммой цифр 27.

б) Сколько имеется последовательностей из 6 неотрицательных целых чисел с суммой 27?

в) Сколько существует счастливых билетов?

Задача 4. Доступ к сейфу имеют 11 членов комиссии. Каким наименьшим числом замков надо снабдить сейф для того, чтобы при некотором наборе ключей любые 6 членов комиссии, собравшись вместе, могли его открыть, а любые 5 членов комиссии не могли бы? Как при этом распределить ключи?

Задача 5. Решите задачу 5б листка 2д, если каждый мудрец слаб зрением и видит лишь k впереди стоящих.

Задача 6. Код к любому сейфу ФБР — целое число от 1 до 1700. Два шпиона, узнав по коду, решили обменяться информацией. Согласовав заранее свои действия, они встретились на берегу реки у кучи из 26 камней. Сначала первый шпион кинул в воду один или несколько камней, потом — второй, потом — опять первый, и т. д. до тех пор, пока камни не кончились (затем шпионы разошлись). Как могла быть передана информация?

Задача 7. Для данного графа Γ обозначим через $P_\Gamma(n)$ количество правильных раскрасок графа в n данных цветов (см. листок 3д). Докажите, что $P_\Gamma(n)$ — многочлен от n. Найдите его **а)** для графа из n вершин и без рёбер; **б)** для цикла из n вершин и n рёбер; **в)** для любого дерева из n вершин.

Задача 8. Можно ли нарисовать на сфере полный граф с пятью вершинами, чтобы его ребра не пересекались?

Задача 9. **а)** Связный граф с непересекающимися рёбрами нарисован на торе (поверхность бублика, или сфера с ручкой). Поверхность бублика разделена ребрами этого графа на многоугольные части (грани). Как изменится формула Эйлера? (Грани должны быть без дырок, каждую можно продеформировать в плоский многоугольник (без разрывов и склеек).)

б) Тот же вопрос для графа на кренделе (сфера с двумя ручками).

в) Тот же вопрос для графа на сфере с g ручками.

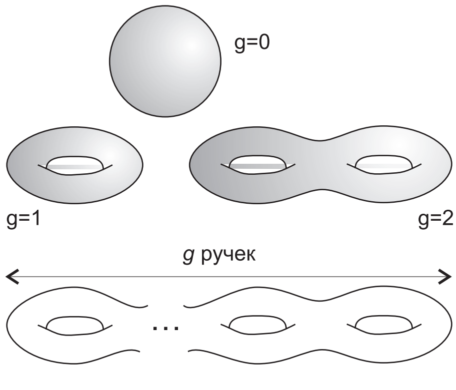


Рис. 2.9.

Задача 10. N человек собрались вместе, каждый из них принёс по 50 яблок. Все яблоки разложили в N корзин, по 50 яблок в каждую. Докажите, что как бы ни были размещены яблоки, корзины можно раздать собравшимся так, что каждому достанется хотя бы по одному яблоку, которое он сам принёс.

Задача 11. Пусть A_1, A_2, …, A_n — все точки с целыми координатами, лежащие внутри или на границе круга радиуса 3 с центром в начале координат. Выясните, для каких точек M, лежащих внутри или на границе этого круга, число

$$\left|\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \dots + \overrightarrow{MA_n}\right|$$

максимально, и найдите это число.

Задача 12. Пусть охота на Снарка (см. листок 6д) происходит в пространстве, разделённом на кубики. Каждым ходом Снарк может перепрыгнуть на любой соседний по грани кубик (шесть возможных ходов). Докажите, что Булочник может его запереть.

Задача 13. Равномощны ли множество всевозможных бесконечных последовательностей из целых чисел и множество всевозможных возрастающих бесконечных последовательностей из целых чисел?

Задача 14. Докажите, что множество бесконечных последовательностей действительных чисел равномощно множеству действительных чисел.

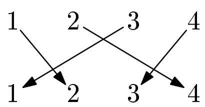
Задача 15. Докажите, что из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, … можно так вычеркнуть некоторую их часть, что любое натуральное число можно будет единственным образом записать в виде $a + 2b$, где a и b — какие-то невычеркнутые числа.

Листок №11д. Перестановки 09.2004

Определение 1. *Перестановка* чисел $1, \dots, n$ — это взаимно однозначное отображение множества $\{1, \dots, n\}$ на себя. Множество перестановок чисел $1, \dots, n$ обозначается S_n и называется *симметрической группой.*

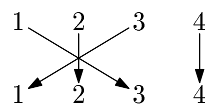
Задача 1. Сколько элементов в симметрической группе S_n?

Перестановки записывают таблицами вида $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$; такая таблица означает перестановку $1 \mapsto 2$ (то есть 1 переходит в 2), $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 1$, $4 \mapsto 3$. Вообще, если $\sigma \in S_n$, то $\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$. Для наглядности, ту же перестановку можно изобразить картинкой вида

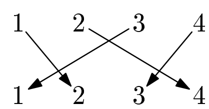


Определение 2. *Произведение* перестановок $\sigma, \tau \in S_n$ определяется так: $\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i))$ (для произвольных отображений σ и τ такое произведение обычно называется *композицией отображений*). Например, если

$$\tau = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix},$$

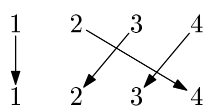


$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix},$$



то

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$



Отметим, что сначала применяется второй сомножитель, а потом первый.

Задача 2. **а)** Всегда ли $\sigma\tau = \tau\sigma$? **б)** Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Найти $\sigma\tau$ и $\tau\sigma$.

Задача 3. **а)** Найдите перестановку e, удовлетворяющую условию $e\sigma = \sigma e = \sigma$ для любой перестановки $\sigma \in S_n$. Докажите, что такая перестановка единственна (её называют *единичной* или *тождественной*.)

б) Докажите, что для любой перестановки σ существует единственная перестановка σ^{-1} такая, что $\sigma\sigma^{-1} = e = \sigma^{-1}\sigma$. (Эта перестановка называется *обратной* к σ. Почему?)

в) Докажите, что для любых $\sigma, \tau, \eta \in S_n$ имеет место равенство $\sigma(\tau\eta) = (\sigma\tau)\eta$.

г) Докажите, что если $\sigma\tau = \sigma\eta$, то непременно $\tau = \eta$.

Задача 4. Докажите, что для любой перестановки $\sigma \in S_n$ существует такое натуральное число k, что $\sigma^k = e$. Минимальное k с этим свойством называется *порядком* перестановки σ и обозначается $\operatorname{ord}\sigma$.

Задача 5. Найдите порядки перестановок: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Определение 3. *Циклом* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ называется перестановка, циклически переставляющая элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (то есть $a_1 \mapsto a_2$, $a_2 \mapsto a_3$, $\ldots$, $a_k \mapsto a_1$; имеется в виду, что все элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ различны; все остальные элементы множества $\{1, \ldots, n\}$ переходят в себя). Число k называется *длиной* цикла.

Задача 6. Какие из перестановок в задаче 5 являются циклами?

Задача 7. Каков порядок цикла длины k? Сколько всего циклов длины k в S_n?

Задача 8. **а)** Докажите, что если σ и τ — циклы, множества элементов которых не пересекаются (такие циклы называются *независимыми*), то $\sigma\tau = \tau\sigma$ (циклы *коммутируют*).

б) Верно ли, что циклы коммутируют тогда и только тогда, когда они независимы?

Задача 9. Представьте перестановки из задачи 5 в виде произведения независимых циклов.

Задача 10. Докажите, что любую перестановку можно представить в виде произведения независимых циклов. Сколькими способами (с точностью до перестановки множителей)?

Задача 11. **а)** Пусть порядок перестановки равен двум. Разложим её в произведение независимых циклов. Какими могут быть длины этих циклов? **б)** Пусть σ — это k-я степень цикла $(1, 2, \ldots, n)$. На сколько независимых циклов раскладывается σ? Каковы длины этих циклов?

Задача 12. Найдите максимальный порядок перестановки **а)** из S_5; **б)** из S_{13}; **в)*** из S_n.

Задача 13. Докажите, что число $\operatorname{ord}\sigma$ делит $n!$ для любой перестановки $\sigma \in S_n$.

Задача 14. Текст зашифрован программой, заменяющей взаимно однозначно каждую букву на некоторую другую. **а)** Докажите, что существует такое число k, что текст расшифровывается применением k раз шифрующей программы. **б)** Найдите хотя бы одно такое k.

Определение 4. *Транспозиция* — это цикл длины два. Транспозицию вида $(i, i+1)$ называют *элементарной.*

Задача 15. **а)** Докажите, что любая перестановка представляется как произведение транспозиций.

б) Проделайте это для перестановок из задачи 5.

в) Любая ли перестановка представляется как произведение элементарных транспозиций?

г) Представьте в виде произведения элементарных транспозиций перестановки из задачи 5.

Задача 16. Несколько жителей города N хотят обменяться квартирами. У каждого есть по квартире, но каждый хочет переехать в другую (разные люди хотят переехать в разные квартиры). По законам города разрешены только парные обмены: если два человека обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах. Докажите, что можно устроить парные обмены так, что уже через два дня каждый будет жить в той квартире, куда хотел переехать.

Задача 17. а) Любую ли перестановку из S_n можно представить как произведение транспозиций вида $(1, k)$?

б)* Пусть T — некоторое множество транспозиций из S_n. Отметим на плоскости n точек $A_1, \ldots, A_n$ и соединим некоторые из них рёбрами по правилу: точки A_i и A_j соединяются ребром, если во множестве T есть транспозиция (i, j). Докажите, что получившийся граф будет связным если и только если любая перестановка из S_n разлагается в произведение транспозиций, принадлежащих множеству T.

Определение 5. *Беспорядок* или *инверсия* в перестановке σ — это такая пара (i, j), что $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$. Перестановка называется *чётной*, если число инверсий в ней чётно, и *нечётной* в противном случае. Множество всех чётных перестановок из S_n обозначается A_n и называется *знакопеременной группой.*

Задача 18. Как увидеть (геометрически) инверсии на картинках из определения 2?

Задача 19. а) Какие перестановки в задаче 5 чётные? **б)** Сколько инверсий у $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

Задача 20. Можно ли сказать, сколько инверсий у перестановки σ^{-1}, зная лишь число инверсий у σ?

Задача 21. Докажите, что любая транспозиция — нечётная перестановка.

Задача 22. Докажите, что при умножении на транспозицию чётность перестановки меняется.

Задача 23. Докажите, что чётность цикла зависит только от его длины. Как?

Задача 24. Докажите, что произведение двух перестановок одной чётности — чётная перестановка, а произведение двух перестановок разной чётности — нечётная перестановка.

Задача 25. Сколько элементов в A_n?

Задача 26*. а) Почему задача Ллойда об игре в 15 неразрешима?

б) Двудольный граф правильно раскрашен в 2 цвета. В каждой его вершине записано по числу (числа разные). За ход можно менять местами любые 2 числа, соединённые ребром. Может ли после нескольких ходов оказаться, что 2 числа одного цвета поменялись местами, а остальные числа на своих местах?

Задача 27*. У отца было 7 дочерей. Всякий раз, когда одна выходила замуж, каждая её старшая сестра, оставшаяся в невестах, жаловалась отцу, что нарушен обычай выходить замуж по старшинству. После того, как вышла замуж последняя дочь, оказалось, что отец услышал всего 7 жалоб. В каком порядке дочери могли выходить замуж (приведите пример)? Сколько всего таких порядков?

Задача 28*. Для каких k в S_n существует перестановка, у которой ровно k инверсий?

Задача 29. В каждой клетке таблицы $2 \times n$ стоит одно из целых чисел от 1 до n, причём в каждой строке стоят разные числа, и в каждом столбце стоят разные числа. Сколько таких таблиц?

Задача 30*. $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Пусть при любом целом x число $P(Q(x)) - x$ делится на 100. Докажите, что тогда при любом целом x число $Q(P(x)) - x$ делится на 100.

Задача 31*. В таблице n строк и m столбцов. *Горизонтальный ход* — это любая перестановка элементов таблицы, при которой каждый элемент остается в той же строке, что и до перестановки. Аналогично определяется *вертикальный ход.* За какое наименьшее число горизонтальных и вертикальных ходов всегда удастся получить любую перестановку элементов таблицы?

Листок №12д. Элементы теории вероятностей 10.2004

Предположим, что мы проводим серию экспериментов, в результате которых наблюдаются различные *исходы (элементарные события)*, зависящие от случая. Пример — бросание игральной кости, здесь элементарное событие — выпадение одного из чисел $1, 2, \ldots, 6$. Совокупности исходов называют *событиями*. Пример события — выпадение чётного числа очков на игральной кости. Каждому исходу ω сопоставляют число $\mathsf{P}(\omega)$ из отрезка $[0; 1]$, называемое *вероятностью* этого исхода. Сумма вероятностей всех элементарных событий должна равняться 1. Вероятность события A — сумма вероятностей исходов, составляющих событие A (обозначается $\mathsf{P}(A)$).

Задача 1. Симметричную монету бросили 10 раз. Какова вероятность того, что **а)** все 10 раз выпал орёл? **б)** сначала выпало 5 орлов, а затем 5 решек? **в)** выпало 5 орлов и 5 решек (в произвольном порядке)?

Задача 2. Тест состоит из 10-ти вопросов, на каждый из которых есть 4 варианта ответа. Двоечник Вася отвечает на вопросы «наобум». **а)** Какова вероятность того, что он ответит правильно на все 10 вопросов?
б) Ровно на 5 вопросов? **в)** Не менее, чем на 5 вопросов?

Задача 3. В году проводят много тестов, аналогичных тесту из задачи 2. Если Васе удаётся списать ответ на вопрос у отличника Пети, он отвечает на вопрос верно, иначе отвечает наугад. В конце года оказалось, что Вася ответил верно на половину всех вопросов. Какую часть вопросов Вася списал?

Задача 4. В соревнованиях по кубковой системе участвуют 2^n спортсменов. Силы спортсменов постоянны и различны, более сильный всегда побеждает более слабого. Найти вероятность того, что в финале встретятся два самых сильных спортсмена (все варианты жеребьёвки равновероятны).

Задача 5. Китайское правительство издало следующий закон, имеющий целью уменьшить прирост населения и наименьшим образом повлиять на традиции. Если в семье первый ребёнок — мальчик (наследник), то этой семье не разрешается больше иметь детей. Если же первый ребёнок — девочка, то семье разрешается завести ещё одного ребёнка. Повлияет ли выполнение этого закона на соотношение численностей мужского и женского населения в Китае? (При каждом рождении вероятность рождения мальчика считаем равной 1/2.)

Задача 6. В некоторой игре ведущий предложил играющему угадать, за какой из трёх закрытых дверей находится автомобиль. Играющий наугад выбрал одну из дверей. После этого ведущий (зная, где находится автомобиль) открыл одну из двух других дверей, за которой не было автомобиля. Далее ведущий предложил играющему две возможности: изменить своё решение и выбрать другую закрытую дверь, или же по-прежнему настаивать на первоначально выбранной двери. Как лучше поступить играющему?

Задача 7. Пусть вероятность попасть под машину при переходе улицы в неположенном месте равна 0,01. Какова вероятность остаться целым, сто раз перейдя улицу в неположенном месте? Как связана эта вероятность с числом e (см. листок 19)? Вычислите её поточнее.

Задача 8. Юра выучил 3 билета из 30. На экзамене все билеты лежат на столе, студенты по очереди тянут билеты, вытянутые билеты убирают со стола. Каким выгоднее тянуть билет Юре?

Задача 9. В урне M черных и N белых шаров. Наугад выбрано n шаров. Какова вероятность вытащить ровно m белых шаров, если после взятия из урны шар **а)** не возвращается назад; **б)** возвращается назад.

Задача 10. Какое наименьшее число учеников должно быть в классе, чтобы вероятность совпадения дней рождения у двух учеников была больше 1/2? (Разрешается посчитать на компьютере.)

Задача 11. Пусть B — событие, обладающее ненулевой вероятностью. Дайте определение условной вероятности $\mathsf{P}_B(A)$ события A при условии, что событие B произошло.

Задача 12. Какова вероятность того, что в семье два мальчика, если один из детей — мальчик?

Задача 13. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле равна $0,2$. Какова вероятность поразить цель, если в 2% случаев выстрел не происходит из-за осечки?

Определение 1. События A и B называются *независимыми*, если $\mathsf{P}(A \text{ и } B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B)$ (при $\mathsf{P}(B) \neq 0$ это равносильно равенству $\mathsf{P}_B(A) = \mathsf{P}(A)$).

Задача 14. Из колоды в 52 карты выбирается наудачу одна карта. Независимы ли события **а)** «выбрать вальта» и «выбрать пику»; **б)** «выбрать вальта» и «не выбрать даму»?

Задача 15. События A и B независимы. Верно ли, что независимы **а)** A и «не B»; **б)** «не A» и «не B»?

Задача 16. Из 100 симметричных монет одна фальшивая (с двумя орлами). Выбрали случайно монету, бросили 5 раз: выпали все орлы. С какой вероятностью, если её бросить ещё 10 раз, снова выпадут все орлы?

Задача 17. (*О вреде подхалимства*) В жюри из трех человек окончательное решение выносится большинством голосов. Председатель жюри и второй член жюри принимают правильное решение независимо с вероятностями $0,7$ и $0,9$, а третий для вынесения решения бросает монету. Как изменится для жюри вероятность вынести правильное решение, если третий начнет копировать решение председателя?

Задача 18. Васе обещают приз, если он выиграет подряд по крайней мере две теннисные партии против своего тренера и клубного чемпиона по одной из схем: тренер-чемпион-тренер или чемпион-тренер-чемпион. Чемпион играет лучше тренера. Какую схему следует выбрать Васе?

Задача 19. Три завода выпускают одинаковые изделия. Первый производит 50% всей продукции, второй — 20%, третий — 30%. Первый завод выпускает 1% брака, второй — 8%, третий — 3%. Выбранное наугад изделие — бракованное. Какова вероятность того, что оно со второго завода?

Задача 20. Два охотника одновременно выстрелили одинаковыми пулями в медведя. Медведь был убит одной пулей. Как поделить охотникам шкуру, если вероятность попадания у первого — 0,3, а у второго — 0,6?

Задача 21. Про некий вид бактерий известно, что каждая бактерия через минуту после своего появления на свет делится с вероятностью p_k на k потомков, где $k = 0, 1, \ldots, 10$. При этом p_0 — это вероятность смерти бактерии через минуту после рождения. Докажите, что вероятность x того, что весь род, начавшийся с данной бактерии, когда-либо целиком вымрет, удовлетворяет уравнению $x = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_{10} x^{10}$.

Задача 22. Имеется 10 чёрных и 10 белых шаров. Вы можете распределить их произвольно по двум урнам (используя все шары), после чего Вам предложат выбрать случайный шар из случайной урны. Как нужно действовать, чтобы максимально увеличить шансы вынуть белый шар?

Задача 23. Трое друзей хотят бросить жребий, кому идти в лес за дровами. Как им это сделать, если у них есть только одна монета (которую можно многократно бросать)?

Задача 24. Каждый из двух игроков пишет на бумажке число 1 или 2, после чего они одновременно открывают бумажки. Если числа совпали, то первый платит второму столько рублей, каковы эти числа; если нет — второй платит первому a рублей. При каком значении a эта игра будет честной? Разберите три случая:

а) Каждый игрок равновероятно выбирает 1 или 2.

б) Первый выбирает 1 с вероятностью p, а второй выбирает 1 с вероятностью q (где $0 \leqslant p, q \leqslant 1$).

в)* То же, что и пункт б), но перед игрой первый случайным образом выбирает p (равновероятно из отрезка $[0; 1]$), а второй независимо выбирает q (равновероятно из отрезка $[0; 1]$).

Задача 25*. Каждый из двух игроков пишет на бумажке по целому числу, потом они одновременно открывают эти числа. Если их сумма делится на 3, то второй платит первому рубль; если нет — второй получает a рублей от первого. При каком значении a эта игра будет честной (разберите случаи, как и в задаче 24)?

Задача 26*. (*Сумасшедшая старушка*) Каждый из n пассажиров купил по билету на n-местный самолет. Первой зашла сумасшедшая старушка и села на случайное место. Далее, каждый вновь вошедший занимает свое место, если оно свободно; иначе занимает случайное. Какова вероятность того, что последний пассажир займет свое место?

Задача 27*. (*Задача о баллотировке*) На выборах кандидат P набрал p голосов, а кандидат Q

набрал q голосов, $p > q$. Найдите вероятность того, что при последовательном подсчёте голосов P все время был впереди Q.

Задача 28*. (*Задача о разорении*) Игрок, имеющий n монет, играет против казино, которое имеет неограниченное число монет. За одну игру игрок либо проигрывает монету, либо выигрывает с вероятностью 0,5. Он играет, пока не разорится. Какова вероятность разориться ровно за m игр?

Задача 29*. Датчик случайных чисел выдает конечное число чисел, каждое — со своей вероятностью. Датчик *сильнее* другого, если с вероятностью большей $1/2$ выданное им число больше числа, выданного другим датчиком. Можно ли сделать датчики A, B и C так, чтобы A был сильнее B, B сильнее C, а C сильнее A?

Задача 30*. Вам в случайном порядке предлагают 100 заранее неизвестных разных денежных сумм, пока Вы не возьмёте предлагаемую сумму. Как действовать, чтобы взять наибольшую с вероятностью, большей $1/3$?

Задача 31*. Палку случайно ломают на 3 части. С какой вероятностью из них можно сложить треугольник?

Задача 32*. (*Задача Бюффона*) На плоскость, разлинованную параллельными прямыми (на расстоянии 1 друг от друга), брошена игла длины $\lambda < 1$. Найдите вероятность пересечения иглы с какой-нибудь прямой.

Задача 33*. (*Парадокс Бертрана*) С какой вероятностью случайная хорда некой данной окружности будет больше стороны правильного треугольника, вписанного в эту окружность?

Задача 34*. Монету радиусом r и толщиной d бросают на горизонтальную поверхность (соударение неупругое). Какова вероятность того, что монета упадет на ребро?

Задача 35*. Человек, имеющий n ключей, хочет отпереть свою дверь, испытывая ключи независимо один от другого в случайном порядке. Найдите среднее число испытаний, если неподошедшие ключи

а) исключаются из дальнейших испытаний; **б)** если они не исключаются.

Задача 36*. Пачка жвачки содержит один из n разных, но равновероятных вкладышей. Сколько пачек нужно в среднем купить, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей?

Задача 37*. Средний интервал движения автобуса №57 равен 35 минут, а средний интервал движения автобуса №661 равен 20 минут. Сколько в среднем нужно ждать **а)** автобус №57; **б)** один из этих автобусов?

Листок №13д. Множества на прямой. Открытые и замкнутые множества 11.2004

Определение 1. *Окрестностью* точки называется произвольный содержащий её интервал[1]. Точка называется *внутренней точкой* множества M, если она содержится в M вместе с некоторой своей окрестностью.

Задача 1. Найдётся ли множество, у которого **а)** нет внутренних точек; **б)** ровно одна внутренняя точка?

Определение 2. Множество называется *открытым*, если каждая его точка внутренняя.

Задача 2. **а)** Докажите, что интервал — открытое множество.

б) Бывают ли счётные открытые множества?

Определение 3. Точка называется *предельной точкой* множества M, если в любой её окрестности содержится бесконечное количество точек из M. Точка называется *изолированной точкой* множества M, если она принадлежит M и не является для него предельной.

[1] Всюду в этом листке под интервалами понимаются в том числе и бесконечные: открытые лучи и вся прямая.

Задача 3. Найдите все предельные точки множества: **а)** $\mathbb{Z}$; **б)** $(0,1)$; **в)** $\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$; **г)** $\{(-1)^n+\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$; **д)** $\mathbb{Q}$; **е)** $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; **ж)** $\{\frac{m}{2^n}\,|\,n,m\in\mathbb{Z}\}$ **з)** бесконечных десятичных дробей, в записи которых используется только 0 и 1; **и)** $\{\sin n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$.

Задача 4. Может ли **а)** $\mathbb{N}$; **б)** $\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ быть множеством предельных точек какого-нибудь множества?

Задача 5. Верно ли, что точная верхняя грань ограниченного множества является его предельной точкой?

Задача 6. Верно ли, что точка x предельная для множества M тогда и только тогда, когда в любой окрестности x содержится **а)** хотя бы одна точка множества M? **б)** хотя бы две точки множества M?

Определение 4. Точка a называется *предельной точкой последовательности* (x_n), если выполняется следующее условие: $\forall\varepsilon>0\ \forall n\ \exists m>n\ |x_m-a|<\varepsilon$.

Задача 7. **а)** Верно ли, что a является предельной точкой (x_n), если a является предельной точкой множества $\{x_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$? Верно ли обратное?
б) Докажите, что ограниченная последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда у неё существует и единственна предельная точка.

Задача 8. **а)** Выкинем из множества все изолированные точки. Может ли так оказаться, что мы ничего не выкинули? Выкинули всё?
б) С полученным множеством повторим ту же самую операцию. И так далее: из получающегося после каждого шага множества будем выкидывать все изолированные точки. Допустим, каждый раз из множества действительно что-то выкидывают. Может ли это продолжаться бесконечно долго?

Определение 5. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 9. **а)** Существуют ли множества, не являющиеся ни замкнутыми, ни открытыми?
б) Всегда ли дополнение замкнутого множества открыто? Всегда ли дополнение открытого множества замкнуто? (*Дополнением* множества A называется разность $\mathbb{R}\setminus A$. Обозначения: $\overline{A}$, CA.)

Задача 10. **а)** Докажите, что конечное пересечение (то есть пересечение конечного числа) и произвольное объединение (то есть объединение произвольного количества) открытых множеств открыто.
б) Докажите, что конечное объединение и произвольное пересечение замкнутых множеств замкнуто.

Задача 11. Найдите все множества, являющиеся одновременно открытыми и замкнутыми.

Задача 12. **а)** Докажите, что всякое открытое множество можно представить в виде объединения не более чем счётного числа попарно непересекающихся интервалов.
б) Единственно ли такое представление?

Задача 13. **а)** Можно ли представить интервал в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств?
б) А отрезок в виде объединения двух непересекающихся непустых замкнутых множеств?
в) Можно ли представить прямую в виде объединения попарно непересекающихся отрезков?

Задача 14. Докажите, что **а)** у любого бесконечного ограниченного множества есть хотя бы одна предельная точка; **б)** из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Задача 15. (*Компактность отрезка*) Отрезок покрыт счётной системой **а)** интервалов;
б) произвольных открытых множеств. Докажите, что в этой системе можно выбрать конечную подсистему, также покрывающую отрезок.
в) Решите задачу для произвольной (не обязательно счётной) системы открытых множеств.

Задача 16. Останутся ли верными утверждения предыдущей задачи, если заменить отрезок на интервал?

Определение 6. Непустое множество M называется *компактом*, если из произвольного покрытия M открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 17. Докажите, что **а)** компакты на прямой — это в точности непустые замкнутые ограниченные множества; **б)** любая последовательность вложенных компактов $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$ имеет непустое пересечение.

Задача 18. Пусть $D \subset \mathbb{R}$. Математики Банах и Мазур играют в бесконечную игру. Они по очереди выбирают отрезки на прямой, так чтобы каждый следующий содержался внутри предыдущего. Если в пересечении полученной последовательности вложенных отрезков будет точка из множества D, то выиграл Банах, иначе Мазур. Кто выиграет при правильной игре, если D **а)** конечно; **б)** счётно; **в)** открыто; **г)** замкнуто?

Листок №14д. Суммирование рядов 01.2005

Определение 1. Пусть (a_n) — числовая последовательность. Формальное выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *рядом*. Число $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ называется *n-й частичной суммой* ряда. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и имеет сумму* A, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$. Тогда пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не существует, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится*.

Задача 1. Пусть $a_n \geqslant 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда ограничено множество его частичных сумм $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, причём в этом случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Задача 2. Какие из следующих рядов сходятся? Найдите их суммы.
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; **в)** (*геометрическая прогрессия*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}$, $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$; **г)** (*гармонический ряд*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; **д)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; **е)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$; **ж)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; **з)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; **и)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k)}$.

Задача 3. **а)** Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Верно ли обратное?

б) (*Критерий Коши сходимости ряда*) Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что из $n \geqslant m > N$ (где $n, m \in \mathbb{N}$) следует $|a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon$.

Задача 4. Верно ли, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, причём $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то последовательность (s_n) его частичных сумм стремится к бесконечности?

Задача 5. Верно ли, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?

Задача 6. Сходятся ли следующие ряды: **а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$?

Задача 7. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$, где $a_n = 1$, если в десятичной записи n нет цифры 9, и $a_n = 0$ иначе?

Задача 8. Пусть $a_n \geqslant 0$ при $n \in \mathbb{N}$. Докажите: если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Верно ли обратное?

Задача 9. Докажите: **а)** ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ сходится; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$; **в)** $e-\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}<\frac{1}{m!\,m}$; **г)** число e иррационально.

Задача 10. Пусть $a_n\geqslant 0$ при всех $n\in\mathbb{N}$ и $\sigma\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — взаимно однозначное отображение (перестановка натурального ряда). Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$ (то есть если сходится ряд в левой части равенства, то сходится и ряд в правой части, причём их суммы равны; если ряд в левой части расходится, то и ряд в правой части расходится).

Задача 11*. Пусть p_n — n-е простое число, $n\in\mathbb{N}$. **а)** Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-1/p_1^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-1/p_n^2}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

б) Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-1/p_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-1/p_n}\right)$? **в)** Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$?

Задача 12*. **а)** Пусть γ_k — сумма ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}$. Найдите сумму $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\gamma_k$. **б)** (*Эйлер*) Пусть A — множество всех целых чисел, представимых в виде n^k, где n,k — целые числа, большие 1. Найдите сумму $\sum\limits_{a\in A}\frac{1}{a-1}$.

Задача 13. **а)** (*Признак сравнения Вейерштрасса*) Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ — ряды с неотрицательными членами. Пусть найдётся такой номер k, что при всех $n>k$, $n\in\mathbb{N}$ будет выполнено неравенство $b_n\geqslant a_n$. Тогда если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится; если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ расходится.

б) (*Признак д'Аламбера*) Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ положительны, и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$. Если $q<1$, то ряд сходится, а если $q>1$, то ряд расходится. Что можно сказать о сходимости ряда, если $q=1$?

в) (*Признак Коши*) Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ неотрицательны, и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$. Если $q<1$, то ряд сходится, а если $q>1$, то ряд расходится. Что можно сказать о сходимости ряда, если $q=1$?

г) Приведите пример сходящегося ряда с положительными членами, к которому применим признак Коши, но не применим признак д'Аламбера. Бывает ли наоборот?

Задача 14. Исследуйте ряды на сходимость:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$; **б)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$; **д)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$; **е)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\binom{2n}{n}}$; **ж)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{x}{n})$.

Задача 15. **а)** (*Теорема Лейбница*) Пусть $a_n>0$ при всех $n\in\mathbb{N}$, и кроме того, $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Тогда знакочередующийся ряд $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-\ldots$ сходится.

б) Верно ли утверждение теоремы без условия монотонности (a_n)?

Определение 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Задача 16. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

Задача 17. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ абсолютно сходится. Тогда абсолютно сходится произвольный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, полученный из него перестановкой слагаемых, причём $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Определение 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *условно сходящимся*, если он сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится.

Задача 18. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.

а) Докажите, что ряд, составленный из его положительных (или отрицательных) членов, расходится.

б) (*Теорема Римана*) Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ можно превратить перестановкой слагаемых как в расходящийся ряд, так и в сходящийся с произвольной наперёд заданной суммой.

в) Докажите, что можно так сгруппировать члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (не переставляя их), что ряд станет абсолютно сходящимся.

г)* Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — ряд, составленный из комплексных чисел, S — множество всех перестановок σ натурального ряда, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится. Каким может быть множество $\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S\}$?

Задача 19. Исследуйте ряды на абсолютную и условную сходимость:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n^2$; **д)*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Задача 20. Пусть s — сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Найдите суммы
а) $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$; **б)** $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots$.
в) Переставьте члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ так, чтобы он стал расходящимся.

Задача 21. Существует ли такая последовательность (a_n), $a_n \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}$, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$ сходятся? Можно ли выбрать такую последовательность из положительных чисел?

Задача 22*. Существует ли такая последовательность (a_n), что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ расходится?

Задача 23*. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что для любого сходящегося ряда $\sum a_n$ ряд $\sum f(a_n)$ сходится. Докажите, что тогда найдётся такое число $C \in \mathbb{R}$, что $f(x) = Cx$ в некоторой окрестности нуля.

Листок №15д. **Основная теорема алгебры** 02.2005

Формулировка

Произвольный многочлен степени $n > 0$ с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней (считаемых со своими кратностями).

Обозначения

$P(z)$ — некоторый произвольно выбранный многочлен от комплексной переменной z с комплексными коэффициентами степени $n > 0$.
$\mathbb{D}(z_0, \rho)$ — круг с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ радиуса ρ, т. е. $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant \rho\}$.

* * *

Задача 1. (*Поведение многочлена на бесконечности*) Докажите, что $|P(z)| \to +\infty$ при $|z| \to +\infty$.

Задача 2. (*Поведение многочлена в круге*) Докажите, что $|P(z)|$ ограничен в любом круге (конечного радиуса) и достигает в нём своих максимума и минимума.

Задача 3. (*Разложение Тейлора*) Докажите, что для любого $z_0 \in \mathbb{C}$ существуют такие $k \in \mathbb{N}$, $c_k, c_{k+1}, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, что $c_k \neq 0$ и для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство

$$P(z) = P(z_0) + c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots + c_n(z - z_0)^n \qquad (*)$$

Представление $P(z)$ в таком виде называется *разложением Тейлора многочлена $P(z)$ в точке z_0*.

Задача 4. (*Поведение многочлена в малой окрестности точки*) Пусть $(*)$ — разложение Тейлора многочлена $P(z)$ в точке $z_0 \in \mathbb{C}$.

а) Докажите, что существует такое $\rho > 0$, что для любого $z \in \mathbb{D}(z_0, \rho)$, $z \neq z_0$, справедливо неравенство

$$|P(z)| < |P(z_0) + c_k(z - z_0)^k| + |c_k(z - z_0)^k| \qquad (**)$$

б) Пусть для любого $z \in \mathbb{D}(z_0, \rho)$, $z \neq z_0$, выполнено соотношение $(**)$, и, кроме того, $P(z_0) \neq 0$. Докажите, что существует такое $z_1 \in \mathbb{D}(z_0, \rho)$, что $|P(z_1)| < |P(z_0)|$.

Задача 5. (*Поведение многочлена на плоскости*)

а) Докажите, что $|P(z)|$ достигает на плоскости своего минимума: существует такое $\mu \geqslant 0$, что $|P(z)| \geqslant \mu$ при любом $z \in \mathbb{C}$, причём найдётся такое $z_0 \in \mathbb{C}$, что $|P(z_0)| = \mu$.

б) Пусть μ такое, как в п. а). Докажите, что $\mu = 0$.

Задача 6. Докажите, что всякий многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень, и выведите отсюда основную теорему алгебры.

Задача 7. **а)** Разложите в произведение многочленов не более чем второй степени с вещественными коэффициентами многочлены $x^4 + 3x^2 + 2$, $x^2 + 4$, $x^n - 1$.

б) Докажите, что произвольный многочлен с вещественными коэффициентами раскладывается в произведение многочленов не более чем второй степени с вещественными коэффициентами.

Задача 8. Многочлен $P(x) \in \mathbb{R}(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$ принимает только неотрицательные значения. Докажите, что его можно представить в виде суммы нескольких квадратов многочленов с вещественными коэффициентами.

Задача 9. Докажите, что максимум $|P(z)|$ в круге достигается в некоторой точке граничной окружности этого круга.

Листок №16д. Комплексные числа 2 03.2005

Использование комплексных чисел в планиметрии основано на том, что их можно отождествить с точками плоскости: числу $z = a + bi$ соответствует точка с координатами (a, b). При этом квадрат расстояния между точками z и w равен $|z - w|^2 = (z - w)(\overline{z} - \overline{w})$.

Задача 1. (*Эйлер*) Сумма квадратов длин сторон четырёхугольника отличается от суммы квадратов диагоналей на учетверённый квадрат длины отрезка, соединяющего середины диагоналей.

Задача 2. Пусть M — точка на плоскости, S — окружность, AB — её диаметр. Докажите, что величина $MA^2 + MB^2$ не зависит от выбора диаметра AB.

Задача 3. (*Теорема Лейбница*) Пусть F — центр масс (то есть, точка пересечения медиан) треугольника ABC. Докажите, что для любой точки M на плоскости выполнено следующее равенство: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = AF^2 + BF^2 + CF^2 + 3MF^2$.

Задача 4. Докажите, что вещественная и мнимая части любого корня квадратного уравнения с комплексными коэффициентами выражаются через вещественные и мнимые части коэффициентов уравнения с помощью арифметических операций и извлечения действительного квадратного корня (т. е. «выражаются в радикалах»).

Задача 5. Выразите в радикалах $\cos\frac{2\pi}{5}$ и $\sin\frac{4\pi}{5}$ и постройте циркулем и линейкой правильный пятиугольник.

Решая следующие задачи, полезно вспомнить результаты задачи 24 листка 22.

Задача 6. На плоскости задано 3 точки A, B, C. Точка A_1 — образ точки C при повороте вокруг точки A на 90° против часовой стрелки; точка B_1 — образ точки C при повороте вокруг точки B на 90° по часовой стрелке. Пусть K — середина A_1B_1, M — середина AB. Докажите, что отрезки KM и AB перпендикулярны. Как соотносятся их длины?

Задача 7. На сторонах треугольника $A_1A_2A_3$ во внешнюю сторону построены квадраты с центрами B_1, B_2, B_3. Докажите, что отрезки B_1B_2 и A_3B_3 равны по длине и перпендикулярны.

Задача 8. Пусть $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ — правильные треугольники, причём их вершины занумерованы в порядке обхода против часовой стрелки. Докажите, что середины отрезков A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 — вершины правильного треугольника.

Определение 1. *Простое отношение* тройки точек z_1, z_2 и z_3 — это комплексное число $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$.

Задача 9. Докажите, что три точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их простое отношение вещественно.

Задача 10. (*Прямая Эйлера*) В любом треугольнике центр тяжести треугольника, его ортоцентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой.

Задача 11. Докажите, что три точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника тогда и только тогда, когда $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$.

Определение 2. *Двойное отношение* четвёрки точек z_1, z_2, z_3 и z_4 — это число $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$.

Задача 12. **а)** Пусть четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности. Докажите, что тогда их двойное отношение вещественно. **б)** Пусть двойное отношение четырёх точек вещественно. Что можно сказать об их взаимном расположении?

Задача 13. **а)** Докажите, что $(z_1 - z_2)(z_4 - z_3) + (z_2 - z_3)(z_4 - z_1) = (z_2 - z_4)(z_3 - z_1)$.
б) (*Птолемей*) Докажите, что в любом четырёхугольнике произведение длин диагоналей не превосходит сумму произведений длин противоположных сторон. Когда достигается равенство?

Задача 14. **а)** Пусть z_1 и z_2 — две точки на единичной окружности $|z| = 1$. Найдите комплексное число, задающее точку пересечения касательных к этой окружности, проходящих через точки z_1 и z_2. **б)** (*Задача Ньютона*) В описанном около окружности четырёхугольнике середины диагоналей и центр окружности лежат на одной прямой.

Задача 15*. Каждую сторону n-угольника в процессе обхода против часовой стрелки продолжили на её длину. Оказалось, что концы построенных отрезков служат вершинами правильного n-угольника. Докажите, что исходный n-угольник — тоже правильный.

Задача 16*. (*Теорема Морли*) Трисектрисой угла называют луч, исходящий из вершины угла и отсекающий от угла втрое меньший угол. Понятно, что каждый угол имеет две трисектрисы. В треугольнике ABC пусть M — точка пересечения двух трисектрис, примыкающих к стороне BC, Q — точка пересечения двух трисектрис, примыкающих к стороне CA и P — точка пересечения трисектрис, примыкающих к AB. Докажите, что треугольник MPQ правильный.

Листок №17д. Бесконечные десятичные дроби 03.2005

Соглашение. В этом листке греческими буквами обозначаются цифры (символы 0, 1, ..., 9).

Определение 1. Выражение вида $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0}$, где $\alpha_n \neq 0$, называется *десятичной записью* числа $\alpha_n 10^n + \alpha_{n-1}10^{n-1} + \dots + \alpha_1 10 + \alpha_0$ (когда вместо $\alpha_n, \ldots, \alpha_0$ стоят конкретные цифры, черта сверху не пишется). Десятичная запись числа $N \in \mathbb{N}$, взятая со знаком «$-$», обозначает число $-N$.

Задача 1. **а)** Докажите, что для любого $N \in \mathbb{N}$ существует такое $t \in \mathbb{N}$, что $10^{t-1} \leqslant N < 10^t$.
б) Докажите, что у каждого целого числа есть ровно одна десятичная запись.

Задача 2*. Объясните алгоритмы сложения, вычитания и умножения целых чисел «в столбик».

Определение 2. Выражение вида $A,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, где A — десятичная запись некоторого неотрицательного целого числа, называется (неотрицательной) *бесконечной десятичной дробью*. Если в этом выражении после некоторого номера k все цифры $\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots$ равны нулю, то дробь называется *конечной*, ей сопоставляется число $A,\alpha_1\ldots\alpha_k = A+\overline{\alpha_1\ldots\alpha_k}/10^k$. Дроби $A,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ сопоставляют точную верхнюю грань её приближений по недостатку, т. е. число $\sup\{A,\alpha_1\ldots\alpha_k \mid k\in\mathbb{N}\}$. Аналогично определяют отрицательные бесконечные десятичные дроби и отвечающие им числа.

Задача 3. Докажите корректность определения 2, то есть докажите, что каждой бесконечной десятичной дроби соответствует действительное число, и притом единственное.

Определение 3. Дробь $A,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ называется *периодической*, если начиная с некоторого номера n её цифры периодически повторяются, то есть дробь имеет вид $A,\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\beta_1\ldots\beta_m\beta_1\ldots\beta_m\ldots$. Обозначение: $A,\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\beta_1\ldots\beta_m)$. Если n — минимальный такой номер, то $\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}$ называется *предпериодом* нашей дроби (*длины* $n-1$), а $\beta_1\ldots\beta_m$ — *периодом* (*длины* m). Если после этого выбрать и m минимальным, получим *минимальный* период.

Задача 4. **а)** Докажите, что $0,(9)=1$; $0,(3)=1/3$; $0,1(6)=1/6$.
б) Найдите 99-ю цифру после запятой в десятичной записи $5/7$.

Задача 5. **а)** Докажите, что дроби $0,(\beta_1\ldots\beta_m)$ соответствует число $\overline{\beta_1\ldots\beta_m}/(10^m-1)$.
б) Докажите, что дроби $A,\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}(\beta_1\ldots\beta_m)$ соответствует рациональное число, и найдите его.

Задача 6. Докажите, что каждому рациональному числу соответствует периодическая бесконечная десятичная дробь, и объясните алгоритм её нахождения (деление «в столбик»).

Задача 7. **а)** Найдите периоды $1/7$ и $1/17$. **б)** Для $k=6$ и $k=16$ укажите такое k-значное число $N\in\mathbb{N}$, что десятичные записи чисел N, $2N$, $\ldots$, kN отличаются только порядком цифр.

Задача 8. Докажите, что сумма длин предпериода и минимального периода дроби k/n не больше n.

Задача 9. Минимальный период дроби $1/n$ начинается «сразу после запятой» и имеет длину t. Докажите, что t — минимальное целое число, для которого 10^t-1 делится на n.

Задача 10. При каких натуральных n дробь $1/n$ **а)** является конечной? **б)** не имеет предпериода?

Задача 11. Докажите, что число $0{,}123456789101112\ldots$ иррационально.

Задача 12. Пусть $(k,n)=1$. Докажите, что минимальные периоды у k/n и $1/n$ одинаковы по длине.

Задача 13. Длина минимального периода у одной бесконечной десятичной дроби равна 6, а у другой — равна 12. Какой может быть длина минимального периода у суммы этих дробей?

Задача 14. Пусть $(m,n)=1$ и длины минимальных периодов у дробей $1/n$ и $1/m$ равны k и l. Найдите длину минимального периода у дроби $1/mn$.

Задача 15*. Может ли длина периода дроби $1/n$ равняться $n-1$, если n — составное число?

Определение 4. Две неотрицательные дроби называются *близнецами*, если они имеют вид $A,(9)$ и $A',(0)$, где $A'=A+1$, или $A,\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(9)$ и $A,\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha'_k(0)$, где $\alpha'_k=\alpha_k+1$.

Задача 16. Какие отрицательные дроби называют близнецами? Докажите, что две бесконечные десятичные дроби обозначают одно и то же число тогда и только тогда, когда они совпадают или являются близнецами.

Задача 17. Докажите, что каждому действительному числу соответствует либо ровно одна бесконечная десятичная дробь, либо ровно две дроби, являющиеся близнецами.

Задача 18. Придумайте алгоритм, как по десятичным записям двух дробей узнать, какая больше.

Задача 19. Пусть $x_n = a_1/1 + a_2/2 + \cdots + a_n/n$, где $a_n=1$, если в десятичной записи числа n нет цифры 9, и $a_n=0$ иначе. Имеет ли эта последовательность предел?

Задача 20. Докажите, что любое положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичные записи которых содержат только цифры 0 и 7.

Задача 21*. Двое по очереди отмечают на числовой оси отрезки так, что очередной отрезок вложен в предыдущий. Получается последовательность вложенных отрезков. Если она стягивается к рациональному числу, то выигрывает первый игрок, если к иррациональному — то второй, а если не стягивается — ничья. Существует ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия?

Листок №18д. **Приближение действительных чисел рациональными** 03.2005

Задача 1. В каждой клетке бесконечной шахматной доски сидит по зайцу (все зайцы одинаковы и одинаково расположены).

а) Охотник стреляет по направлению с иррациональным тангенсом угла наклона к линиям доски. Докажите, что он попадет хотя бы в одного зайца.

б) Докажите, что если тангенс угла наклона рационален, то достаточно малых зайцев можно расположить так, что охотник промахнется.

Задача 2. Конь прыгает скачками $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ по полю, где квадратно-гнездовым способом посеяна кукуруза. Докажите, что он обязательно сшибет хотя бы один росток (конь сшибает росток только в том случае, если приземляется на него; в прыжках конь ростки не задевает).

Определение 1. *Коэффициентом качества* приближения p/q иррационального числа α (где $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$) называется число
$$q|\alpha - \frac{p}{q}|.$$
Из двух приближений лучшим считается то, у которого меньший коэффициент качества.

Задача 3. Какое из приближений числа $\sqrt{2}$ лучше: 3/2; 7/5 или 1,41?

Задача 4. Пусть α — некоторое иррациональное число. Докажите, что для любого $q \in \mathbb{N}$ существует приближение $p/q \in \mathbb{Q}$ числа α с коэффициентом качества, меньшим $1/2$.

Задача 5. Докажите, что для любых натуральных чисел N, k и любого иррационального числа α существует по крайней мере k таких различных дробей $p/q \in \mathbb{Q}$, что $q \leqslant Nk$ и $q|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{N}$.

Задача 6. Докажите, что для любого $\alpha \notin \mathbb{Q}$ и для сколь угодно большого N существует бесконечно много различных приближений $p/q \in \mathbb{Q}$ с коэффициентом качества, меньшим $1/N$.

Задача 7. Пусть число α иррационально. Докажите, что существует бесконечно много таких рациональных чисел p/q, что
$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}.$$

Определение 2. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *t-неприближаемым*, если найдется такое положительное число $c \in \mathbb{R}$, что при любых $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ выполнено одно из двух условий:
$$\alpha = \frac{m}{n} \qquad \text{или} \qquad |\alpha - \frac{m}{n}| > \frac{c}{n^t}.$$

Задача 8. Докажите, что рациональные числа 1-неприближаемы.

Задача 9. Докажите, что число $e = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}$ иррационально.

Задача 10. Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$ — корень многочлена $A(x)$ степени $n \in \mathbb{N}$ с целыми коэффициентами.

а) Докажите, что для любого рационального числа p/q, не являющегося корнем $A(x)$, справедливо неравенство $|q^n A(p/q)| \geqslant 1$.

б) Докажите, что α является n-неприближаемым.

Задача 11. Докажите, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i!}}$ сходится к *трансцендентному числу*, т. е. к такому числу, которое не может быть корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.

Задача 12*. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ множество действительных чисел, не являющихся $(2+\varepsilon)$-неприближаемыми, имеет меру 0 (т. е. для каждого $\delta > 0$ это множество можно покрыть счётной системой интервалов, сумма длин которой меньше δ).

Задача 13.** **а)** (*Теорема Гурвица–Бореля*) Докажите, что для любого иррационального числа α существует бесконечно много таких его приближений $p/q \in \mathbb{Q}$, что $|\alpha - \dfrac{p}{q}| < \dfrac{1}{q^2\sqrt{5}}$.

б) Число $\sqrt{5}$ в условии теоремы пункта а) нельзя увеличить: найдутся иррациональные числа, имеющие лишь конечное число приближений, удовлетворяющих неравенству измененной теоремы.

Листок №19д. Множества на прямой. Канторово множество 04.2005

Определение 1. Множество M *имеет меру ноль*, если для любого положительного ε множество M можно покрыть не более чем счётной системой интервалов с суммарной длиной не больше ε (то есть покрыть такой счётной системой интервалов, что сумма длин любого конечного набора этих интервалов не больше ε).

Задача 1. Докажите, что счётное множество имеет меру ноль.

Задача 2. Докажите, что **а)** конечное **б)** счётное объединение множеств меры ноль имеет меру ноль.

Задача 3. Верно ли, что определение «множества меры ноль» по сути не изменится, если в определении разрешить покрытия только конечными системами интервалов?

Задача 4. Раскрасим прямую так, чтобы точки имели одинаковый цвет, если и только если разность между ними рациональна (понадобится несчётное множество цветов). Рассмотрим какое-нибудь множество M, в котором все точки имеют разный цвет, но при этом все цвета встречаются. Может ли оно иметь меру ноль?

Задача 5. Возьмём отрезок $K_0 = [0,1]$. Разделим его на три равные части и средний интервал $I_1^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ выкинем. Первый и третий отрезки образуют множество K_1. Каждый из них разделим на три части и выкинем средние интервалы $I_1^2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $I_2^2 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Получится множество K_2. И так далее: на n-м шаге будем делить каждый из 2^{n-1} отрезков, образующих K_{n-1}, на три равные части и выкидывать все средние интервалы $I_1^n, I_2^n, \ldots, I_{2^{n-1}}^n$. Так получается множество K_n, состоящее из 2^n отрезков. Устремим n к бесконечности. Множество, получающееся в пределе, то есть $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, называется *канторовым* (всюду дальше будем обозначать его K).

а) Конечно ли это множество? Счётно?

б) Докажите, что канторово множество имеет меру ноль.

в) Является ли оно открытым? Замкнутым?

Задача 6. **а)** Докажите, что $\frac{1}{4}$ принадлежит канторову множеству.

б) Бесконечно ли множество рациональных чисел, принадлежащих канторову множеству?

Задача 7. **а)** Докажите, что множество $\{a+b \mid a,b \in K\}$ всевозможных сумм элементов канторова множества совпадает с отрезком $[0,2]$.

б) Что можно сказать про множество всевозможных разностей $\{a-b \mid a,b \in K\}$?

Определение 2. Множество M называется *нигде не плотным*, если на каждом интервале I найдётся интервал $U \subset I$, такой что $U \cap M = \varnothing$.

Задача 8. Докажите, что объединение конечного числа нигде не плотных множеств нигде не плотно.

Задача 9. Являются ли нигде не плотными следующие множества: **а)** $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$; **б)** $\mathbb{Q}$; **в)** множество бесконечных десятичных дробей, в записи которых используется только 0 и 1; **г)** канторово множество?

Задача 10. Существует ли непрерывная функция $f\colon K \to [0,1]$, множеством значений которой является весь отрезок $[0,1]$?

Определение 3. Объединение счётного числа нигде не плотных множеств называется *множеством первой категории.* Если множество не представимо в виде счётного объединения нигде не плотных, то его называют *множеством второй категории.*

Задача 11. **а)** (*Теорема Бэра*) Докажите, что отрезок является множеством второй категории.
б) Какую категорию имеет множество иррациональных чисел?

Задача 12. Пронумеруем рациональные числа на отрезке $[0,1]$: $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Возьмём некоторое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество $X_\varepsilon = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_{\frac{\varepsilon}{2^n}}(q_n)$, то есть объединение всех интервалов вида $(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n})$. **а)** Докажите, что $[0,1] \setminus X_\varepsilon$ нигде не плотно. **б)** Верно ли, что $X_{\frac{1}{2}} \supset [0,1]$? **в)** Устремим ε к нулю, то есть рассмотрим множество X — пересечение всевозможных X_ε, или $X = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} X_\varepsilon$. Верно ли, что $X = \mathbb{Q} \cap [0,1]$? Зависит ли ответ от выбранной в начале нумерации рациональных чисел на отрезке?

Задача 13. Математики Банах и Мазур опять играют в свою игру (см. задачу 18 листка 12д). У кого из них есть выигрышная стратегия в случае, когда D — это **а)** нигде не плотное множество; **б)** множество первой категории; **в)** множество меры ноль; **г)** X_ε; **д)** X (см. задачу 12)?

Определение 4. *Замыканием* множества M называется объединение его со всеми своими предельными точками. Обозначение: $\overline{M}$.

Задача 14. **а)** Докажите, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием. **б)** Докажите, что $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. **в)** Докажите, что $\overline{A}$ есть пересечение всевозможных замкнутых множеств, содержащих A.

Задача 15. **а)** Докажите, что замыкание нигде не плотного множества нигде не плотно.
б) Верно ли, что замкнутое нигде не плотное множество имеет меру ноль?

Определение 5. Множество M называется *всюду плотным в множестве* A, если $A \subset \overline{M}$. Если множество M всюду плотно на прямой (то есть $\overline{M} = \mathbb{R}$), то обычно про него просто говорят, что оно всюду плотно.

Задача 16. Являются ли следующие множества всюду плотными:
а) множество всевозможных несократимых дробей, в записи числителя и знаменателя которых не участвует девятка; **б)** множество конечных десятичных дробей; **в)** $[0,1] \setminus X$ в отрезке $[0,1]$ (см. задачу 12)?

Задача 17. **а)** Верно ли, что дополнение всюду плотного множества нигде не плотно?
б) Верно ли, что дополнение нигде не плотного множества всюду плотно?
в) Докажите, что дополнение всюду плотного открытого множества нигде не плотно.

Задача 18. **а)** Докажите, что если множество не является нигде не плотным, то оно всюду плотно в некотором интервале. **б)** Что значит, что множество не является всюду плотным?

Задача 19. Пусть α — действительное число. Рассмотрим множество D_α всех дробных частей $\{n\alpha\}$ для всевозможных целых n. Пусть α иррационально.
а) Докажите, что 0 — предельная точка этого множества.
б) Докажите, что D_α всюду плотно на отрезке $[0,1]$.
в) Что можно сказать про D_α, если α рационально?

Задача 20. Разделим окружность длины 1 на произвольные m дуг и занумеруем их числами от 1 до m. Фиксируем иррациональное число a и отметим на окружности все точки вида $n\alpha$ радиан (отсчитывая от какой-то начальной точки против часовой стрелки), где угол α соответствует дуге длины a. Составим бесконечную последовательность ν из чисел от 1 до m: если точка $n\alpha$ попала внутрь дуги с номером k, то запишем на n-м месте последовательности число k [2)].

[2)] Точка $n\alpha$ может попасть на границу между соседними дугами, но не более одного раза для каждой такой границы, так как a иррационально. Поэтому в этом случае будем рассматривать последовательность начиная с того места, после которого $n\alpha$ на границы дуг уже не попадает.

а) Докажите, что все числа от 1 до m встречаются в этой последовательности бесконечно много раз.

б) Пусть где-то в последовательности ν встретился конечный отрезок $\overline{a_1 \dots a_k}$ из чисел от 1 до m. Докажите тогда, что найдётся такое натуральное l, что среди любых l подряд идущих чисел из последовательности ν найдутся k подряд идущих, составляющие $\overline{a_1 \dots a_k}$ (последовательности с таким свойством называются *почти периодическими*).

в) Будет ли последовательность ν периодической?

Задача 21. **а)** Докажите, что 2^n начинается с цифры 7 тогда и только тогда, когда $\lg 7 \leqslant \{n \lg 2\} < \lg 8$.

б) Докажите, что для любой конечной последовательности цифр $\overline{a_1 \dots a_k}$, где $a_1 \neq 0$, найдётся натуральная степень двойки, начинающаяся с этой последовательности цифр.

Задача 22. Рассматривается последовательность, n-й член которой есть первая цифра числа 2^n.

а) Докажите, что эта последовательность почти периодическая (см. задачу 20). Является ли она периодической? **б)** Найдите количество различных «слов» длины 13 (наборов из 13 подряд идущих цифр) в этой последовательности.

Задача 23. **а)** Возьмём отрезок $[0,1]$ и будем действовать так же, как и при построении множества K, но только делить на пять равных частей (а не на три) и выкидывать вторую и четвёртую. Исследуйте свойства получившегося множества. А если делить на восемь равных частей и выкидывать вторую, третью и шестую? **б)** Опять возьмём отрезок $[0,1]$ и будем с ним поступать так же, как при построении множества K, но только на n-м шаге будем из каждого оставшегося отрезка вырезать в середине интервал длины $\frac{1}{n}$ от его длины (а не $\frac{1}{3}$). Исследуйте свойства получившегося множества.

Задача 24. (*И. М. Гельфанд*) **а)** На плоскости из начала координат в каждом направлении выпустили по некоторому отрезку. Пусть M — объединение этих отрезков. Известно, что M — замкнутое множество. Докажите, что оно имеет непустую внутренность (непустое множество внутренних точек).

б) Обязательно ли в M найдётся круг с центром в начале координат?

Задача 25. Докажите, что у счётного замкнутого множества всегда найдётся изолированная точка.

Листок №20д. Производная. Часть 3 09.2005

Соглашение. В этом листке слова «функция f удовлетворяет условию $(*)$» означают, что f определена и непрерывна на некотором отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b).

Задача 1. Найдется ли n, при котором многочлен $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ имеет более одного корня из $\mathbb{R}$?

Задача 2. **а)** Какова наибольшая возможная площадь четырёхугольника, 3 стороны которого равны 1? **б)** У какого равностороннего шестиугольника со стороной 1 площадь наибольшая?

Задача 3. Может ли уравнение $x(x^2-1)(x^2-1000) = \alpha$ при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$ иметь 5 целых корней?

Задача 4. Пусть функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$, точка A плоскости не лежит на графике функции f, и M — такая точка графика функции f, что расстояние AM минимально. Докажите, что отрезок AM перпендикулярен касательной к графику f в точке M.

Задача 5. Пусть $k \in \mathbb{R}$, функция f удовлетворяет условию $(*)$ и $|f'(x)| \leqslant k$ при любом $x \in (a,b)$. Докажите, что при любых $x, y \in (a,b)$ выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$.

Задача 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$, n не является точной четвёртой степенью. Докажите, что тогда $\{\sqrt[4]{n}\} > \frac{1}{4} n^{-3/4}$.

Задача 7. Найдите суммы: **а)** $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$; **б)** $C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + nC_n^n x^{n-1}$.

Задача 8. **а)** Точка с координатами $(x(t), y(t))$ движется в плоскости xOy так, что в каждый момент времени t выполнено $y'(t) = 1/x(t)$, $x'(t) = -1/y(t)$. В некий момент времени точка имела координаты $(12, 3)$. Может ли она в какой-нибудь другой момент иметь координаты $(6, 5)$? Нарисуйте траекторию движения точки. **б)** Те же вопросы для точки, движущейся по закону $y'(t) = -x(t)$, $x'(t) = y(t)$.

Задача 9. **а)** Напишите уравнение, задающее множество таких точек (p, q), что квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ имеет кратный корень, и нарисуйте это множество на плоскости pOq.

б) Для каждого числа x из множества $\{-3, -2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 2, 3\}$ нарисуйте на плоскости pOq график прямой, задающейся уравнением $x^2 + px + q = 0$. Докажите, что эти прямые (и вообще все прямые вида $x^2 + px + q = 0$ на плоскости pOq) касаются некоторой кривой. Что это за кривая?

в) Укажите на плоскости множества таких точек (p, q), что квадратный трёхчлен x^2+px+q имеет два различных корня, не имеет действительных корней.

г) Укажите на плоскости pOq множества таких точек (p, q), что трёхчлен $x^2 + px + q$ имеет на отрезке $[-1; 1]$ два различных корня, кратный корень, не имеет действительных корней.

Задача 10. **а)** Для каждого числа x из множества $\{-2, -1, -1/2, -1/3, 0, 1/3, 1/2, 1, 2\}$ нарисуйте на плоскости pOq график прямой, задающейся уравнением $x^3 + px + q = 0$. Докажите, что все прямые вида $x^3 + px + q = 0$ на плоскости pOq касаются некоторой кривой. Что это за кривая?

б) Задайте уравнением множество таких точек (p, q), что многочлен $x^3 + px + q$ имеет кратный корень. Нарисуйте на плоскости это множество, а также множества таких точек (p, q), что многочлен $x^3 + px + q$ имеет три разных корня, корень кратности 2, корень кратности 3, не имеет действительных корней.

в) Сколько корней у многочлена $x^3 - 10x + 12$?

г) Исследуйте геометрически число корней уравнения $x^3 + px + q = 0$ на отрезке $[-1; 1]$.

Задача 11. Пусть f определена и дифференцируема на (a, b). **а)** Верно ли, что f' непрерывна на (a, b)?

б) Пусть у f' существуют пределы слева и справа в точке $x_0 \in (a, b)$. Верно ли, что они совпадают?

в) (*Теорема Дарбу*) Пусть отрезок $[c, d]$ содержится в интервале (a, b). Докажите, что функция f' принимает на $[c, d]$ все значения между $f'(c)$ и $f'(d)$.

Задача 12. Пусть функция f удовлетворяет условию $(*)$ для отрезка $[0, 1]$, причём $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Докажите, что тогда найдутся такие различные $s, t \in [0, 1]$, что $f'(s) \cdot f'(t) = 1$.

Задача 13. (*Теорема Коши*) **а)** Петя идёт по плоскому полю из пункта A в пункт B. Докажите, что на его пути найдётся точка, вектор скорости в которой параллелен AB (более точно: если функции f и g удовлетворяют условию $(*)$, то найдётся такая точка $t \in (a, b)$, что $f'(t)(g(b)-g(a)) = g'(t)(f(b) - f(a))$).

б) Пусть ещё $g'(x) \neq 0$ на (a, b). Докажите, что найдётся такая точка $t \in (a, b)$, что $\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

в) Верно ли утверждение пункта б), если только f и g удовлетворяют условию $(*)$ и $g(a) \neq g(b)$?

Задача 14. Петя идёт по холмистой местности из пункта A в пункт B, нигде не останавливаясь. Всегда ли на его пути найдётся точка, вектор скорости в которой параллелен AB?

Задача 15*. Найдите все дифференцируемые функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f'(x) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 16. Пусть функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$, и для каждой точки $a \in \mathbb{R}$ либо $f(a) = 0$, либо $f'(a) = 0$. Докажите, что f — константа.

Задача 17. Пусть функция f n раз дифференцируема на $\mathbb{R}$, и для каждой точки $a \in \mathbb{R}$ одна из функций f, f', f'', …, $f^{(n)}$ обращается в ноль в точке a. Докажите, что f — многочлен степени не более чем $n - 1$.

Задача 18*. Функция f определена и бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, обозначим $f^{(n)}$ ее n-тую производную. Пусть для каждого $a \in \mathbb{R}$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^{(n)}(a) = 0$. Докажите, что f — многочлен.

Задача 19. Вычислите пятьдесят седьмую производную в нуле у функции $\arcsin(x^{13}+x^{22})$.

Задача 20. Докажите, что у многочлена $x^{1024}+a_1x^{512}+a_2x^{256}+\dots+a_9x+a_{10}$, где $a_1,\dots,a_{10}\in\mathbb{R}$, может быть не более 11 различных положительных действительных корней.

Задача 21. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n>1$, имеющий n различных корней $x_1,\dots,x_n$. Докажите, что справедливо равенство $\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+\dots+\frac{1}{P'(x_n)}=0$.

Задача 22. Функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$. Верно ли, что f' ограничена на любом отрезке?

Задача 23*. **а)** Приведите пример дифференцируемой функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей тождеству $f'(\frac{x+y}{2})=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, где $x,y\in\mathbb{R}$, $x\neq y$. **б)** Найдите все такие функции.

Задача 24*. Решите в натуральных числах уравнение $x^y=y^x$. (Указание: изучите функцию $f(x)=x^{1/x}$.)

Задача 25*. (*Правило Лопиталя*) Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (a,b), причём g' не обращается в ноль на (a,b) и **а)** $\lim\limits_{x\to b}f(x)=\lim\limits_{x\to b}g(x)=0$; **б)** $\lim\limits_{x\to b}f(x)=\lim\limits_{x\to b}g(x)=+\infty$. Предположим, что существует предел $\lim\limits_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$. Докажите, что предел $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен k.

Задача 26*. Останется ли верным правило Лопиталя, если заменить в условии b и/или C на $\pm\infty$?

Задача 27*. Найдите пределы: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x/x^\alpha$ при $\alpha>0$; **в)** $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

Задача 28*. Пусть $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция на отрезке $[0,a]$, $f(0)=f(a)=0$ и f'' непрерывна на отрезке $[0,a]$. **а)** Докажите, что при $a=\pi$ справедливо утверждение: «существует такая точка $\xi\in(0,a)$, что $f''(\xi)+f(\xi)=0$». **б)** Верно ли утверждение предыдущего пункта для $a=3$?

Задача 29*. Существует ли функция, которая непрерывна на $\mathbb{R}$, но ни в одной точке не имеет производной?

Листок №21д. **Арифметика остатков (продолжение)** 09.2005

Задача 1. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Пусть r и s — вычеты из одного и того же класса по модулю m. Докажите, что тогда $f(r)$ и $f(s)$ — также вычеты из одного и того же класса по модулю m. Выведите отсюда, что многочлен $f(x)$ задаёт функцию из множества $\mathbb{Z}_m$ в множество $\mathbb{Z}_m$ (классу вычетов $[a]$ сопоставляется класс вычетов $[f(a)]$).

Задача 2. **а)** Может ли ненулевой многочлен $f\in\mathbb{Z}[x]$ задать нулевую функцию $f\colon\mathbb{Z}_m\to\mathbb{Z}_m$?
б) Пусть два многочлена $f,g\in\mathbb{Z}[x]$ задают одинаковые функции из $\mathbb{Z}_m$ в $\mathbb{Z}_m$. Верно ли, что коэффициенты многочлена $f-g$ делятся на m?

Задача 3. **а)** Пусть $f(x)$ — многочлен степени k с целыми коэффициентами, p — простое число, и пусть уравнение $f(x)=0$ имеет более чем k корней в $\mathbb{Z}_p$. Докажите, что тогда все коэффициенты $f(x)$ делятся на p. **б)** Верно ли утверждение пункта а), если p — составное?

Задача 4. Пусть $f(x)=x^p-x$, $g(x)=x(x-1)\dots(x-p+1)$, где p — простое число.
а) Докажите, что все коэффициенты многочлена $f(x)-g(x)$ делятся на p.
б) Докажите, что при любом целом k от 1 до $p-1$ сумма всевозможных произведений по k штук элементов множества $\{1,2,\dots,p-1\}$ делится на p.
в) Выведите из предыдущих пунктов теорему Вильсона.

Представимость чисел в виде суммы двух квадратов

Задача 5. Пусть $p>2$ — простое число. Сколько из чисел $1,2,\dots,p-1$ удовлетворяют сравнению $x^{\frac{p-1}{2}}-1\equiv 0 \pmod p$, а сколько — сравнению $x^{\frac{p-1}{2}}+1\equiv 0 \pmod p$?

Задача 6. Пусть p — простое число вида $4k+1$. Докажите, что найдется такое целое число x, что $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Задача 7. Пусть p и x — такие, как в предыдущей задаче.
а) Докажите, что при любых $a, b \in \mathbb{Z}$ выполнено сравнение $(a+xb)(a-xb) \equiv a^2+b^2 \pmod{p}$.
б) Докажите, что среди чисел вида $m+xn$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant m, n \leqslant [\sqrt{p}]$, найдутся два с одинаковыми остатками от деления на p.
в) Докажите, что найдётся число вида $a+bx$, делящееся на p, где целые числа a и b не равны одновременно нулю и по абсолютной величине оба меньше $\sqrt{p}$.
г) Докажите, что p представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел.

Задача 8. Пусть p — простое число вида $4k+3$.
а) Найдется ли такое целое число x, что $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$?
б) Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$ и a^2+b^2 делится на p. Докажите, что a делится на p и b делится на p.

Задача 9. Докажите, что произведение чисел, представимых в виде суммы двух квадратов целых чисел, само представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел.

Задача 10. Сформулируйте и докажите теорему о том, как по разложению числа на простые множители узнать, представимо ли это число в виде суммы двух квадратов целых чисел.

В $\mathbb{Z}_p$ есть элемент, степени которого дают все ненулевые элементы $\mathbb{Z}_p$

Определение 1. Пусть p — простое число. Порядком класса $[a] \in \mathbb{Z}_p$ называют минимальное натуральное число d, для которого $[a]^d = [1]$. Обозначение: $d_p(a)$ (или просто $d(a)$).

Задача 11. Докажите, что $d(a) \leqslant p-1$.

Задача 12. Найдите порядок класса [2] в $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$, $\mathbb{Z}_{13}$.

Задача 13. **а)** Пусть $[a]^m = 1$. Докажите, что m делится на $d(a)$.
б) Пусть $d(a) = kl$. Докажите, что $d([a^k]) = l$.

Задача 14. **а)** Пусть $d(a) = m$, $d(b) = n$. Докажите, что $d(ab)$ делит $\mathrm{НОК(m,n)}$.
б) Верно ли, что в пункте а) $d(ab)$ равен наименьшему общему кратному чисел m и n?
в) Пусть в пункте а) $(m,n) = 1$. Докажите, что тогда $d(ab) = mn$.

Задача 15. Пусть $d(a) = m$, $d(b) = n$. Найдётся ли такой $[c]$, что $d(c) = \mathrm{НОК(m,n)}$?

Задача 16. Пусть d — такое наименьшее натуральное число, что для любого ненулевого $[a] \in \mathbb{Z}_p$ выполнено $[a]^d = [1]$. Докажите, что **а)** $d = p-1$; **б)** $d = \mathrm{НОК(d(1), \ldots, d(p-1))}$;
в) в $\mathbb{Z}_p$ есть такой класс $[a]$, что $d(a) = p-1$ (это значит, что $\mathbb{Z}_p = \{[0], [a], [a]^2, \ldots, [a]^{p-1}\}$).

Задача 17. Найдите в $\mathbb{Z}_{17}$ такой элемент $[a]$, что $d(a) = 16$.

Листок №22д. Аффинная геометрия 10.2005

Аффинные преобразования плоскости

Определение 1. Пусть в пространстве заданы две плоскости π и π', параллельные или непараллельные между собой.

Пусть l — прямая, не параллельная ни π, ни π'. *Параллельной проекцией π на π' вдоль l* называется отображение, сопоставляющее каждой точке $P \in \pi$ такую точку $P' \in \pi'$, что прямая PP' параллельна прямой l (см. рис. 2.10).

Любое отображение плоскости π на плоскость π', которое можно представить в виде композиции параллельных проекций, называется *аффинным*. Аффинное отображение плоскости π на себя называется *аффинным преобразованием*.

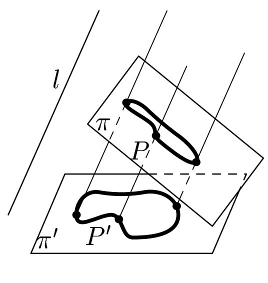


Рис. 2.10.

Задача 1. Докажите, что следующие преобразования являются аффинными:
а) параллельный перенос; **б)** осевая симметрия; **в)** поворот; **г)** любое движение.

Задача 2. Зададим на плоскости прямоугольную систему координат. Докажите, что следующие отображения являются аффинными преобразованиями: **а)** $(x, y) \mapsto (ax, y)$, где $a \neq 0$; **б)** гомотетия с центром в начале координат; **в)** любое преобразование подобия; **г)** $(x, y) \mapsto (x + by, y)$, где b — любое число; **д)** $(x, y) \mapsto (ax + by + \alpha, cx + dy + \beta)$, где $ad - bc \neq 0$.

Задача 3. Докажите, что аффинные преобразования **а)** переводят прямые в прямые; **б)** переводят отрезки в отрезки; **в)** переводят параллельные прямые в параллельные прямые; **г)** сохраняют отношения длин отрезков, лежащих на параллельных прямых; **д)** переводят параллелограммы в параллелограммы; **е)** сохраняют отношения площадей.

Задача 4. Пусть ABC и $A'B'C'$ — два произвольных треугольника. Докажите, что существует ровно одно аффинное преобразование, переводящее треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$ с сохранением порядка вершин.

Применения аффинных преобразований

Задача 5. Используйте аффинные преобразования для доказательства того, что три медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 6. Используйте аффинные преобразования для доказательства «замечательного свойства трапеции»: в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Задача 7. На плоскости даны две параллельные прямые l и l'.
а) Отрезок AB прямой l разделите пополам при помощи одной линейки.
б) Через данную точку M проведите при помощи одной линейки прямую, параллельную прямым l и l'.

Задача 8. Пусть M, N и P — точки, расположенные на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC и делящие эти стороны в одинаковых отношениях $\left(\text{то есть } \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{BN}{NC} = \dfrac{CP}{PA}\right)$. Докажите, что
а) точка пересечения медиан треугольника MNP совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC;
б) точка пресечения медиан треугольника, образованного прямыми AN, BP и CM, совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

Задача 9. Пусть у четырехугольника $ABCD$ никакие две стороны не параллельны. Докажите, что прямая, соединяющая середины его диагоналей, делит пополам отрезок, соединяющий точки пересечений продолжений противоположных сторон.

Задача 10. Докажите, что с помощью только односторонней линейки без делений и карандаша нельзя опустить перпендикуляр на данную прямую.

Задача 11. Выпуклый пятиугольник P гомотетичен пятиугольнику, построенному на серединах его сторон. Обязательно ли тогда P — правильный?

Задача 12. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбрали соответственно точки K, L и M так, что $AK : KB = BL : LC = CM : MA = 1 : \sqrt{3}$. Прямые AL, BM и CK пересекаются в точках A', B' и C', образуя новый треугольник, на сторонах которого аналогичным образом выбирают точки K', L', M' и получают треугольник $A''B''C''$, и так далее. Докажите, что на каком-то шаге мы получим треугольник, подобный исходному.

Листок №23д. **Интеграл Курцвейля–Хенстока** 10.2005

Определение 1. *Разбиением T отрезка* $[a, b]$ называется система отрезков $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Определение 2. Пусть $T = \{\Delta_i\}_{i=1}^{n}$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^{n}$, где $\xi_i \in \Delta_i$, называется *отмеченным разбиением* отрезка $[a, b]$.

Определение 3. Сумма $\sum\limits_{\mathbb{T}} f\Delta x = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)|\Delta_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ называется интегральной суммой функции f, соответствующей отмеченному разбиению $\mathbb{T}$ отрезка $[a, b]$.

Определение 4. Функция $\delta(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, положительная в каждой его точке, называется *масштабом* на отрезке $[a, b]$.

Определение 5. Отмеченное разбиение $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^{n}$ отрезка $[a, b]$ называется *согласованным с масштабом* $\delta(x)$, если для каждого $i = 1, \dots, n$ выполнено: $\Delta_i \subset U_{\delta(\xi_i)}(\xi_i)$.

Задача 1. Пусть $\delta(x) = \delta > 0$ на всём отрезке $[a, b]$. Какие отмеченные разбиения согласованы с этим масштабом?

Задача 2. Доказать, что для любого масштаба $\delta(x)$ на $[a, b]$ существует какое-либо отмеченное разбиение, согласованное с $\delta(x)$.

Определение 6. Функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$ и I её интеграл, если она определена на отрезке $[a, b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого отмеченного разбиения $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^{n}$ отрезка $[a, b]$, согласованного с масштабом $\delta(x) = \delta$, выполнено: $\left|\sum\limits_{\mathbb{T}} f\Delta x - I\right| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)|\Delta_i| - I\right| < \varepsilon.$

Задача 3. Докажите, что функция $f(x) = a$ интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$ и найдите её интеграл.

Определение 7. Функция f называется интегрируемой по Курцвейлю-Хенстоку на отрезке $[a, b]$ и I её интеграл, если она определена на отрезке $[a, b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой масштаб $\delta(x) > 0$, что для любого отмеченного разбиения $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}_{i=1}^{n}$ отрезка $[a, b]$, согласованного с масштабом $\delta(x)$, выполнено: $\left|\sum\limits_{\mathbb{T}} f\Delta x - I\right| < \varepsilon.$

Задача 4. Докажите, что функция $f(x) = a$ интегрируема по Курцвейлю-Хенстоку на отрезке $[0, 1]$ и найдите её интеграл.

Задача 5. Докажите, что если функция интегрируема по Риману, то она интегрируема по Курцвейлю-Хенстоку.

Задача 6. **а)** Докажите, что непрерывная функция интегрируема по Риману, и, следовательно, по Курцвейлю-Хенстоку.

б) Докажите, что ограниченная функция с конечным числом точек разрыва интегрируема по Риману.

в)* Докажите, что ограниченная функция с счётным числом точек разрыва интегрируема по Риману.

Задача 7. **а)** Доказать, что интеграл от неотрицательной функции неотрицателен.

б) Верно ли, что если интеграл функции равен нулю, то и сама функция тождественно равна нулю?

в) А если функция неотрицательна?

г) А если функция неотрицательна и непрерывна?

Задача 8. Докажите, что если интеграл в любом смысле существует, то он единствен.

Задача 9. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману (Курцвейлю-Хенстоку) на отрезке $[a, b]$. Доказать, что функция $cf(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ в том же смысле и $\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

Задача 10. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману (Курцвейлю-Хенстоку) на отрезке

$[a,b]$. Доказать, что функция $f(x)+g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ в том же смысле и $\int\limits_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Задача 11. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману (Курцвейлю-Хенстоку) на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \leqslant g(x)$ на $[a,b]$. Доказать, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Задача 12. Доказать критерий Коши интегрируемости: функция интегрируема на отрезке $[a,b]$ по Курцвейлю-Хенстоку тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой масштаб $\delta(x) > 0$, что для любых двух отмеченных разбиений $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$, согласованных с масштабом $\delta(x)$, выполнено: $\left|\sum\limits_{\mathbb{T}_1} f\Delta x - \sum\limits_{\mathbb{T}_2} f\Delta x\right| < \varepsilon$.

Критерием Коши можно пользоваться без доказательства.

Задача 13. Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ по Риману (Курцвейлю-Хенстоку), то она интегрируема на любом подотрезке $[c,d] \subset [a,b]$ в том же смысле.

Задача 14. Придумать такой масштаб на отрезке $[0,2]$, что если отрезок Δ отмеченного разбиения, согласованного с этим масштабом, содержит точку 1, то отмеченная точка ξ, соответствующая Δ равна 1.

Задача 15. Если функция f интегрируема на отрезках $[a,b]$ и $[b,c]$ по Риману (Курцвейлю-Хенстоку), то она интегрируема на отрезке $[a,c]$ в том же смысле и $\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$.

Задача 16. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Положим $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ на $[a,b]$. Доказать, что $f(x)$ является производной функции $F(x)$.

Задача 17. (*формула Ньютона-Лейбница*) Если функции $f(x)$ и $F(x)$ непрерывны на $[a,b]$, $F'(x) = f(x)$ всюду на $[a,b]$, то $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ по Риману, и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Задача 18*. (*формула Ньютона-Лейбница*) Если f определена на $[a,b]$, F непрерывна на $[a,b]$ и $F'(x) = f(x)$ всюду на $[a,b]$, за исключением конечного или счётного множества точек, то f интегрируема на отрезке $[a,b]$ по Курцвейлю-Хенстоку, и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Формулой Ньютона-Лейбница можно пользоваться без доказательства.

Задача 19. а) Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ интегрируема по Курцвейлю-Хенстоку на отрезке $[0,1]$ и найдите её интеграл.
б) Интегрируема ли эта функция по Риману?

Задача 20. Доказать, что если функция интегрируема по Риману, то она ограничена.

Задача 21. а) Доказать, что функция Дирихле интегрируема по Курцвейлю-Хенстоку
б) Интегрируема ли функция Дирихле по Риману?

Задача 22. Приведите пример функции, не интегрируемой по Курцвейлю-Хенстоку.

Задача 23. Докажите, что если изменить значение функции в конечном числе точек, то интегрируемость по Риману и значение интеграла не изменится.

Задача 24. Изменится ли интегрируемость по Курцвейлю-Хенстоку если изменить значение функции на счётном множестве? А значение интеграла?

Задача 25. Доказать, что данное определение интеграла Римана равносильно Определению 3 из листочка №30.

Задача 26. а) Докажите, что функция $f(x) = x\sin(\frac{1}{x^2})$ интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$.
б) Докажите, что функция $\frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x^2})$ не интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$.

в) Докажите, что функция $2x\sin(\frac{1}{x^2}) - 2\frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x^2})$ интегрируема по Курцвейлю-Хенстоку на $[0,1]$.

г) Докажите, что не существует предела $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_t^1 \left|\frac{1}{x}\cos(\frac{1}{x^2})\right| dx$.

д) Докажите, что в 18-й задаче интегрируемость по Курцвейлю-Хенстоку нельзя заменить на интегрируемость по Риману.

Листок №24д. Многочлены. Неприводимость, однозначность разложения и иррациональность 11.2005

Определение 1. Множество, на котором заданы операции сложения и умножения, удовлетворяющие всем аксиомам поля, кроме, возможно, аксиомы M4 (см. листок 17), называется *коммутативным кольцом с единицей* (мы будем называть просто *кольцом*). Например, $\mathbb{Z}$ (с обычными операциями) — кольцо. Неформально, кольцо отличается от поля тем, что в кольце не обязательно у каждого ненулевого элемента есть обратный.

Задача 1. Пусть $\mathbb{K}$ — кольцо. Докажите, что $\mathbb{K}[x]$ (множество всех многочленов с коэффициентами из $\mathbb{K}$), где многочлены складываются и перемножаются по обычным правилам, является кольцом.

Определение 2. Элемент кольца называют *обратимым*, если у него есть обратный (по умножению); элемент называют *простым*, если он необратим и не представляется как произведение двух необратимых элементов. Простые элементы кольца $\mathbb{K}[x]$ называют *неприводимыми в* $\mathbb{K}[x]$ (или *неприводимыми над* $\mathbb{K}$) многочленами.

Задача 2. Найти все обратимые (а в пунктах а) и б) ещё и все простые) элементы колец: **а)** $\mathbb{Q}$; **б)** $\mathbb{Z}$; **в)** $\mathbb{R}[x]$; **г)** $\mathbb{Z}[x]$.

Задача 3. Пусть $\mathbb{K}$ — поле. Докажите, что в $\mathbb{K}[x]$ существует бесконечно много неприводимых многочленов.

Определение 3. Пусть $\mathbb{K}$ — поле. *Наибольшим общим делителем* многочленов A и B из $\mathbb{K}[x]$ называют такой их общий делитель, который делится на любой другой общий делитель A и B. Обозначение: НОД(A, B). НОД определён однозначно с точностью до обратимого множителя.

Задача 4. Пусть хотя бы один из многочленов A и B ненулевой. **а)** Можно ли найти НОД(A, B) алгоритмом Евклида? **б)** Докажите, что НОД(A, B) — это многочлен наибольшей степени, который делит и A, и B.

Задача 5. Пусть $\mathbb{K}$ — поле. Пусть многочлены $A(x)$ и $B(x)$ из $\mathbb{K}[x]$ *взаимно просты* (то есть, НОД(A, B) $= 1$). Докажите, что тогда существуют такие многочлены $U(x)$ и $V(x)$ из $\mathbb{K}[x]$, что $AU + BV = 1$.

Задача 6. Докажите, что если неприводимый над полем $\mathbb{K}$ многочлен $P(x)$ из $\mathbb{K}[x]$ делит произведение двух многочленов $A(x)$ и $B(x)$ из $\mathbb{K}[x]$ ненулевой степени, то он делит один из этих многочленов.

Задача 7. Пусть $\mathbb{K}$ — поле. Докажите, что любой (отличный от нулевого) многочлен из $\mathbb{K}[x]$ однозначно (с точностью до множителей из $\mathbb{K}$) раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{K}$ многочленов.

Задача 8. Пусть $P(x)$ из $\mathbb{Z}[x]$ неприводим над $\mathbb{Z}$. Верно ли, что $P(x+a)$ неприводим над $\mathbb{Z}$ для любого $a \in \mathbb{Z}$?

Определение 4. Многочлен из $\mathbb{Z}[x]$ называют *примитивным*, если его коэффициенты взаимно просты.

Задача 9. (*Признак Эйзенштейна*) Если для примитивного многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ можно указать такое простое число p, что старший коэффициент этого многочлена не делится на p, а остальные коэффициенты делятся на p, причём свободный член этого многочлена не делится на p^2, то $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

Задача 10. Неприводимы ли над $\mathbb{Z}$ многочлены **а)** $3x+6$; **б)** $x^4-8x^3+12x^2-6x+2$; **в)** $x^5-12x^3+36x-12$?

Задача 11. Пусть $p_1,\dots,p_k$ — различные простые. Докажите неприводимость над $\mathbb{Z}$: **а)** x^n-p_1; **б)** $x^n-p_1\dots p_k$.

Задача 12. Докажите, что $x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1$ неприводим над $\mathbb{Z}$ если и только если n — простое или 1.

Задача 13. (*Лемма Гаусса*) Произведение двух примитивных многочленов также примитивный многочлен.

Задача 14. **а)** Докажите, что если $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ примитивен и неприводим над $\mathbb{Q}$, то он неприводим и над $\mathbb{Z}$.
б) Докажите, что если $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим и над $\mathbb{Q}$.

Задача 15. Докажите, что любой (отличный от нулевого) многочлен из $\mathbb{Z}[x]$ однозначно (с точностью до обратимых множителей) раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{Z}$ многочленов.

Задача 16. Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$ — корень некоторого ненулевого многочлена $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$. Пусть $Q(x)\in\mathbb{Z}[x]$ — ненулевой примитивный многочлен минимальной степени, такой что $Q(\alpha)=0$. **а)** Докажите, что многочлен $Q(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$; **б)** Докажите, что для некоторого ненулевого целого k многочлен $kP(x)$ делится на $Q(x)$ (в $\mathbb{Z}[x]$). **в)** Можно ли утверждать, что $P(x)$ делится на $Q(x)$ (в $\mathbb{Z}[x]$)?

Задача 17. (*Теорема Гаусса*) Если число $\alpha\in\mathbb{R}$ является корнем одновременно $P(x)$ и $Q(x)$ из $\mathbb{Z}[x]$, причём $Q(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$, то многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$ (в $\mathbb{Z}[x]$).

Задача 18. Докажите, что среди корней неприводимого над $\mathbb{Z}$ многочлена из $\mathbb{Z}[x]$ не менее чем второй степени не может быть рациональных.

Задача 19. Докажите иррациональность чисел: **а)** $\sqrt[n]{p_1\dots p_k}$, где $p_1,\dots,p_k$ — разные простые, $n-1,k\in\mathbb{N}$; **б)** $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$; **в)** $A(\sqrt[N]{p})$, где $N-1\in\mathbb{N}$, p — простое, $A(x)\in\mathbb{Z}[x]$, $0<\deg A(x)<N$; **г)** $\alpha_1p^{\frac{m_1}{n_1}}+\dots+\alpha_kp^{\frac{m_k}{n_k}}$, где p — простое, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ — ненулевые рациональные числа, $\frac{m_1}{n_1},\dots,\frac{m_k}{n_k}$ — различные правильные дроби.

Задача 20. Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$ — корень неприводимого многочлена из $\mathbb{Q}[x]$ степени n. Докажите, что **а)** множество чисел $\{P(\alpha)\,|\,P(x)\in\mathbb{Q}[x]\}$ с обычными операциям сложения и умножения является полем (это поле обозначается $\mathbb{Q}(\alpha)$); **б)** $\mathbb{Q}(\alpha)=\{q_0+q_1\alpha+q_2\alpha^2+\dots+q_{n-1}\alpha^{n-1}\,|\,q_0,q_1,\dots,q_{n-1}\in\mathbb{Q}\}$; **в)** любой элемент поля $\mathbb{Q}(\alpha)$ однозначно представляется в виде суммы из пункта б).

Задача 21. Разложите на неприводимые множители над $\mathbb{Z}$: **а)** x^8+x^4+1; **б)** x^5+x+1; **в)** x^9+x^4-x-1.

Задача 22*. Докажите, что $(x-a_1)\dots(x-a_n)-1$ неприводим над $\mathbb{Z}$ при любых различных целых $a_1,\dots,a_n$.

Задача 23. **а)** Найдите целое число a, при котором многочлен $(x-a)(x-10)+1$ раскладывается на два многочлена первой степени с целыми коэффициентами. **б)*** При каких попарно различных целых числах $a_1,\dots,a_n$ многочлен $(x-a_1)\dots(x-a_n)+1$ не является неприводимым над $\mathbb{Z}$?

Задача 24*. Придумайте алгоритм, который для любого конкретного многочлена $P(x)$ из $\mathbb{Z}[x]$ за конечное время определит, является ли $P(x)$ неприводимым над $\mathbb{Z}$ (или над $\mathbb{Q}$).

Задача 25*. **а)** Найдите все многочлены степени не выше четвертой, неприводимые над $\mathbb{Z}_2$.
б) Найдите все многочлены второй степени, неприводимые над $\mathbb{Z}_3$.
в) Найдите число многочленов пятой степени, неприводимых над $\mathbb{Z}_2$.
г) Найдите число многочленов третьей и четвертой степени, неприводимых над $\mathbb{Z}_3$.

Диаграмма Ньютона и признаки неприводимости

Определение 5. Пусть $P(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n\in\mathbb{Z}[x]$, $a_n\neq0$, p — простое число. Каждому ненулевому одночлену $a_k x^k$ многочлена $P(x)$ сопоставим на плоскости точку с координатами $(k;l)$, где l — наибольшее целое число, при котором a_k делится на p^l. (Если $a_k = 0$, то точку на плоскости не отмечаем.) Набор всех таких точек называется *основой диаграммы Ньютона многочлена* $P(x)$ *по простому числу* p.

Задача 26. Изобразите на плоскости основу диаграммы Ньютона по простым числам 2 и 3 многочленов: **а)** $1+x$; **б)** $2+9x-57x^3$; **в)** $32+12x^2+8x^4+6x^5$; **г)** $60+2x+4x^2+9x^4+3x^5+6x^6+12x^7$.

Определение 6. Пусть $P(x)$ и p — такие же, как и в предыдущем определении. Будем считать, что $\deg P \geqslant 1$ и $a_0 \neq 0$. Тогда на плоскости будут нанесены по крайней мере две точки основы: *начальная* (A_0) и *конечная* (A_n). Выпустим из начальной точки A_0 основы луч вертикально вниз и начнем вращать его против часовой стрелки вокруг этой точки до встречи луча с другой точкой основы (скажем, с точкой A_i). После такой встречи соединяем начальную точку со встретившейся отрезком, а дальше повторяем описанный выше процесс, исходя уже из точки A_i. Так продолжаем до тех пор, пока не дойдем до конечной точки основы A_n. Получившаяся ломаная называется *диаграммой Ньютона многочлена* $P(x)$ *по простому числу* p.

Задача 27. Нарисуйте диаграммы Ньютона по простым числам 2 и 3 многочленов из задачи 26.

Определение 7. Отрезки, из которых состоит диаграмма Ньютона, называются ее *звеньями*. Звено диаграммы называется *простым*, если кроме концов на нем нет других точек с целочисленными координатами. В противном случае звено называется *составным*. Простое звено диаграммы называется *примитивным*, если длина его проекции на горизонтальную ось равна единице.

Задача 28. Изобразите на плоскости диаграмму Ньютона многочлена $8+4x+8x^2+2x^3+8x^5+16x^6$ по простому числу 2. Определите, к какому из трех типов принадлежит каждое из её звеньев.

Определение 8. Рассмотрим диаграмму Ньютона как набор нескольких векторов (соответствующих звеньям), идущих из начальной точки в конечную. Перенесем эти векторы параллельно себе в одну (какую-нибудь) точку. Полученный набор векторов называется *связкой многочлена по простому числу* p.

Задача 29. Нарисуйте связки по простому числу 2 многочленов из задачи 26, а также связки по простому числу 2 квадратов и произведения многочленов из пунктов а) и б) этой задачи.

Задача 30. Докажите, что заданной диаграмме Ньютона соответствует ровно одна связка, и по заданной связке диаграмма восстанавливается однозначно.

Задача 31. **а)** Что произойдёт с основой диаграммы многочлена при умножении его на ненулевой одночлен?

б) (*Теорема Дюма*) Связка произведения $P(x)Q(x)$ двух многочленов (по одному и тому же простому числу) представляет собой объединение связок сомножителей $P(x)$ и $Q(x)$ (параллельные векторы складываются).

Задача 32. **а)** Докажите, что связка примитивного приводимого над $\mathbb{Z}$ многочлена состоит либо из нескольких звеньев, либо из одного составного звена.

б) (*Признак Дюма*) Если при некотором простом p диаграмма примитивного многочлена $P(x)$ состоит из одного простого звена, то $P(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

Задача 33. **а)** Выведите из признака Дюма признак Эйзенштейна и «нарисуйте» его на плоскости. **б)** Придумайте с помощью признака Дюма ещё какой-нибудь признак неприводимости и «нарисуйте» его.

Задача 34. Докажите, что если длина проекции на горизонтальную ось каждого простого звена связки многочлена больше k (составные звенья разбиты на простые!), то каждый делитель (положительной степени) этого многочлена имеет степень больше k.

Задача 35. Докажите, что если при некотором простом p диаграмма многочлена $P(x)$ не содержит примитивных звеньев (составные звенья разбиты на простые!), то среди его корней не может быть рациональных.

Задача 36. Есть ли рациональные корни у многочлена **а)** $16+8x+2x^2+2x^3+x^4$;

б) $6+2x^2+3x^3+6x^4$?

Задача 37*. Докажите, что $n!(1+a_1\frac{x}{1!}+\dots+a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!})$ неприводим над $\mathbb{Z}$ при любых $a_1,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{Z}$.

Листок №25д. Числа Бернулли 12.2005

Формулы для суммирования k-х степеней первых n чисел

Определение 1. Положим $S_k(n)=1^k+2^k+\dots+(n-1)^k$.

Задача 1. Докажите,что
а) $(i+1)^{k+1}-i^{k+1}=1+C_{k+1}^1 i+C_{k+1}^2 i^2+\dots+C_{k+1}^k i^k$; **б)** $n^{k+1}=n+C_{k+1}^1 S_1(n)+C_{k+1}^2 S_2(n)+\dots+C_{k+1}^k S_k(n)$.

Задача 2. Как по формулам для $S_1(n),\dots S_{k-1}(n)$ найти формулу для $S_k(n)$? Найдите $S_2(n)$ и $S_3(n)$.

Задача 3. Докажите, что $S_k(n)$ — многочлен от n. Найдите его степень, старший и свободный коэффициенты.

Определение 2. Определим $S_k(x)$ для $x\in\mathbb{R}$ как значение многочлена $S_k(n)$ при подстановке в него x вместо n.

Задача 4. Докажите, что $S_k(x+1)-S_k(x)=x^k$ при любом $x\in\mathbb{R}$, т. е. $\int\limits_x^{x+1} S'_k(t)dt=x^k$.

Определение 3. Многочлен $B_k(x)=S'_k(x)$, называется *многочленом Бернулли.*

Задача 5. Докажите, что **а)** $B_k(x+1)-B_k(x)=kx^{k-1}$; **б)** $S_k(n)=\frac{1}{k+1}(B_{k+1}(n)-B_{k+1}(0))$.

Задача 6. Докажите, что $B'_k(x)=kB_{k-1}(x)$, откуда $B_k(x)=k\int\limits_0^x B_{k-1}(t)dt+B_k(0)$.

Определение 4. Числа $B_k=B_k(0)$ называются *числами Бернулли.*

Задача 7. Докажите, что $B_k(x)=\sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i\cdot B_i\cdot x^{k-i}$, и выразите $S_k(n)$ через числа Бернулли.

Задача 8. Докажите, что $B_k(1)=B_k(0)$ и получите рекуррентную формулу для B_k.

Задача 9. Вычислите первые 5 чисел Бернулли и найдите формулу для $S_4(n)$.

Задача 10. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k$ — ряд Тейлора с центром в нуле для функции $x/(e^x-1)$.

Задача 11. Докажите, что $B_k=0$ при нечётных $k>1$.

Вычисление значений дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при чётных s

Задача 12. Пусть $n\in\mathbb{N}$ нечётно. Докажите, что существуют такие многочлены P_n и Q_{n-1} с целыми коэффициентами, степени не выше n и $n-1$ соответственно, что $\sin(nx)=P_n(\sin x)$, $\cos(nx)=\cos x Q_{n-1}(\sin x)$.

Задача 13. Найдите свободный и первый коэффициенты многочлена P_n.

Задача 14. Заметьте, что $\sin nx/n\sin x$ есть многочлен от $\sin x$ со свободным коэффициентом 1, обращающийся в 0 при $x\in\{\pm\pi/n,\dots,\pm k\pi/n\}$. Выведите отсюда, что

$$\frac{\sin nx}{n\sin x}=\prod_{r=1}^{k}\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2 r\pi/n}\right),\qquad\text{откуда}\qquad\frac{\sin x}{n\sin x/n}=\prod_{r=1}^{k}\left(1-\frac{\sin^2 x/n}{\sin^2 r\pi/n}\right).$$

Задача 15. Докажите, что для $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ при $n = 2k+1 \to \infty$

$$\prod_{r=1}^{k} \frac{1 - \sin^2(x/n)/\sin^2(r\pi/n)}{1 - x^2/(r\pi)^2} \to 1.$$

Задача 16. Докажите (используя задачи 14, 15 и разложение синуса в ряд Тейлора), что

$$\prod_{r=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{(r\pi)^2}\right) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \ldots$$

Задача 17. а) Ряд $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$, где $|a_i| < c$ при любом i, сходится при $|x| < 1$.
б) Пусть $f(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда $a_i = 0$ при любом i.

Определение 5. Дзета-функцией Римана называется ряд $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Задача 18. Сравнив коэффициенты при x^2 в рядах из задачи 16, найдите $\zeta(2)$.

Задача 19. Найдите вероятность того, что два взятых наугад натуральных числа будут взаимно простыми, т. е. найдите $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{\text{количество пар } m,n, \text{ где } m\leqslant N,\ n\leqslant N \text{ и } (m,n)=1}{\text{количество всех пар } m,n, \text{ где } m\leqslant N,\ n\leqslant N}$.

Задача 20. Сравнив коэффициенты при x^4 в рядах из задачи 16, найдите $\zeta(4)$.

Задача 21. Напомним, что $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$. Докажите, что $\operatorname{sh} x = x \prod\limits_{r=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x^2}{(r\pi)^2}\right)$.

Задача 22*. Докажите для натуральных k формулу

$$2\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!}B_{2k}.$$

Листок №26д. Плоские алгебраические кривые 01.2006

Часть 1. Многочлены от двух переменных

Определение 1. *Одночленом от двух переменных* x и y (над $\mathbb{R}$) называется выражение вида ax^my^n, где $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Сумма нескольких одночленов такого вида (с приведенными подобными) называется *многочленом от двух переменных* x и y. Сумма и произведение многочленов от двух переменных определяются аналогично сумме и произведению многочленов от одной переменной. Кольцо всех многочленов от x, y (над $\mathbb{R}$) обозначают $\mathbb{R}[x, y]$.

Задача 1. Дайте определение степени многочлена $A \in \mathbb{R}[x, y]$ (обозначается $\deg A$).

Задача 2. Пусть $A(x, y)$, $B(x, y)$ — ненулевые многочлены.
а) Докажите, что $\deg AB = \deg A + \deg B$. **б)** Что можно сказать о величине $\deg(A + B)$?

Задача 3. Дайте определение деления с остатком для многочленов от двух переменных. Всегда ли такое деление возможно?

Задача 4. Дайте определение неприводимого (над $\mathbb{R}$) многочлена из $\mathbb{R}[x, y]$.

Задача 5. Докажите неприводимость многочленов: **а)** $x^2 + y^2 - 1$; **б)** $y^2 - x$; **в)** $xy - 1$.

Задача 6. Докажите, что множество $\mathbb{R}(y) = \left\{ \frac{P(y)}{Q(y)} \;\middle|\; P(y), Q(y) \in \mathbb{R}[y],\ Q(y) \neq 0 \right\}$ (с обычными операциями сложения и умножения) является полем.

Задача 7. Рассмотрим множество многочленов от x над полем $\mathbb{R}(y)$, т. е. множество $\mathbb{R}(y)[x]$. Каждый его элемент записывается в виде

$$a_n(y)x^n + a_{n-1}(y)x^{n-1} + \cdots + a_1(y)x + a_0(y), \qquad (*)$$

где $n \in \mathbb{Z}^+$, $a_i(y) \in \mathbb{R}(y)$ при $i = \overline{0,n}$. Дайте определение неприводимого (над $R(y)$) многочлена из $\mathbb{R}(y)[x]$. Верна ли для многочленов из $\mathbb{R}(y)[x]$ теорема о единственности разложения на неприводимые сомножители?

Определение 2. Запишем произвольный многочлен $A(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ в виде $(*)$, где уже $a_i(y) \in \mathbb{R}[y]$ при $i = \overline{0,n}$. Скажем, что $A(x,y)$ является *примитивным (по x)*, если многочлены $a_n(y)$, $\ldots$, $a_0(y)$ взаимно просты.

Задача 8. Докажите, что произведение двух примитивных (по x) многочленов также является примитивным (по x) многочленом.

Задача 9. Докажите, что если многочлен из $\mathbb{R}[x,y]$ неприводим, то он неприводим и как многочлен из $\mathbb{R}(y)[x]$. Верно ли обратное?

Задача 10. Докажите, что любой многочлен из $\mathbb{R}[x,y]$ однозначно (с точностью до множителей из $\mathbb{R}$) раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbb{R}$ многочленов.

Часть 2. Теорема Безу

Определение 3. *Плоской алгебраической кривой* называют множество точек плоскости, координаты x_0, y_0 которых удовлетворяют уравнению $A(x_0,y_0) = 0$, где $A(x,y)$ — некоторый многочлен из $\mathbb{R}[x,y]$. Говорят, что многочлен A *задает* эту кривую.

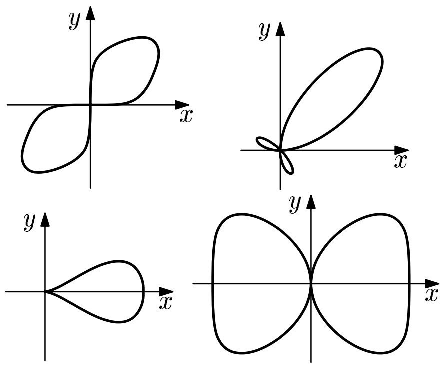


Рис. 2.11.

Задача 11. Нарисуйте плоские кривые, задающиеся следующими многочленами:

а) $x - y$; **б)** $x^2 - y^2$; **в)** $y - x^2$; **г)** $x^2 + y^2 - 1$; **д)** $xy - 1$; **е)** $x^2y - xy^2 + y - x$; **ж)** $ax^2 + by^2 - 1$, где a, b — такие числа, что $a > b > 0$; **з)** $ax^2 - by^2 - 1$, где a, b — такие числа, что $a > b > 0$; **и)** $y^2 - x^3$; **к)** $y - 1 - x^3$; **л)** $y^2 - 1 - x^3$; **м)** $y^2 - x - x^3$; **н)** $y^2 - x^2 - x^3$.

Задача 12*. Выясните, какому из уравнений соответствует каждая из кривых, изображённых на рис. 2.11: **а)** $x^2 = x^4 + y^4$; **б)** $xy = x^6 + y^6$; **в)** $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$; **г)** $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$.

Задача 13. Пусть A, B — различные многочлены из $\mathbb{R}[x,y]$. Может ли система $A(x,y) = 0, B(x,y) = 0$ иметь конечное число решений, бесконечное число решений?

Задача 14. Дайте определение взаимно простых многочленов в $\mathbb{R}[x,y]$ и в $\mathbb{R}(y)[x]$.

Задача 15. **а)** Верно ли, что для любых двух взаимно простых многочленов A, B из $\mathbb{R}[x,y]$ найдутся такие многочлены U, V из $\mathbb{R}[x,y]$, что $AU + BV = 1$?

б) Верно ли, что для любых двух взаимно простых многочленов A, B из $\mathbb{R}(y)[x]$ найдутся такие многочлены U, V из $\mathbb{R}(y)[x]$, что $AU + BV = 1$?

в) Докажите, что для любых двух взаимно простых многочленов A, B из $\mathbb{R}[x,y]$ найдутся такие многочлены U, V из $\mathbb{R}(y)[x]$, что $AU + BV = 1$.

Соглашение. Все рассматриваемые далее многочлены принадлежат $\mathbb{R}[x,y]$.

Задача 16. Докажите, что если многочлены $A(x,y)$ и $B(x,y)$ взаимно просты, то система $A(x,y) = 0$, $B(x,y) = 0$ имеет конечное число решений,

Задача 17. Решите систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 6y^2 + 2x^2 - 23xy + 39y + 6x &=& 0, \\ 6y^3 + 2x^3 - 2xy^2 + 6x^2 - 9xy - 6y^2 - 27y &=& 0. \end{array} \right.$$

Задача 18. Пусть $A(x, y)$, $B(x, y)$ — ненулевые многочлены. Докажите, что если система $A(x, y) = 0$, $B(x, y) = 0$ имеет бесконечное число решений и B неприводим, то A делится на B.

Задача 19. Можно ли на плоскости задать многочленом ветвь гиперболы?

Задача 20. Пусть $A(x, y)$ — такой многочлен, что $A(x_0, y_0) = 0$ при всех $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Докажите, что тогда $A(x, y)$ — нулевой многочлен.

Задача 21. Ещё Исаак Ньютон заметил следующий интересный факт, называемый *теоремой Безу: если* $A(x, y)$ *и* $B(x, y)$ *— ненулевые взаимно простые многочлены, то система* $A(x, y) = 0$, $B(x, y) = 0$ *имеет не более* $\deg A \cdot \deg B$ *решений.* Докажите теорему Безу для произвольного ненулевого многочлена A, взаимно простого с многочленом B, если B —

а) ненулевое число; **б)** многочлен первой степени; **в)** произведение нескольких многочленов первой степени; **г)** многочлен $x - y^2$; **д)** многочлен $xy - 1$; **е)** многочлен $y^2 - x^3$; **ж)*** многочлен $x^2 + y^2 - 1$; **з)*** неприводимый многочлен второй степени.

Задача 22.** Докажите теорему Безу в общем случае.

Задача 23. (*М. Берже, С. В. Маркелов*) **а)** На плоскости даны парабола $y = x^2$ и окружность, имеющие ровно две общие точки: A и B. Оказалось, что касательные к окружности и параболе в точке A совпадают. Обязательно ли тогда касательные к окружности и параболе в точке B также совпадают?

б) Найдите все r, при которых на плоскости Oxy существует окружность радиуса r, пересекающая параболу $y = x^2$ ровно в двух точках, причём в одной из этих точек у параболы и окружности есть общая касательная, а в другой — нет.

Часть 3. Приложения к геометрии

Задача 24. (*Замена координат*) На плоскости Oxy рассмотрим две непараллельные прямые, задающиеся уравнениями $l_1(x, y) = 0$, $l_2(x, y) = 0$, где l_1 и l_2 — многочлены первой степени. Примем их точку пересечения за новое начало координат O_1, а сами прямые за новые оси координат: l_1 за ось z, а l_2 за ось t. Тогда прямые l_1 и l_2 будут иметь в новых координатах простые уравнения $t = 0$, $z = 0$ соответственно.

а) Докажите, что можно так выбрать базисные вектора на осях O_1z, O_1t, что новые координаты (z, t) точки будут вычисляться через ее старые координаты (x, y) по формулам $z = l_2(x, y)$, $t = l_1(x, y)$.

б) Докажите, что из уравнений $z = l_2(x, y)$, $t = l_1(x, y)$ можно выразить старые координаты x и y через новые z и t.

в) Пусть $A(x, y)$ — многочлен. Подставив в него вместо x и y их выражения через z и t, получим запись многочлена A в новых координатах z, t. Докажите, что при этом степень многочлена не изменится: $\deg A(x, y) = \deg A(z, t)$.

Задача 25. Докажите, что задаваемая уравнением $z^2 + 2zt + t^2 + \sqrt{2}z - \sqrt{2}t + 1 = 0$ кривая имеет ось симметрии.

Определение 4. Кривую, задающуюся многочленом второй степени, будем называть *коникой.*

Задача 26. Пусть никакие три из точек A, B, C, D плоскости Oxy не лежат на одной прямой. Пусть прямые AB, BC, CD, DA задаются многочленами первой степени $l_1(x, y)$, $m_1(x, y)$, $l_2(x, y)$, $m_2(x, y)$ соответственно. Докажите, что любую конику, проходящую через точки A, B, C, D, можно задать уравнением вида $\lambda l_1 l_2 + \mu m_1 m_2 = 0$, где λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

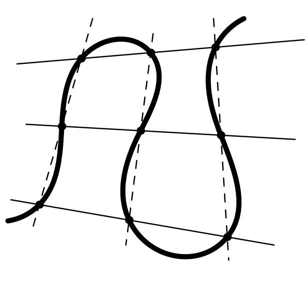


Рис. 2.12.

Задача 27. **а)** Пусть никакие три из точек A, B, C, D, E на плоскости не лежат на одной прямой. Докажите, что через эти точки проходит ровно одна коника.

б) Докажите, что в пункте а) достаточно потребовать, чтобы никакие четыре из точек A, B, C, D, E не лежали на одной прямой.

Задача 28. В обозначениях задачи 26 выясните, является ли четырехугольник $ABCD$ вписанным в окружность, если **а)** $l_1 = 6x - y + 1$, $m_1 = 3x + 55y - 388$, $l_2 = x - 9$, $m_2 = x + 9y - 9$; **б)** $l_1 = 4x - 5y - 35$, $m_1 = 7x + 5y + 35$, $l_2 = 83x - 93y + 415$, $m_2 = x + y - 11$.

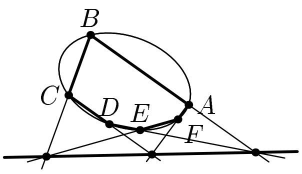


Рис. 2.13.

Задача 29. Пусть три пунктирные прямые пересекают три сплошные прямые в девяти точках (см. рис. 2.12). Докажите, что если восемь из этих точек лежат на некоторой *кубической* кривой (то есть на кривой, задающейся многочленом третьей степени), то и оставшаяся девятая точка лежит на той же кубической кривой.

Определение 5. *Шестиугольником* будем называть всякую замкнутую шестизвенную ломаную, никакие три из шести вершин которой не лежат на одной прямой.

Задача 30. (*Теорема Паскаля*) Пусть вершины шестиугольника $ABCDEF$ лежат на кривой, задающейся неприводимым многочленом второй степени. Докажите, что тогда точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой (см. рис. 2.13).

Задача 31. Сформулируйте и докажите теорему, обратную к теореме Паскаля.

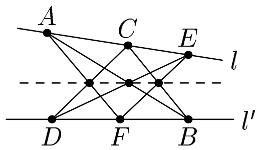


Рис. 2.14.

Задача 32. (*Теорема Паппа*) Пусть точки A, C, E и D, F, B лежат на прямых l и l' соответственно. Докажите, что тогда точки пересечения прямых AF и CD, AB и ED, CB и EF лежат на одной прямой (см. рис. 2.14).

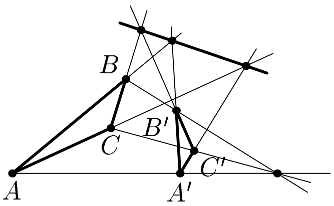


Рис. 2.15.

Задача 33. (*Теорема Дезарга*) Пусть никакие три из точек A, B, C, A', B', C' не лежат на одной прямой. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке, тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, CA и $C'A'$ лежат на одной прямой (см. рис. 2.15).

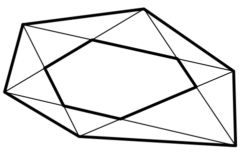


Рис. 2.16.

Определение 6. Назовем два шестиугольника *сопряженными*, если один из них образован точками пересечения неглавных диагоналей другого. (Например, изображенные на рис. 2.16 чёрные шестиугольники сопряжены.) Из определения следует, что для каждого шестиугольника имеется ровно два с ним сопряженных.

Задача 34. Докажите, что главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения противоположных сторон сопряженного с ним шестиугольника лежат на одной прямой.

Листок №27д. Топология 1 02.2006

Определение 1. Пусть X — либо прямая, либо плоскость, либо пространство; расстояние между точками $x, y \in X$ обозначим через $d(x, y)$. Для любой точки $x \in X$ и любого действительного числа $\varepsilon > 0$ положим $U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$; множество $U_\varepsilon(x)$ называется *ε-окрестностью* точки x. Пусть $Y \subseteq X$. Точка x называется *внутренней точкой* множества Y, если у неё найдется ε-окрестность, целиком содержащаяся в Y, *внешней точкой*, если у неё найдется ε-окрестность, не пересекающаяся с Y, и *граничной точкой*, если любая её окрестность содержит как точки, принадлежащие Y, так и точки, не принадлежащие Y. Подмножество $U \subseteq X$ называется *открытым*, если все его точки — внутренние. Подмножество $V \subseteq X$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки.

Задача 1. Найдите внутренние, граничные и внешние точки для

а) отрезка на прямой;

б) отрезка на плоскости;
в) шара в пространстве;
г) множества всех рациональных точек на прямой;
д) множества всех точек на плоскости с координатами $x > 0$ и $y < \sin(1/x)$ (нарисуйте).

Задача 2. Докажите, что интервал, дополнение к отрезку — открытые подмножества прямой.

Задача 3. Докажите, что отрезок, дополнение к интервалу — замкнутые подмножества прямой.

Задача 4. Докажите, что прямая, круг и окружность являются замкнутыми подмножествами плоскости (пространства).

Задача 5. Докажите, что множество граничных точек любого множества замкнуто.

Задача 6. **а)** Опишите все подмножества прямой, не имеющие граничных точек.
б) Тот же вопрос для плоскости.

Задача 7. Докажите, что любое открытое подмножество множества $\mathbb{R}$ либо совпадает с $\mathbb{R}$, либо представляет собой объединение конечного или счётного множества непересекающихся интервалов и открытых лучей.

Метрические пространства

Определение 2. *Метрическим пространством* называется множество X с заданной функцией «расстояния» или *метрикой* $d(x, y)$, определённой для любых $x, y \in X$ и удовлетворяющей следующим аксиомам:

1) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$ (симметричность);

3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (неравенство треугольника).

Подмножество Y метрического пространства X, рассматриваемое как метрическое пространство (с той же метрикой), называется *подпространством* пространства X.

Задача 8. Пусть X — метрическое пространство с метрикой d. Докажите, что $d(x, y) \geqslant 0$ для любых $x, y \in X$.

Задача 9. Поездка на московском метрополитене от станции A до станции B требует времени, которое зависит от выбранного маршрута, времени ожидания поездов и т. п. Выберем из всех возможных случаев тот, при котором затраченное время окажется наименьшим, и назовём это время расстоянием от станции A до станции B. Является ли такое расстояние метрикой на множестве станций московского метро? Если нет, предложите дополнительные условия, при которых введённое расстояние будет метрикой.

Определение 3. Пусть X и Y — два множества. Их *прямым* или *декартовым произведением* называется множество всех (упорядоченных) пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Оно обозначается $X \times Y$. Аналогично определяется прямое произведение n множеств ($n \in \mathbb{N}$).

Задача 10. Пусть X и Y — два метрических пространства. Для любой пары точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ положим

$$
\begin{aligned}
d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2), \\
d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}, \\
d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)),
\end{aligned}
$$

где d_X и d_Y — расстояния в X и Y. Докажите, что $X \times Y$ — метрическое пространство относительно любой из метрик d_1, d_2 и d_∞.

Определение 4. Множество последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ длины n, состоящих из действительных чисел, называется *n-мерным арифметическим пространством* $\mathbb{R}^n$. (Обычные прямая, плоскость и пространство — это $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ соответственно).

Задача 11. Является ли метрическим пространством $\mathbb{R}^n$ с метрикой

а) $d_1(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |y_k - x_k|$;

б) (*евклидова метрика*) $d_2(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$;

в) $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |y_k - x_k|$?

Определение 5. Пусть X — метрическое пространство, $x_0 \in X$ — произвольная точка, $\varepsilon > 0$ — действительное число. Множество $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X \mid d(x,x_0) < \varepsilon\}$ называется ε-окрестностью точки x_0 (или *открытым шаром* с центром x_0 и радиусом ε). Множество $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X \mid d(x,x_0) \leqslant \varepsilon\}$ называется *замкнутым шаром* с центром x_0 и радиусом ε.

Задача 12. Как выглядят шары в пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ относительно метрик из задачи 11?

Задача 13. Докажите, что множество $C[a,b]$ всех непрерывных функций на отрезке $[a,b]$, снабженное метрикой $d(f,g) = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |f(t) - g(t)|$, является метрическим пространством.

Задача 14. Сформулируйте для произвольного метрического пространства все определения из первого раздела этого листка.

Задача 15. Докажите, что

а) $\varnothing$, X, открытый шар, дополнение к замкнутому шару — открытые множества;

б) $\varnothing$, X, замкнутый шар, дополнение к открытому шару — замкнутые множества.

Задача 16. Докажите, что

а) пересечение конечного множества открытых множеств открыто;

б) объединение любого множества открытых множеств открыто;

в) пересечение бесконечного множества открытых множеств не обязательно открыто.

Задача 17. Докажите, что множество V является замкнутым тогда и только тогда, когда его дополнение является открытым.

Задача 18. Сформулируйте свойства замкнутых множеств, аналогичные свойствам открытых множеств из задачи 16.

Определение 6. *Замыканием* $\overline{V}$ множества V называется объединение V и множества его граничных точек.

Задача 19. **а)** Докажите, что множество V замкнуто тогда и только тогда, когда $\overline{V} = V$.

б) Докажите, что замыкание любого множества замкнуто.

Задача 20. Пусть Y — подпространство метрического пространства X, и пусть $U \subseteq Y$.

а) Пусть U открыто в X. Обязательно ли U открыто в Y?

б) Пусть U открыто в Y. Обязательно ли U открыто в X?

в) Пусть Y открыто в X. Докажите, что U открыто в Y тогда и только тогда, когда U открыто в X.

г) Докажите, что U открыто в Y тогда и только тогда, когда существует открытое подмножество $V \subseteq X$ такое, что $U = V \cap Y$.

Листок №28д. Топология 2 02.2006

Пределы и непрерывность

Задача 1. Дайте определения предельной точки подмножества метрического пространства, предела последовательности точек метрического пространства, предела отображения метрических пространств $F\colon X \to Y$ в точке $x_0 \in X$, непрерывности отображения метрических пространств $F : X \to Y$ в точке $x_0 \in X$ (в двух вариантах: по Коши и по Гейне).

Задача 2. Докажите непрерывность следующих отображений:

а) возведение комплексного числа в n-ю степень (отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$);

б) многочлен с комплексными коэффициентами (отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$);

в) комплексная экспонента ($z = a + bi \mapsto e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$).

Определение 1. Две метрики на пространстве X называются *эквивалентными*, если любое множество, открытое относительно одной из них, открыто и относительно другой.

Задача 3. **а)** Пусть X и Y — любые метрические пространства. Докажите, что метрики d_1, d_2 и d_∞ на $X \times Y$ (см. задачу 10 листка 25д) эквивалентны.

б) Докажите, что прямое произведение открытых множеств открыто, а прямое произведение замкнутых множеств замкнуто (в любой из метрик d_1, d_2 и d_∞).

в) Докажите, что метрики d_1, d_2 и d_∞ на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.

г) Все ли метрики на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны?

Задача 4. **а)** Докажите, что при замене метрики на эквивалентную предельные точки остаются предельными точками, а пределы последовательностей не меняются. (Указание: сформулируйте соответствующие определения в терминах открытых множеств.)

б) Докажите, что при замене метрик в X и Y на эквивалентные предел отображения $F\colon X \to Y$ в точке $x_0 \in X$ не меняется, и если отображение было непрерывным в точке x_0, то оно и остается непрерывным.

Задача 5. Докажите, что отображение $F\colon X \to Y$ непрерывно на всем X тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества открыт.

Задача 6. Докажите, что для любого метрического пространства X с метрикой $d(x, y)$ отображение $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ является непрерывным.

Задача 7. Какие из следующих свойств отображения $F\colon X \to Y$ следуют из непрерывности F на X? Из каких непрерывность следует?

а) Образ каждого открытого множества открыт.

б) Прообраз каждого замкнутого множества замкнут.

в) Образ каждого замкнутого множества замкнут.

г) $F(\overline{A}) \subseteq \overline{F(A)}$ для любого подмножества $A \subseteq X$.

д) *График* $\Gamma(F) = \{(x, F(x)) \mid x \in X\}$ замкнут в $X \times Y$.

Связные пространства

Определение 2. Метрическое пространство X называется *связным*, если его нельзя представить как объединение двух непересекающихся непустых открытых подмножеств: $X = U_1 \sqcup U_2$.

Задача 8. Докажите, что метрическое пространство X связно тогда и только тогда, когда в нем нет *собственного* подмножества (то есть непустого и не равного X), одновременно открытого и замкнутого.

Задача 9. Докажите, что отрезок $[0, 1]$ связен.

Задача 10. Докажите, что образ связного множества при непрерывном отображении связен.

Задача 11. Какие из следующих подмножеств $\mathbb{R}$ связны: $(0, 1)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $[0, 1] \cup [2, 3]$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Определение 3. Пусть X — метрическое пространство. *Путём* в X называется непрерывное отображение $f : [0, 1] \to X$. Точка $f(0)$ называется *началом пути*, а точка $f(1)$ — *концом пути*. Пространство X называется *линейно связным*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ существует путь с началом x_1 и концом x_2.

Задача 12. Докажите, что образ линейно связного пространства при непрерывном отображении линейно связен.

Задача 13. Докажите, что любое линейно связное пространство связно.

Определение 4. Пусть n — натуральное число. Множество $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1, \ldots, n\}$ называется *n-мерным кубом*, множество $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid d(x, 0) = 1\}$ — *n-мерной сферой.* Замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и единичным радиусом часто называется просто *n-мерным шаром* и обозначается B^n.

Задача 14. Докажите, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, а также n-мерный шар и n-мерный куб связны. Для каких n связна n-мерная сфера?

Задача 15. **а)** Докажите, что любое связное подпространство $\mathbb{R}$ линейно связно.
б) Докажите, что связными подпространствами $\mathbb{R}$ являются промежутки и только они.

Задача 16*. **а)** Докажите, что любое связное открытое подмножество $\mathbb{R}^2$ линейно связно.
б) Верно ли это для замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^2$?

Компакты

Определение 5. Метрическое пространство K называется *компактным*, если из любого покрытия K открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Вместо словосочетания «компактное метрическое пространство» часто употребляется слово *компакт*.

Задача 17. Компактно ли евклидово пространство $\mathbb{R}^n$?

Задача 18. Докажите, что единичный куб I^n является компактным подмножеством $\mathbb{R}^n$.

Задача 19. **а)** Докажите, что любое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку.
б)* Докажите, что если любое бесконечное подмножество метрического пространства X имеет предельную точку, то X — компакт.

Задача 20. Докажите, что любое замкнутое подмножество компакта компактно.

Определение 6. Подмножество Y метрического пространства X называется *ограниченным*, если оно целиком лежит в некотором шаре.

Задача 21. Докажите, что компактное подмножество метрического пространства **а)** замкнуто; **б)** ограничено.

Задача 22. **а)** Докажите, что подмножество $V \subseteq \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.
б)* Докажите, что в $C[0, 1]$ найдётся замкнутое ограниченное подмножество, не являющееся компактом.

Задача 23. Докажите, что непрерывный образ компакта компактен.

Задача 24. Докажите, что любая функция $f\colon K \to \mathbb{R}$, где K — компакт, принимает наибольшее и наименьшее значения.

Задача 25. Докажите, что множество значений непостоянной непрерывной функции на связном компакте представляет собой отрезок (то есть функция принимает все промежуточные значения между наибольшим и наименьшим).

Задача 26. Дайте определение *равномерно непрерывного* отображения метрических пространств.

Задача 27. Приведите пример непрерывного отображения, не являющегося равномерно непрерывным.

Задача 28. Докажите, что любое непрерывное отображение компакта является равномерно непрерывным.

Гомеоморфизмы

Определение 7. Отображение метрических пространств $F\colon X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно взаимно-однозначно и непрерывно вместе с обратным отображением. Пространства, между которыми существует гомеоморфизм, называются *гомеоморфными*.

Задача 29. Гомеоморфен ли интервал $(0, 1)$ **а)** прямой? **б)** отрезку $[0, 1]$?

Задача 30. Пусть $F\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, $U \subseteq X$. Докажите, что $F\colon U \to F(U)$ — гомеоморфизм.

Задача 31. Гомеоморфны ли
а) интервал и окружность без одной точки? **б)** интервал и отрезок без одной внутренней точки? **в)** окружность и отрезок? **г)** квадрат и круг? **д)** $\mathbb{R}^n$ и открытый шар в нем? **е)** отрезок и квадрат?

Задача 32. Какие из букв русского алфавита гомеоморфны?

Задача 33. Существует ли подмножество прямой, гомеоморфное
а) графику функции $\sin(1/x)$? **б)** замыканию этого графика в $\mathbb{R}^2$?

Задача 34. **а)** Докажите, что взаимно-однозначное непрерывное отображение компакта является гомеоморфизмом. **б)** Докажите, что без предположения компактности это не так.

Задача 35. Пусть X можно непрерывно и взаимно-однозначно отобразить на Y, а Y — на X. Верно ли, что X и Y гомеоморфны?

Задача 36. **а)** Существует ли непрерывное взаимно-однозначное отображение отрезка на квадрат?
б)* Докажите, что существует непрерывное сюръективное отображение отрезка на квадрат.
в)* Докажите, что для любого непрерывного сюръективного отображения отрезка на квадрат найдется точка квадрата, имеющая не менее трех прообразов.

Листок №29д. Топология 3 03.2006

Гомотопии

Определение 1. Пусть X, Y — метрические пространства, f, g — два непрерывных отображения X в Y. Отображения f и g называются *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение $F\colon [0,1] \times X \to Y$, что $F(0,x) = f(x)$, $F(1,x) = g(x)$ для любого $x \in X$. Отображение F называется *гомотопией, связывающей f с g*.

Задача 1. Докажите, что гомотопность отображений — отношение эквивалентности.

Задача 2. Докажите, что любые два непрерывных отображения из X в Y гомотопны, если **а)** X — любое, $Y = [0,1]$; **б)** X — любое, $Y = \mathbb{R}$; **в)** X — любое, $Y = \mathbb{R}^n$; **г)** $X = [0,1]$, Y — линейно связное.

Определение 2. Пусть X — метрическое пространство, a, b — две его точки, $f(t), g(t)$ — два пути с началом в точке a и концом в точке b. Пути f и g называются *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение $F\colon [0,1] \times [0,1] \to X$, что $F(0,t) = f(t)$, $F(1,t) = g(t)$, $F(\tau,0) = a$, $F(\tau,1) = b$ для любых $t, \tau \in [0,1]$. Отображение F называется *гомотопией, связывающей f с g*.

Напоминание. Мы обозначаем через S^1 окружность единичного радиуса в плоскости $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат, причём саму плоскость мы отождествляем со множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$. Таким образом,

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{2\pi i t} \mid t \in [0,1]\}.$$

Задача 3. Пусть f, g — два пути в X. Определим отображение h окружности S^1 в X, положив

$$h\left(e^{2\pi i t}\right) = \begin{cases} f(2t), & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ g(2-2t), & \text{при } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Докажите, что пути f и g гомотопны тогда и только тогда, когда отображение h гомотопно постоянному отображению (то есть, переводящему окружность S^1 в одну точку).

Степень отображения

Степенью непрерывного отображения окружности в себя называется, говоря неформально, число раз, которое окружность на себя «наматывается» при этом отображении. Для того, чтобы дать точное определение, нам понадобится некоторая подготовка.

Определение 3. Пусть $f\colon X \to S^1$ и $g\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывные отображения метрического пространства X. Отображение g называется *поднятием* отображения f на $\mathbb{R}$, если $f(x) = e^{2\pi i g(x)}$ для любого $x \in X$.

Задача 4. Пусть $X = [0,1]$, $f(x) = e^{2\pi i x}$. Опишите все поднятия отображения f на $\mathbb{R}$.

Задача 5. Пусть $X = S^1$, $f(x) = x$. Существует ли поднятие у этого отображения?

Задача 6. Пусть f — некоторый путь в окружности S^1, то есть непрерывное отображение $f\colon [0,1] \to S^1$.

а) Докажите, что у пути f существует поднятие на прямую $\mathbb{R}$.

б) Пусть g_1, g_2 — поднятия f на $\mathbb{R}$. Докажите, что $g_1(t) - g_2(t) = k$, где k — некоторая целая константа.

Указание. Рассмотрите сначала путь f, лежащий в полуокружности; затем воспользуйтесь равномерной непрерывностью непрерывной функции на отрезке.

Определение 4. Пусть $h\colon S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение. Рассмотрим путь $f(t) = h(e^{2\pi i t})$ и его поднятие $g(t)$. Число $g(1) - g(0)$ называется *степенью отображения* h.

Задача 7. Докажите, что степень отображения $h\colon S^1 \to S^1$ определена корректно (то есть не зависит от выбора поднятия).

Задача 8. Чему равна степень отображения $h(z) = z^n$, где n — целое число?

Задача 9. Пусть $h\colon S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение, $w_0 \in S^1$. Назовем точку $z_0 \in S^1$ *положительным прообразом* точки w_0, если $h(z_0) = w_0$ и при проходе z через z_0 против часовой стрелки значение $h(z)$ проходит через w_0 в том же направлении. Строго последнее условие записывается так: для всех z из некоторой окрестности точки z_0 комплексное число $h(z)/w_0$ имеет мнимую часть того же знака, что и мнимая часть z/z_0. Аналогично определяем *отрицательный прообраз* точки w_0 (при проходе через него против часовой стрелки $h(z)$ проходит через w_0 по часовой стрелке).

Предположим, что у точки w_0 конечное число прообразов, причём все они либо положительные, либо отрицательные. Докажите, что степень отображения h равна разности числа положительных прообразов точки w_0 и числа ее отрицательных прообразов.

Задача 10. **а)** Докажите, что у любого непрерывного отображения квадрата $[0,1] \times [0,1]$ в окружность есть поднятие на прямую.

б) Пусть f_1 и f_2 — гомотопные пути в окружности. Докажите, что у них существуют гомотопные поднятия на прямую.

Задача 11. Докажите, что степень отображения $f\colon S^1 \to S^1$ не меняется при гомотопии.

Задача 12. **а)** Докажите, что если отображение $f\colon S^1 \to S^2$ не является сюръекцией, то оно гомотопно отображению в точку.

б) Докажите, что двумерная сфера S^2 не гомеоморфна двумерному тору $T^2 = S^1 \times S^1$.

Задача 13. Отображение окружности в себя называется *нечётным*, если диаметрально противоположные точки переходят в диаметрально противоположные, и *четным*, если диаметрально противоположные точки переходят в одну и ту же точку. Докажите, что степень нечётного отображения — нечётное число, а степень четного отображения — четное число.

Порядок замкнутой кривой относительно точки

Определение 5. *Замкнутой кривой* в пространстве X называется путь, у которого конец совпадает с началом.

Определение 6. Пусть γ — замкнутая кривая на плоскости $\mathbb{R}^2$, которую мы отождествляем с $\mathbb{C}$, а P — точка плоскости, не лежащая на кривой γ. Рассмотрим следующее отображение окружности

S^1 в себя:

$$e^{2\pi it} \mapsto \frac{\gamma(t) - P}{|\gamma(t) - P|}.$$

Степень этого отображения называется *порядком кривой γ относительно точки P* и обозначается $\mathrm{ord}_P(\gamma)$.

Задача 14. Нарисуйте кривые γ_1 и γ_2 и найдите их порядки относительно точек $(0,0)$, $(1,0)$ и $(-1,0)$, где

$$\gamma_1(t) = (\cos(2\pi t) - 1/2, \sin(4\pi t)) \quad \text{и} \quad \gamma_2(t) = (\cos(2\pi t)/2 + 3\cos(4\pi t)/4, \sin(4\pi t)).$$

Задача 15. Пусть γ — замкнутая кривая в плоскости $\mathbb{R}^2$, а P — точка плоскости, не лежащая на кривой γ. Проведем произвольный луч l из точки P. Определите понятия положительной и отрицательной точки пересечения луча l с кривой γ так, чтобы было верно утверждение: если существует лишь конечное число точек пересечения луча l с кривой γ, причём все они либо положительны, либо отрицательны, то $\mathrm{ord}_P(\gamma)$ равен разности числа положительных и числа отрицательных точек пересечения.

Задача 16. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами. Докажите, что порядок кривой $\gamma_R(t) = f(Re^{2\pi it})$ относительно точки $0 \in \mathbb{C}$ при $R \gg 0$ равен n.

Задача 17. Поставим в соответствие каждой замкнутой кривой γ в $\mathbb{R}^2$, не проходящей через точку P, отображение $\check{\gamma}\colon S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$:

$$\check{\gamma}(e^{2\pi it}) = \gamma(t).$$

Докажите, что если отображения $\check{\gamma}_1$ и $\check{\gamma}_2$ гомотопны, то $\mathrm{ord}_P(\gamma_1) = \mathrm{ord}_P(\gamma_2)$.

Задача 18. Пусть f — непрерывное отображение единичного круга в плоскость, $\gamma(t) = f(e^{2\pi it})$, P — точка, не лежащая на кривой γ. Докажите, что если $\mathrm{ord}_P(\gamma) \neq 0$, то уравнение $f(x) = P$ имеет решение.

Задача 19. (*Основная теорема алгебры*) Докажите, что любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Задача 20. Пусть γ — замкнутая кривая на плоскости, P — точка, не лежащая на ней. Докажите, что

а) если точка P соединена с точкой P' путем, не пересекающим кривую γ, то выполнено равенство: $\mathrm{ord}_P(\gamma) = \mathrm{ord}_{P'}(\gamma)$.

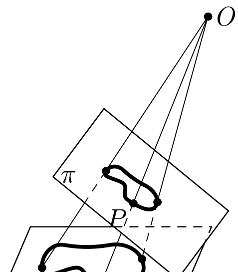
б) найдется такая окрестность точки P, что относительно любой точки из нее порядок γ такой же, как и относительно P.

Задача 21. (*Н. Н. Константинов*) Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A и связанные веревкой длины 2, смогли проехать в B, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса 1, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

Задача 22. На плоскости нарисован граф Г. Его образ при сдвиге на некоторый вектор длины 1 не пересекается с Г. По графу ползают два круглых жука диаметром 1 (центр каждого жука все время принадлежит Г). Могут ли они поменяться местами?

Листок №30д. Проективная геометрия 03.2006

Определение 1. Пусть в пространстве заданы две плоскости π и π', параллельные или непараллельные между собой. Пусть O — точка, не лежащая ни на π, ни на π'. *Центральной проекцией π на π' с центром O* называется отображение, сопоставляющее каждой точке $P \in \pi$ точку $P' \in \pi'$ пересечения



прямой OP с плоскостью π' (см. рис. 2.17). Пусть l — прямая, не параллельная ни π, ни π'. *Параллельной проекцией* π *на* π' *вдоль* l называется отображение, сопоставляющее каждой точке $P \in \pi$ такую точку $P' \in \pi'$, что прямая PP' параллельна прямой l (см. рис. 2.18).

Задача 1. Опишите область определения и область значений центральной проекции; параллельной проекции.

Определение 2. Пусть π — плоскость. Добавим к каждой прямой на ней *«бесконечно удалённую» точку*, причём будем считать, что «бесконечно удалённые» точки у параллельных прямых совпадают, а у непараллельных — различны. Скажем также, что «бесконечно удалённые» точки всех прямых составляют *«бесконечно удалённую» прямую*. То, что получилось, называется *проективной плоскостью* $\bar{\pi}$.

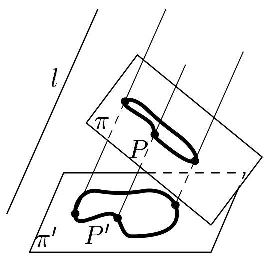


Рис. 2.18.

Задача 2. Докажите, что любые две различные прямые на проективной плоскости имеют единственную общую точку, а через любые две различные точки на проективной плоскости проходит единственная прямая.

Задача 3. Докажите, что центральная проекция π на π' с центром O продолжается до взаимно однозначного отображения $\bar{\pi}$ на $\bar{\pi}'$, переводящего прямые в прямые (оно называется *центральной проекцией* $\bar{\pi}$ *на* $\bar{\pi}'$ *с центром* O). Аналогично для параллельной проекции.

Определение 3. Любое отображение $\bar{\pi}$ на себя, которое можно представить в виде композиции центральных и параллельных проекций, называется *проективным преобразованием*.

Задача 4. Докажите, что с помощью проективного преобразования $\bar{\pi}$ можно перевести любые две точки в «бесконечно удалённые».

Задача 5. Докажите, что с помощью проективного преобразования $\bar{\pi}$ на $\bar{\pi}$ можно перевести любые три различные *коллинеарные* (лежащие на одной прямой) точки в любые другие три различные коллинеарные точки.

Задача 6. Докажите, что отрезок нельзя разделить пополам с помощью одной линейки.

Задача 7. Докажите, что с помощью проективного преобразования $\bar{\pi}$ можно перевести любую четвёрку точек, никакие три из которых не коллинеарны, в любую другую четвёрку точек с тем же условием.

Задача 8.** Докажите, что любое взаимно однозначное преобразование проективной плоскости в себя, переводящее прямые в прямые, проективно.

Задача 9. (*Теорема Паппа*) Пусть вершины шестиугольника $ABCDEF$ лежат попеременно на двух прямых (см. рис. 2.19). Докажите, что точки пересечения противоположных сторон этого шестиугольника коллинеарны.

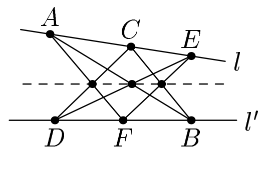


Рис. 2.19.

Задача 10. (*Теорема Дезарга*) Пусть заданы два треугольника ABC и $A'B'C'$, причём прямые AA', BB' и CC' *конкурентны* (пересекаются в одной точке). Докажите, что точки пересечения соответственных сторон треугольников ABC и $A'B'C'$ коллинеарны (см. рис. 2.20).

Задача 11. Верна ли теорема, обратная теореме Дезарга?

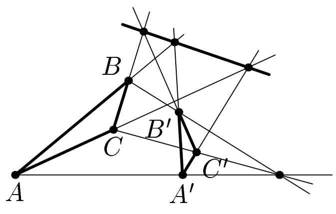


Рис. 2.20.

Двойное отношение

Определение 4. Пусть A, B, C, D — точки на одной прямой l, причём $\{A, B\} \cap \{C, D\} = \varnothing$. Их *двойным отношением* называется

$$[A, B, C, D] = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

где отношение отрезков берется со знаком. Если одна из точек является бесконечно удалённой, то двойное отношение равно *простому* отношению остальных трёх точек, то есть, например, $[A, B, C, \infty] = CA : CB$, и т. п.

Пусть a, b, c, d — прямые в плоскости π, проходящие через (конечную) точку O, причём $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \varnothing$. Их *двойным отношением* называется

$$[a, b, c, d] = \frac{\sin\angle ca}{\sin\angle cb} : \frac{\sin\angle da}{\sin\angle db},$$

где на каждой прямой выбрано направление и угол между прямыми — это угол, отсчитанный против часовой стрелки от выбранного направления на первой прямой до выбранного направления на второй прямой.

Задача 12. Пусть a, b, c, d — прямые в плоскости π, проходящие через точку O, причём $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \varnothing$, прямая $l \subset \pi$ не проходит через O, а точки A, B, C, D суть точки пересечения прямой l с прямыми a, b, c, d соответственно. Докажите, что $[a, b, c, d] = [A, B, C, D]$.

Задача 13. Докажите, что двойные отношения сохраняются при проективных преобразованиях.

Задача 14. Как меняется двойное отношение $[A, B, C, D]$ при перестановках точек A, B, C, D? Сколько различных значений двойного отношения так получается (для точек в общем положении)?

Задача 15. Пусть на проективной плоскости $\bar{\pi}$ выбраны прямые k, l, m, n, никакие три из которых не конкурентны. Пусть $A = k \cap l$, $B = m \cap n$, $E = k \cap m$, $F = k \cap n$, $G = l \cap m$, $H = l \cap n$, $C = AB \cap EH$, $D = AB \cap FG$. Докажите, что $[A, B, C, D] = -1$ (точки C и D *гармонически сопряжены* относительно отрезка AB).

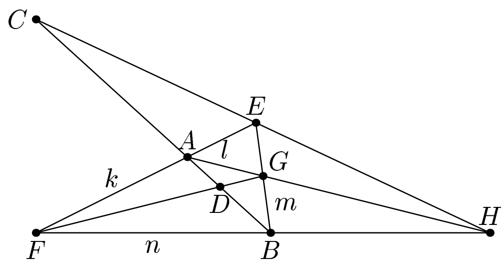


Рис. 2.21.

Задача 16. (*Проективная теорема Чевы*) Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, D и E — любые точки, не принадлежащие прямым AB, AC и BC. Докажите, что

$$[AD, AE, AB, AC] \cdot [BD, BE, BC, BA] \cdot [CD, CE, CA, CB] = 1.$$

Задача 17. (*Теорема Чевы*) На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC (или на продолжениях этих сторон) выбрали соответственно точки C', B' и A'. Выведите из задачи 16, что прямые AA', BB' и CC' конкурентны тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = -1.$$

(Отношения отрезков берутся со знаком!)

Задача 18. (*Теорема Чевы в углах*) На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC (или на продолжениях этих сторон) выбрали соответственно точки C', B' и A'. Выведите из задачи 16, что прямые AA', BB' и CC' конкурентны тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle CAA'} \cdot \frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle BCC'} \cdot \frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle ABB'} = -1.$$

(Углы берутся со знаком!)

Задача 19. Пусть в окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$, причём

$$\frac{AB \cdot CD \cdot EF}{BC \cdot DE \cdot FA} = 1.$$

Докажите, что диагонали AD, BE и CF конкурентны.

Полярное преобразование

Определение 5. Пусть на плоскости π задана окружность Γ радиуса r с центром O. Для любой точки $A \neq O$ *полярой* точки A называется прямая, перпендикулярная прямой OA, расстояние от которой до точки O равно r^2/OA. Полярой точки O называется бесконечно удалённая прямая проективной плоскости $\bar{\pi}$. Полярой бесконечно удалённой точки $A \in \bar{\pi}$ называется прямая, проходящая через точку O и перпендикулярная ко всем (конечным) прямым, проходящим через A.

Задача 20. Докажите, что каждая прямая на проективной плоскости является полярой ровно одной точки. (Эта точка называется *полюсом* данной прямой.)

Определение 6. Отображение проективной плоскости в себя, переводящее каждую точку в её поляру и каждую прямую в её полюс, называется *полярным преобразованием*.

Определение 7. Будем говорить, что точка P и прямая l проективной плоскости *инцидентны*, если точка P лежит на прямой l.

Задача 21. Докажите, что полярное преобразование плоскости сохраняет *инцидентность* (то есть, если точка и прямая инцидентны, то их образы при полярном преобразовании также инцидентны).

Задача 22. (*Задача о поляре*) Пусть $A \in (\bar{\pi} \setminus \Gamma)$. Проведём через точку A любые две прямые, одна из которых пресекает окружность Γ в точках K и L, а другая — в точках M и N. Обозначим через B точку пересечения прямых KN и LM. Докажите, что точка B лежит на поляре точки A, причём все точки этой поляры можно получить таким построением.

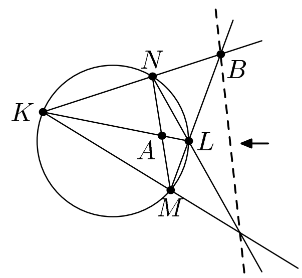


Рис. 2.22.

Задача 23. Докажите, что полярное преобразование сохраняет двойные отношения.

Задача 24. (*Проективная двойственность*) Пусть верная теорема проективной геометрии сформулирована в терминах точек, прямых, инцидентности и двойных отношений. Докажите, что если в формулировке заменить точки на прямые, а прямые на точки, то снова получится верная теорема проективной геометрии.

Задача 25. (*Проективная теорема Менелая*) В какое утверждение переводит проективная двойственность проективную теорему Чевы?

Задача 26. (*Теорема Менелая*) На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC (или на продолжениях этих сторон) выбрали соответственно точки C', B' и A'. Выведите из задачи 25, что точки A', B' и C' коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1.$$

(Отношения отрезков берутся со знаком!)

Задача 27. В какое утверждение переводит проективная двойственность теорему Паппа?

Задача 28. В какое утверждение переводит проективная двойственность теорему Дезарга?

Конические сечения

Определение 8. *Коническим сечением* или *коникой* называется образ окружности под действием проективного преобразования.

Задача 29*. Докажите, что эллипс, гипербола и парабола являются коническими сечениями. (Указание: рассмотрите сечения кругового конуса различными плоскостями).

Задача 30. Докажите, что любая коника — либо эллипс, либо парабола, либо гипербола.

Задача 31. Пусть A, B, C, D — точки на конике Γ, причём $\{A, B\} \cap \{C, D\} = \varnothing$. Докажите, что для любой другой точки $E \in \Gamma$ двойное отношение $[EA, EB, EC, ED]$ одно и то же.

Задача 32. (*Задача о бабочке*) Через середину C произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB). Отрезок KN пересекает AB в точке P. Отрезок LM пересекает AB в точке Q. Докажите, что $PC = QC$.

Задача 33. (*Теорема Паскаля*) Докажите, что точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, коллинеарны.

Задача 34. (*Теорема Брианшона*) Докажите, что три диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, описанного около конического сечения, конкурентны.

Задача 35. Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного четырёхугольника совпадает с точкой пересечения прямых, соединяющих точки касания противоположных сторон.

Разное

Задача 36. С помощью одной линейки проведите касательную к окружности (центр которой не отмечен) через данную точку,

а) лежащую вне окружности;

б) лежащую на окружности.

Задача 37. Где лежат середины любого семейства параллельных хорд данной параболы?

Задача 38. Дан график **а)** $y = x^2$; **б)** $y = 1/x$; оси координат стёрты. Как восстановить их циркулем и линейкой?

Задача 39. В окружность с центром O вписан четырехугольник, его диагонали пересекаются в точке P, а продолжения противоположных сторон — в точках Q и R. Докажите, что высоты треугольника PQR пересекаются в точке O.

Задача 40. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC — в точке Q, причём отрезки BP и DQ пересекаются в точке A; M — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на PQ. Докажите, что

а) точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой OM;

б)* углы $\angle BMO$ и $\angle DMO$ равны.

Листок №31д. Математические модели некоторых систем голосования 02.2006

Пусть перед обществом из n человек стоит задача выбора одной альтернативы из данных l возможностей[3)]. Пусть каждый участник упорядочивает эти альтернативы по возрастанию предпочтительности для него, то есть его мнение задаётся некоторой *перестановкой* этих альтернатив. (Для простоты считаем, что никакие две альтернативы для участника не равноценны.) Упорядоченный набор из n таких перестановок назовём *профилем индивидуальных предпочтений*. Множество всех возможных профилей обозначим Π.

Систему голосования можно представить в виде чёрного ящика, который, получая на вход профиль индивидуальных предпочтений, выдаёт некоторую альтернативу (она будет считаться «наилучшей для общества»). Математически это можно описать как отображение (функцию) из множества Π (или некоторого его подмножества, если чёрный ящик «срабатывает» не всегда) во множество альтернатив A.

В простом случае, когда имеются ровно 2 альтернативы, часто применяется *правило абсолютного большинства*: выбирается альтернатива, предпочтительная для более чем половины участников. Достоинства: очевидны. Недостатки: во-первых, не даёт результата при равенстве голосов. Во-вторых, не учитывает «силы предпочтения». Например, если для участника p_1 крайне важно

[3)] Таковыми альтернативами могут быть, например, кандидаты на какую-либо выборную должность, подходящие места для постройки моста, альтернативные способы вложения денег и пр.

выбрать альтернативу a_1, а для p_2 и p_3 альтернатива a_2 лишь незначительно предпочтительнее, чем a_1, то иногда можно было бы и согласиться с p_1.

Задача 1. Большинством голосов признано, что утверждение B истинно, и что из B следует C. Можно ли быть уверенным, что по мнению большинства истинно также и C ?

Рассмотрим случай $l > 2$. Можно взять любую пару альтернатив и сравнить их по правилу большинства («дуэль»). Для простоты будем полагать, что «ничьих» не бывает.

Задача 2. Рассмотрим следующую «дуэльную» процедуру при $l > 2$. На голосование ставится произвольная пара кандидатов, проигравший выбывает. Затем выигравший ставится на голосование с ещё не рассмотренным кандидатом. И так далее, пока не останется единственный кандидат, который и объявляется победителем. Верно ли, что результат этой процедуры не может зависеть от порядка выбора пар для «дуэлей», если каждый участник голосует в соответствии со своими неизменными предпочтениями?

Задача 3. а) Всегда ли отношение «a_1 предпочтительнее для большинства, чем a_2» транзитивно?
б) Пусть $l = 3$. Верно ли, что указанное отношение транзитивно тогда и только тогда, когда результат описанной в задаче 2 процедуры не зависит от порядка постановки на голосование? А если $l > 3$?

Определение 1. Альтернатива, которая выигрывает подобную дуэль с любой другой альтернативой, называется *победителем по Кондорсе*.

Задача 4. Съезд партии выбирает председателя из кандидатур A, B и C, которые имеют 44, 30 и 26 сторонников соответственно. Если в первом туре никто не наберёт больше 50%, то будет второй тур. В нём не будет участвовать кандидат, набравший минимальное количество голосов. Известно, что при непопадании своего кандидата во второй тур сторонники C будут голосовать за B, а голоса сторонников B разделятся поровну между A и C. Кто выиграет выборы? Достаточно ли данных для определённого ответа?

Определение 2. Если участник голосует в соответствии со своими истинными предпочтениями, такое голосование назовём *искренним*. Если же он голосует вопреки своим предпочтениям (но с тем, чтобы в конечном итоге достичь лучших с его точки зрения результатов), такое голосование назовём *тактическим*. (Примечание: в определении *победителя по Кондорсе* подразумевалось, что голосование *искреннее*.).

Задача 5. Дополнительно известно, что если бы A не прошёл во второй тур, то его голоса перешли бы к C. Пусть выборы проводятся по новой системе: каждый избиратель заполняет бюллетень лишь 1 раз, при этом ранжируя все кандидатуры в порядке предпочтения, а затем бюллетени обрабатываются по дуэльной процедуре. Какой из кандидатов может победить, если первая дуэль проводится между A и B?

Задача 6. Решается вопрос постройки нового супермаркета в деревне, где все дома довольно плотно расположены вдоль длинной улицы. На этой улице имеется l подходящих мест. Место выбирается голосованием, при этом каждый хочет, чтобы магазин был поближе к его дому. (Примечание: вместо длинной улицы можно рассмотреть одномерный политический спектр «правые-левые»).
а) Если сравнить каждую пару мест путём дуэльного голосования, обязательно ли полученное отношение предпочтения будет транзитивным?
б) Укладываются ли в модель «линейного политического спектра» условия задач 4 и 5? (Будем считать, что все голосуют *искренне*.)

Задача 7. Пусть $l = 3$ и при данном профиле индивидуальных предпочтений существует победитель по Кондорсе. Может ли он проиграть при дуэльной процедуре?

Задача 8*. Предложите систему голосования (более) устойчивую к тактическому голосованию.

Листок №32д. Теорема Эрроу о диктаторе 02.2006

Пусть перед обществом из n человек стоит l альтернатив, и каждый из участников упорядочивает их в соответствии со своими предпочтениями, а по результатам опроса определяется коллективное решение. Это означает, что набору $P = \{<_1, <_2, \ldots, <_n\}$ мнений[4)] — строгих линейных порядков на множестве альтернатив A — сопоставляется нестрогий линейный порядок $\leqslant_P$ на A (альтернативам разрешается быть равнозначными с точки зрения общества).

Определение 1. Набор $<_1, <_2, \ldots, <_n$ называется *профилем*, а отображение из множества профилей в множество нестрогих линейных порядков на A — *функционалом общественного выбора.*

Определение 2. Функционал общественного выбора мы будем называть *справедливым*, если он обладает следующими свойствами:
эффективность по Парето: если в профиле P для некоторых альтернатив x и y $x <_k y$ для любого участника k, то $x \leqslant_P y$ и не $y \leqslant_P x$;
независимость от посторонних альтернатив: если в профиле P каждый участник сравнил альтернативы x и y так же, как в профиле P', то $x \leqslant_P y \Longleftrightarrow x \leqslant_{P'} y$.

Задача 1. а) При каких l правило простого большинства (общество считает, что $x \leqslant y$ если и только если хотя бы для половины участников $x < y$) задает функционал общественного выбора?
б) Является ли этот функционал эффективным? Независимым от посторонних альтернатив?

Задача 2. Пусть в данном профиле альтернатива заняла i-е по счёту место в предпочтениях j-го участника. Присвоим ей рейтинг — сумму мест в предпочтениях всех участников, и упорядочим альтернативы по возрастанию рейтинга (такой способ формирования коллективного решения называется *правилом Борда*).
а) Задает ли правило Борда функционал общественного выбора?
б) Является ли правило Борда эффективным? Независимым от посторонних альтернатив?

Задача 3. а) Придумайте свой способ формирования коллективного решения. При каких l он является справедливым?
б) Зачем в определении справедливого функционала требовать независимость от посторонних альтернатив?

Задача 4. Определите, что такое диктаторский функционал. Является ли он эффективным? Независимым от посторонних альтернатив?

Теорема Эрроу о диктаторе. Пусть число альтернатив больше двух. Тогда справедливый функционал общественного выбора является диктаторским.

Всюду ниже будем считать, что задан функционал общественного выбора, удовлетворяющий условиям теоремы Эрроу. Будем обозначать $P_{xy} = \{k : x <_k y\}$.

Задача 5. (*лемма о нейтральности*) Пусть для некоторых альтернатив x, y, z $P_{xy} = P_{xz}$, и $x \leqslant_P y$. Тогда $x \leqslant_P z$.

Задача 6. (*лемма об экстремальной альтернативе*) Назовем альтернативу a *экстремальной* в профиле P, если для каждого участника a либо лучшая, либо худшая. Докажите, что в коллективном мнении экстремальная альтернатива займет либо первое, либо последнее место.

Задача 7. (*доказательство теоремы Эрроу*) Рассмотрим серию профилей, отличающихся друг от друга только мнением участников о некоторой альтернативе a: в первом профиле все считают a лучшей альтернативой, во втором профиле участник 1 считает a худшей, а остальные — лучшей, в третьем профиле участники 1 и 2 считают a худшей, а остальные — лучшей, и т.д. В последнем, $(n+1)$-м профиле все будут считать a худшей.
а) Исходя из значений функционала на этих профилях, угадайте, кто диктатор.
б) Докажите, что он действительно диктатор.

[4)]Здесь «меньше» = «хуже».

Системы линейных уравнений

Определение 1. *Системой* n *линейных уравнений* с m неизвестными над полем K называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n, \end{cases}$$

где $a_{ij}, b_i \in K$ (система с прямоугольной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $n \times m$ и правой частью $b = (b_i)$; коротко система записывается так: $Ax = b$). Решения такой системы обычно ищутся в том же поле K.

Задача 1.
а) Пусть $x^{(0)}$ — некоторое решение системы $Ax = b$. Докажите, что любое ее решение имеет вид $x^{(0)} + y$, где y — произвольное решение *однородной* системы $Ax = 0$.
б) Докажите, что для любых двух решений $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ однородной системы их *линейная комбинация* $ax^{(1)} + bx^{(2)}$ тоже является решением при любых a и b.

Задача 2. (*Метод Гаусса*) Докажите, что для любой системы уравнений найдется эквивалентная ей система $Cx = D$, где матрица C имеет ступенчатый вид: в каждой ненулевой строке начальный отрезок нулей длинней, чем в предшествующей строке, а все нулевые строки располагаются в конце.

Задача 3. Докажите, что если матрица A такова, что для любой правой части соответствующая система имеет единственное решение, то $n = m$ (то есть матрица квадратная).

Задача 4. Предположим, что система линейных уравнений с рациональными коэффициентами имеет действительное решение. Докажите, что она имеет и рациональное решение.

Задача 5. Известно, что некоторый многочлен принимает в рациональных точках рациональные значения. Докажите, что его коэффициенты рациональны.

Задача 6. Пусть коэффициенты матрицы A рациональны и система $Ax = b$ разрешима. Докажите, что у нее есть решение вида $x^{(0)} = Cb$, где C — матрица с рациональными коэффициентами.

Задача 7. Докажите, что у однородной системы с рациональными коэффициентами есть такие рациональные решения $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$, что любое решение представляется в виде их линейной комбинации.

Задача 8. В стаде 101 корова. Любые 100 из них можно разбить на 2 стада по 50 коров так, что общие веса стад будут равны. Докажите, что все коровы одного веса.

Задача 9*. Пусть прямоугольник $a \times b$ разбит произвольным образом на n квадратов. Обозначим через $x_1, \dots, x_n$ стороны этих квадратов.
а) Постройте для набора $x_1, \dots, x_n$ систему линейных уравнений, решением которой он является, с матрицей, состоящей из нулей и единиц, с правой частью, состоящей из чисел, равных a и b, и такую, что любое решение этой системы, состоящее из положительных чисел, определяет некоторое разбиение нашего прямоугольника на квадраты.
б) Докажите, что для любого решения этой системы выполнено равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = ab$.
в) Докажите, что эта система имеет единственное решение.
г) Докажите, что числа x_i/a и x_i/b являются рациональными ($i = 1, \dots, n$).

Задача 10. (*Задача Дирихле для уравнения Лапласа*) Старуха Шапокляк расставила числа в граничных клетках шахматной доски. Сможет ли Чебурашка поставить числа во внутренние клетки доски так, чтобы каждое поставленное число было средним арифметическим четырех его соседей?

Задача 11*. Прямоугольный лист бумаги размерами $a \times b$ см разрезан на прямоугольники, у каждого из которых одна сторона имеет длину 1 см. Докажите, что хотя бы одно из чисел a или b целое.

Задача 12. (*Числа Фибоначчи*) **а)** Известно, что последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет соотношению $a_{n+2} = a_{n+1}+a_n$. Докажите, что при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ последовательность $\lambda\{a_n\} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots)$ также удовлетворяет этому соотношению.

б) Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ удовлетворяют соотношению пункта а). Докажите, что при любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ последовательность $\lambda\{a_n\} + \mu\{b_n\} = (\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \dots)$ также удовлетворяет этому соотношению.

в) Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ удовлетворяют соотношению п. а), причём вектора (a_1, a_2) и (b_1, b_2) неколлинеарны. Докажите, что любая последовательность, удовлетворяющая соотношению пункта а), может быть представлена в виде $\lambda\{a_n\} + \mu\{b_n\}$ при некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

г) Найдите геометрические прогрессии, удовлетворяющие соотношению пункта а).

д) Найдите явную формулу для последовательности Фибоначчи, заданной рекуррентным уравнением $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ и начальными условиями $a_0 = a_1 = 1$.

Задача 13. Найдите явные формулы для следующих (вещественных) последовательностей:

а) $a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n$, если $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$;

б) $a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n$, в случаях $a_0 = 1$, $a_1 = -1$; $a_0 = 0$, $a_1 = -1$; $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

в) $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12{,}5a_n$, если $a_0 = a_1 = 1$.

г) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 1$, если $a_0 = a_1 = 1$.

Задача 14. Опишите все решения рекуррентного уравнения $a_{n+k} = c_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + c_0 a_n + c$, где $c_0, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$, при любых начальных условиях, если **а)** $c = 0$; **б)** $c \in \mathbb{R}$.

Задача 15. **а)** Докажите, что через любые четыре точки плоскости проходит бесконечное количество кривых второго порядка (то есть линий, заданных уравнениями вида $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, где не все a, b, c равны нулю).

б) Докажите, что через любые пять точек плоскости проходит хотя бы одна кривая второго порядка.

в) Существуют такие пять точек, через которые проходит ровно одна кривая второго порядка; бесконечное количество кривых второго порядка.

Линейные отображения и матрицы

Определение 2. Множество последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ длины n, состоящих из элементов поля K, называется *n-мерным арифметическим векторным пространством* K^n. Элементы K^n можно складывать и умножать на элементы поля K. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица над полем K размера $m \times n$. *Линейным отображением* с матрицей A называется отображение $K^n \to K^m$, переводящее каждый вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ в вектор $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, где $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.

Задача 16. Докажите, что композиция линейных отображений тоже является линейным отображением. Как вычисляется матрица композиции?

Определение 3. Матрица композиции линейных отображений с матрицами A и B называется *произведением* этих матриц и обозначается AB. (Сначала выполняется отображение с матрицей B, а потом — с матрицей A.) Матрица тождественного отображения $K^n \to K^n$ называется *единичной матрицей* порядка n и обозначается E. Матрица B называется *левой обратной* к матрице A, если $BA = E$, *правой обратной*, если $AB = E$, и просто *обратной*, если выполнены оба этих равенства. Матрица A называется *обратимой* (*обратимой слева*, *справа*), если у нее существует обратная матрица (левая, правая обратная матрица).

Задача 17. Докажите, что матрица обратима слева (справа) тогда и только тогда, когда система линейных уравнений $Ax = b$ имеет не более (не менее) одного решения для любой правой части b.

Задача 18. Докажите, что матрица, обратимая справа и слева, обратима.

Задача 19. Докажите, что обратимой может быть только квадратная матрица.

Векторные пространства

Определение 4. *Векторным* или *линейным пространством* над полем K называется любое множество V, элементы которого (векторы) можно складывать друг с другом и умножать на элементы поля, причём выполнены следующие аксиомы:

1) $u+v=v+u$ для любых $u,v\in V$;

2) $u+(v+w)=(u+v)+w$ для любых $u,v,w\in V$;

3) существует *нулевой* вектор 0 такой, что $u+0=u$ для любого $u\in V$;

4) для любого $v\in V$ существует *противоположный* вектор $-v$ такой, что $v+(-v)=0$;

5) $1v=v$ для любого $v\in V$;

6) $(ab)v=a(bv)$ для любых $a,b\in K$ и $v\in V$;

7) $(a+b)v=av+bv$ для любых $a,b\in K$ и $v\in V$;

8) $a(u+v)=au+av$ для любых $a,b\in K$ и $v\in V$.

Задача 20. Приведите примеры векторных пространств.

Задача 21. Докажите, что элементы 0 и $-v$ в третьей и четвертой аксиомах определены однозначно.

Определение 5. Вектор $b\in V$ *линейно выражается* через векторы $a_1,\dots,a_m\in V$, если существуют такие $\mu_1,\dots,\mu_m\in K$, что $b=\mu_1a_1+\dots+\mu_ma_m$. (Вектор b линейно выражается через пустую систему векторов, если $b=0$.)

Определение 6. Система векторов $(a_1,\dots,a_m)$ называется *линейно зависимой*, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:
1) существуют такие $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, не все равные нулю, что $\lambda_1a_1+\dots+\lambda_ma_m=0$;
2) хотя бы один из векторов $a_1,\dots,a_m$ линейно выражается через остальные.
Пустая система векторов считается линейно независимой.

Задача 22. Если система векторов $\{a_1,\dots,a_m\}$ линейно независима, а система векторов $\{a_1,\dots,a_m,b\}$ линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы $a_1,\dots,a_m$.

Определение 7. Векторное пространство V называется *бесконечномерным*, если в нем существуют линейно независимые системы из сколь угодно большого числа векторов. В противном случае пространство V называется *конечномерным.*

Задача 23. Приведите примеры конечномерных векторных пространств, бесконечномерных векторных пространств.

Определение 8. *Базисом* (конечномерного) векторного пространства V называется всякая линейно независимая система векторов, через которую выражаются все векторы пространства V.

Задача 24. Докажите, что если $\{e_1,\dots,e_n\}$ — базис пространства V, то всякий вектор $x\in V$ однозначно выражается через $e_1,\dots,e_n$. Коэффициенты этого выражения называются *координатами* вектора x в базисе $\{e_1,\dots,e_n\}$.

Определение 9. Всякая система векторов (не обязательно линейно независимая), через которую линейно выражаются все векторы пространства V, называется *порождающей.*

Задача 25. Докажите, что в конечномерном векторном пространстве
а) всякая линейно независимая система векторов может быть дополнена до базиса (в частности, существует хотя бы один базис);
б) из всякой порождающей системы векторов можно выбрать базис.

Задача 26. Докажите, что все базисы конечномерного векторного пространства V содержат одно и то же число векторов.

Определение 10. Число векторов в базисе конечномерного пространства V называется *размерностью* пространства V и обозначается $\dim V$.

Линейность над $\mathbb{Z}_2$

Задача 27. а) На табло расположены лампочки. Есть несколько кнопок. Каждая кнопка меняет состояние соединенных с ней лампочек. Докажите, что число узоров, которые можно получить, нажимая на кнопки, есть степень двойки.

б)* Пусть для любого набора лампочек существует кнопка, соединенная с нечётным числом из них. Докажите, что все лампочки можно погасить.

в) Пусть лампочки образуют квадрат 4×4 и рядом с каждой лампочкой расположена кнопка, соединенная со всеми лампочками в том же столбце и в той же строке. Как изменить состояние ровно одной лампочки?

Задача 28. а) Докажите, что в дереве нет непустых подграфов, у которых степень каждой вершины четна.

б) Пусть a — число подграфов данного графа, у которых степень каждой вершины четна. Докажите, что число a — степень двойки.

в) На ребрах графа стоят знаки $+$ и $-$. Разрешается менять знак на всех ребрах, выходящих из одной вершины. Докажите, что из любого узора можно получить любой другой.

г) Пусть b — наибольшее количество узоров на данном графе, ни один из которых нельзя получить из другого операциями, описанными в предыдущем пункте. Докажите, что число b — степень двойки.

д)* Докажите, что для любого графа $a = b$.

Листок №34д. Элементарная математика 03.2006

Геометрия

Задача 1. В треугольнике ABC провели медиану BM. Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей, вписанных соответственно в треугольники ABM и MBC. Может ли случиться, что $r_1 = 2r_2$?

Задача 2. Точки A и B разбивают окружность на две дуги. Найдите геометрическое место середин всевозможных хорд, концы которых лежат на разных дугах AB.

Задача 3. Найдите все значения параметра $a > 0$ при которых неравенство $|ax + 2y - 5| + a|x + 2ay - 2| \leqslant 3a$ задает на координатной плоскости параллелограмм с внутренностью.

Задача 4. На плоскости, разграфлённой сеткой вертикальных и горизонтальных прямых на квадратные клетки, нарисован выпуклый многоугольник так, что все его вершины находятся в вершинах клеток, и ни одна из его сторон не вертикальна и не горизонтальна. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков сетки внутри многоугольника равна сумме длин горизонтальных отрезков сетки внутри многоугольника.

Задача 5. Окружность радиуса 1 находится внутри треугольника со сторонами 13, 14, 15. На окружности отметили точку, для которой сумма расстояний до сторон треугольника минимальна, а также точку, для которой эта сумма максимальна. Найдите расстояние между этими точками.

Задача 6. а) Докажите, что существует выпуклый 20-угольник, никакие три диагонали которого не проходят через одну точку (вершины исключаются).

б) На окружности отмечено 160000 различных точек. Докажите, что среди отмеченных точек найдутся вершины 20-угольника, удовлетворяющего условию пункта а).

Задача 7. Стороны пространственного четырёхугольника касаются некоторой сферы. Докажите, что точки касания лежат в одной плоскости.

Задача 8. Основание одной из высот некоторого тетраэдра совпадает с ортоцентром соответствующей грани. Докажите, что основания остальных высот этого тетраэдра также совпадают с ортоцентрами соответствующих граней.

Задача 9. **а)** Внутри треугольника ABC выбрали точку M и опустили из неё перпендикуляры MA_1, MB_1 и MC_1 на стороны BC, AC и AB соответственно. Оказалось, что для некоторого числа λ выполняются равенства $MA_1 = \lambda BC$, $MB_1 = \lambda AC$ и $MC_1 = \lambda AC$. Докажите, что $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = 0$.

б) Верна ли аналогичная задача для тетраэдра (перпендикуляры опускаем на грани тетраэдра, длины перпендикуляров пропорциональны площадям соответствующих граней)?

Задача 10. На рёбрах тетраэдра произвольным образом выбрали направления, после чего нашли сумму соответствующих векторов. Мог ли в результате получиться нулевой вектор?

Задача 11. В каждой боковой грани некоторой пятиугольной призмы есть угол α (среди углов этой грани). Найдите все возможные значения α.

Задача 12. **а)** Может ли параллельная проекция куба быть пятиугольником?

б) Может ли центральная проекция куба быть пятиугольником?

Задача 13. Верно ли, что каждая внутренняя точка любого выпуклого многогранника принадлежит какому-то отрезку, концы которого находятся на рёбрах этого многогранника?

Задача 14. Точка M лежит внутри (не на границе) прямоугольного параллелепипеда. Пусть O — одна из вершин параллелепипеда, OA, OB и OC — его ребра, выходящие из вершины O. Может ли сумма углов MOA, MOB и MOC равняться $180°$?

Задача 15. Сережа насыпал в цилиндрическую кастрюлю немного пшена и спросил соседку тётю Люду: «Сколько нужно налить воды, чтобы получилась вкусная каша?» «Это очень просто», — отвечала соседка. «Наклони кастрюлю; постучи, чтобы крупа пересыпалась и закрыла ровно половину дна. Теперь заметь точку на кастрюле, ближайшую к краю, до которой поднялась крупа, и зажми её пальцем! До этого уровня и надо налить воду.» «Так ведь пшена можно насыпать побольше и поменьше, да и кастрюли бывают разные — широкие и узкие», — усомнился Сережа. «Всё равно, мой способ годится в любом случае!»˜– гордо ответила тётя Люда.

а) Докажите, что тётя Люда права: отношение объемов воды и пшена по ее рецепту всегда получается одним и тем же.

б) Чему равно это отношение?

Задача 16. Докажите, что если в выпуклом многограннике из каждой вершины выходит чётное число рёбер, то в любом сечении его плоскостью, не проходящей ни через одну из его вершин, получится многоугольник с чётным числом сторон.

Задача 17. Для каждого прямоугольного параллелепипеда с длинами рёбер a, b и 1 обозначим через $s(a, b)$ количество кратчайших путей, идущих по поверхности этого параллелепипеда и соединяющих две его фиксированные диаметрально противоположные вершины. Найдите все возможные значения функции s, и для каждого такого значения s_0 нарисуйте на плоскости множество таких точек (a, b), что $s(a, b) = s_0$.

Задача 18. Есть несколько полосок (бесконечной длины), суммарная ширина которых меньше 1 см. Можно ли покрыть этими полосками круг диаметра 1 см?

Алгебра и анализ

Задача 19. Для натуральных чисел x и y число x^2+xy+y^2 в десятичной записи оканчивается нулем. Докажите, что оно оканчивается хотя бы двумя нулями.

Задача 20. Известно, что $a^3 + b^3$ делится на 391 (a, b — целые числа). Докажите, что $a + b$ делится на 391.

Задача 21. Решите в целых числах уравнение: $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2006$.

Задача 22. Число $n \in \mathbb{N}$ назовём *хорошим*, если найдётся такая перестановка x_1, x_2, ..., x_n чисел 1, 2, ..., n, что все числа x_1+1, x_2+2, ..., x_n+n — степени двойки. Найти все хорошие числа.

Задача 23. Известно, что среди членов некоторой арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ есть числа a_1^2, a_2^2 и a_3^2. Докажите, что эта прогрессия состоит из целых чисел.

Задача 24. Существуют ли такие натуральные числа n и k, что десятичная запись числа 2^n начинается числом 5^k, а десятичная запись числа 5^n начинается числом 2^k?

Задача 25. Известно, что число 2^{333} имеет 101 цифру и начинается с 1. Сколько чисел в ряду 2, 4, 8, 16, ..., 2^{333} начинается с 4?

Задача 26. Докажите, что число 2^n может начинаться с любой комбинации цифр.

Задача 27. На координатной плоскости нарисован выпуклый многоугольник. Известно, что на любом отрезке, концы которого лежат на сторонах многоугольника, находится не более n точек, все координаты которых — целые числа. Докажите, что внутри многоугольника (включая границу) находится не более n^2 точек, все координаты которых — целые числа.

Задача 28. Требуется раскрасить точки с целыми координатами в n цветов, чтобы точки каждого цвета образовывали квадратную сетку большего размера (одного и того же для всех цветов). Возможно ли это **а)** при $n=5$; **б)** при $n=7$; **в)** при $n=185$?

Задача 29. На координатной плоскости расположили треугольник так, что его сдвиги на векторы с целочисленными координатами не перекрываются. **а)** Может ли площадь такого треугольника быть больше $1/2$?
б) Найдите наибольшую возможную площадь такого треугольника.

Задача 30. Имеются два трёхлитровых сосуда. В одном — 1 л воды, в другом — 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полуторапроцентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?

Задача 31. Найдутся ли такие определённые на всей прямой функции $p(x)$ и $q(x)$, что $p(x)$ — четная функция, а $p(q(x))$ — нечётная функция (отличная от тождественно нулевой)?

Задача 32. Дано положительное число a. Известно, что неравенство $10 < a^x < 100$ имеет ровно 5 решений в натуральных числах x. Сколько решений в натуральных числах x может иметь неравенство $100 < a^x < 1000$?

Задача 33. Для каждого четного натурального n рассмотрим на плоскости фигуру F_n, заданную уравнением $2x^n + (3y)^n < 1$. Пусть F — объединение всех фигур F_1, F_2, ... Нарисуйте фигуру F. Какова ее площадь?

Задача 34. Докажите для любого натурального n равенство

$$[\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + \cdots + [\sqrt[n-1]{n}] + [\sqrt[n]{n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \cdots + [\log_{n-1} n] + [\log_n n].$$

Задача 35. Для каждого $x > 0$ обозначим через $f(x)$ количество десятичных знаков в целой части числа x. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} (f(\sqrt{n})/f(n))$.

Задача 36. Докажите, что на любом интервале встречается лишь конечное количество чисел вида x^x/y^y, где x, y — натуральные и $x > y$.

Задача 37. Запишем каждое число $x \in (0;1)$ в троичной системе счисления $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ (где среди цифр $a_1, a_2, a_3, \ldots$ нет бесконечного числа двоек подряд) и положим

$$f(x) = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \ldots$$

Будет ли так определённая функция f непрерывна на интервале $(0;1)$?

Задача 38. Оси двух цилиндров радиуса R пересекаются под углом α. Найдите объем пересечения этих цилиндров.

Листок №35д. **Колмогоровская сложность** 04.2006

конспект лекции 31.03.2006

Речь пойдёт о фундаментальном понятии в теории алгоритмов — колмогоровской сложности (другие названия — описательная сложность, дескриптивная сложность, алгоритмическая сложность, колмогоровская энтропия). Его окончательно сформулировал Колмогоров (а также независимо Соломонов и Чейтин) в своих работах 1965 года. Оно формализует интуитивное представление о количестве информации в конечных объектах. Мы ограничимся рассмотрением самых простых объектов — конечных слов из 0 и 1.

Интуитивно ясно, что строку «010101010101010101010101010101» можно описать короче — «15 слов 01», в то время как строку «1101110000111010011010011110010» никак существенно короче и не запишешь. Значит, в первой из них информации меньше, чем во второй, хотя они имеют одинаковую длину. Или, например, чтобы задать слово из миллиона нулей, достаточно сказать «1000000 нулей», и вовсе необязательно все эти нули выписывать. Более жизненный пример: часто при работе с файлами большого размера приходится использовать различные архиваторы — `zip`, `gzip`, `rar` и т. д. — для компрессии, то есть получения более короткого описания. Важно, что если потом разархивировать файл, то получится в точности исходный, и никакая информация не потеряется. Только такие способы описания мы и будем рассматривать. Неформально, количеством информации в слове назовём минимальную длину всевозможных его описаний.

Для формального определения описаний мы воспользуемся понятием алгоритма — интуитивное представление о том, что это такое, есть у каждого (например, программа на почти любом известном вам языке программирования — Pascal, C, C++, Java и т. д.). Мы ограничимся только рассмотрением декомпрессоров, то есть алгоритмов получения по описанию исходного слова (естественно потребовать, чтобы по любому слову декодирование происходило однозначно). *Способом описания* (или *декомпрессором*) будем называть произвольную вычислимую с помощью алгоритма функцию D на множестве A всех двоичных слов (включая пустое слово Λ): $A = \{\Lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$. Значения функции D тоже лежат в A. Однако это ограничение можно обойти, и распространить D на многие другие конечные объекты. Для этого можно рассматривать какое-нибудь их кодирование двоичными словами. Мы разрешаем вычислимым функциям быть неопределёнными на некоторых словах (возможно, даже на всех) — содержательно это означает, что соответствующая программа не завершает работу (зацикливается) на некоторых входах.

Через $|x|$ обозначим длину слова $x \in A$.

Определение 1. Назовём

$$K_D(x) = \min\{|y| : D(y) = x\}$$

сложностью слова x *относительно способа описания* D. (Мы считаем $\min\varnothing = +\infty$.)

Задача 1. Какая сложность будет у слов при следующем способе описания? **а)** $\forall y \in A\ D(y) = \Lambda$; **б)** $\forall n \in \mathbb{N}\ D(\mathrm{bin}(n)) = \underbrace{00\dots0}_{n}$ (здесь $\mathrm{bin}(n)$ — двоичная запись числа n); **в)** $\forall y \in A\ D(y) = y$.

Определение сложности очень сильно зависит от способа описания. Подбирая такой способ, мы можем сделать очень маленькой сложность любого конкретного слова или даже семейства слов. Наша задача — выбрать оптимальный способ, адекватный для всех слов одновременно. Естественно считать, что способ описания тем лучше, чем более короткие описания он даёт.

Определение 2. Способ описания D_1 *не хуже* способа D_2, если для некоторой константы C и для всех слов x имеем

$$K_{D_1}(x) \leqslant K_{D_2}(x) + C.$$

Мы будем пренебрегать различием на константу. Конечно, было бы лучше всю теорию строить точно, но этого сделать не удаётся.

Прежде чем строить наилучший способ описания, начнём с малого. Пусть есть два способа описания D_1 и D_2. Как построить способ D не хуже каждого из них? Положим

$$D(0y) = D_1(y),\ D(1y) = D_2(y).$$

Таким образом, учитываются сразу оба способа описания. Чтобы потом можно было декодировать полученное описание, приписываем к нему информацию о том, каким способом оно было получено — первым или вторым.

Задача 2. Проверьте, что $K_D(x) \leqslant K_{D_1}(x) + 1$ и $K_D(x) \leqslant K_{D_2}(x) + 1$ для любого x.

Обобщив эту идею, мы можем построить такой оптимальный способ описания D, что для любого другого способа D' существует такая константа $C_{D'}$, что для любого слова x имеем

$$K_D(x) \leqslant K_{D'}(x) + C_{D'}$$

(это утверждение называется теоремой Соломонова–Колмогорова). Действительно, мы можем учитывать все имеющиеся способы записи одновременно, просто в начале записывать, какой способ использовался. Положим

$$D(py) = p(y),$$

где p — произвольный алгоритм (записанный двоичным кодом). Ясно тогда, что D хуже способа описания, задаваемого программой p, не более чем на константу — длину текста программы p. Таким образом, когда D подают на вход текст, он выделяет из его начала текст программы, а потом применяет эту программу к оставшемуся тексту.

Однако возникает проблема. Пусть, например, нам дают слово 01. Мы не знаем, применять ли программу 0 к слову 1 или программу 01 к пустому слову (или, может быть, программу с пустым текстом Λ к слову 01). Поэтому мы должны придумать такое описание py, чтобы однозначно выделять из него p. Это несложно: например, будем удваивать каждый символ слова p, а по его окончании вставим 01. Например, если $p = 011001$ и $y = 01001$, то получим код 0011110000110101001.

Задача 3. а) Этот способ кодирования слов x и y одним словом даёт оценку $2|x| + |y| + 2$ на длину кода. Как можно было бы эту оценку улучшить (например, получить оценку $|x| + |y| + 2\log|x| + 2$ или $|x| + |y| + \log|x| + 2\log\log|x| + 2$, и т. д.)?

б) Можно ли придумать способ кодировать словом длины $|x| + |y| + c$, где c — константа[5)]?

Оптимальный способ описания построен.

Определение 3. Фиксируем некоторый оптимальный способ описания D. Назовём

$$K(x) = \min\{|y| : D(y) = x\}$$

колмогоровской сложностью слова x.

Задача 4. Докажите, что замена оптимального способа описания в этом определении на другой (оптимальных может быть много) приводит к изменению функции сложности не более чем на константу.

Задача 5. Докажите, что колмогоровская сложность любого слова конечна.

В силу произвола в выборе оптимального способа описания в определении все утверждения про колмогоровскую сложность носят асимптотический характер. Рассмотрим пример: как может меняться сложность слова при приписывании к нему символа 1? Ясно, что от этого количество информации в слове меняется не существенно. Можно доказать, что $K(1x) = K(x) + O(1)$. (Здесь $O(1)$ обозначает функцию от x, ограниченную константой.) Неформально, для этого достаточно показать, что можно по каждому из слов x и $1x$ легко получать другое не используя дополнительной информации.

[5)]Здесь всюду под $\log$ подразумевается $\log_2$.

Задача 6. **а)** Проведите последнее рассуждение формально.
б) Докажите, что $K(xx) = K(x) + O(1)$.
в) Докажите, что $K(\underbrace{00\ldots0}_{n}) \leqslant \log n + O(1)$.

Задача 7. Докажите, что $K(x) \leqslant |x| + O(1)$.

Задача 8. Пусть P — произвольный алгоритм. Докажите, что $K(P(x)) \leqslant K(x) + O(1)$.

Задача 9. **а)** Покажите, что если описания рассматривать не в бинарном алфавите, а в алфавите из 4 символов, то сложность уменьшится вдвое.
б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для перехода к произвольному конечному алфавиту.

Оказывается, что неравенство в задаче 7 для большинства слов близко к равенству. Действительно, давайте посчитаем, сколько слов может иметь сложность меньше некоторого фиксированного числа n. Слов сложности 0 не более одного — оно должно иметь описание Λ, слов сложности 1 не более двух — их описания могут быть только 0 и 1, и так далее. Поэтому слов сложности меньше n не больше, чем $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Таким образом, для любого натурального n существует менее 2^n слов x, для которых $K(x) < n$. Отсюда легко получаем, что доля слов сложности менее $n - c$ среди всех слов длины n меньше $\frac{2^{n-c}}{2^n} = 2^{-c}$. Например, доля слов сложности меньше 90 среди слов длины 100 меньше $\frac{1}{1024}$, то есть меньше 0,1%. Таким образом, большинство слов несжимаемы или почти несжимаемы.

Удивительно, что в полученном утверждении — существует менее 2^n слов сложности меньше n — нет никаких констант.

Задача 10. Где в этом утверждении зависимость от фиксированного в определении колмогоровской сложности оптимального способа описания?

Задача 11. Покажите, что для некоторого фиксированного c и всех n количество слов сложности меньше n заключено между 2^{n-c} и 2^n.

Задача 12. Покажите, что среднее арифметическое сложностей всех слов длины n равно $n + O(1)$.

Задача 13. **а)** Докажите, что если y получено из слова x длины n заменой одного символа, то $K(y) = K(x) + O(\log n)$.
б) Может ли тем не менее $K(y)$ существенно отличаться от $K(x)$ (например, в 1000 раз)?

Задача 14. Докажите, что $K(xy) \leqslant K(x) + K(y) + 2\log K(x) + O(1)$.

Задача 15. **а)** Докажите, что $K(x,y) \leqslant K(x) + K(y) + O(\log n)$ для любых x и y длины не более n (здесь под парой слов x, y понимается её кодирование двоичным словом в некоторой раз навсегда выбранной стандартной кодировке).
б) Можно ли доказать неравенство $K(x,y) \leqslant K(x) + K(y) + O(1)$? Указание: можно ли доказать $K(x,y) \leqslant |x| + |y| + O(1)$?
в) Как соотносятся между собой $K(x,y)$ и $K(xy)$?

Задача 16. **а)** Докажите $2K(xyz) \leqslant K(xy) + K(xz) + K(yz) + O(\log n)$ для всех слов x, y, z длины не более n.
б) Пусть тело в трёхмерном пространстве имеет объём V, а площади его ортогональных проекций на плоскости xOy, xOz и yOz (в прямоугольной системе координат) равны соответственно S_{xy}, S_{xz} и S_{yz}. Докажите неравенство $V^2 \leqslant S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz}$.

Было бы очень полезно уметь вычислять $K(x)$. Это можно пытаться делать следующим образом. Возьмём программу вычисления оптимального способа описания. Вычислим её на пустом слове. Если получилось x, значит, $K(x) = 0$. Если нет, вычислим на словах 0 и 1. Если на каком-то из них программа выдала x, значит, $K(x) = 1$. И так далее: если мы уже знаем, что $K(x) > n - 1$ и нашлось слово длины n, на котором программа выдаёт x, значит, $K(x) = n$. Однако есть проблема: уже на первом шаге, пытаясь применить программу к пустому слову, мы можем столкнуться с трудностью — программа может не завершить работу. И до всего следующего дело уже не дойдёт.

Задача 17. Покажите, что оптимальный способ описания — не всюду определённая функция.

Утверждение этой задачи может показаться странным, ведь если способ описания определён не всюду, мы можем доопределить его в некоторых точках — ясно, что от этого он может только улучшиться. Однако формального противоречия здесь нет (только философское) — чтобы функция осталась вычислимой, её можно доопределить лишь в конечном количестве точек.

В заключение приведём любопытное рассуждение, показывающее, что вычислять функцию $K(x)$ не удаётся (ни вышеприведённым способом, ни каким-либо другим).

Пусть алгоритмически вычислимая функция f оценивает снизу колмогоровскую сложность, то есть $f(x) \leqslant K(x)$ для любого x. Покажем, что такая оценка может быть только тривиальной: для некоторого C и для всех x выполнено $f(x) \leqslant C$. Предположим обратное — пусть f не ограничена. Пользуясь этим, построим следующий алгоритм P. Получив на вход натуральное число n, он запускает одновременно алгоритм для вычисления f на всех словах (отдельный вопрос — как запускать одновременно счётное число программ; обдумайте этот вопрос самостоятельно). Время от времени на каких-то из слов алгоритм выдаёт ответ, и мы можем проверить, верно ли для этого слова x, что $f(x) \geqslant n$. Поскольку по предположению f не ограничена, обязательно когда-нибудь найдётся слово, для которого это неравенство действительно выполнено. Первое найденное такое слово алгоритм P и выдаёт в качестве ответа.

Имеем $f(P(n)) \geqslant n$, а значит, и $K(P(n)) \geqslant n$. С другой стороны, по задаче 8 имеем $K(P(n)) \leqslant K(n) \leqslant \log n + O(1)$. Неравенство $\log n + O(1) \geqslant n$ нарушается при достаточно больших n — противоречие.

Чтобы доказать невычислимость функции K, осталось заметить, что она является собственной оценкой снизу.

Задача 18. Докажите, что функция, равная на слове x какому-нибудь его кратчайшему описанию (при оптимальном способе описания), не вычислима алгоритмически. (Именно поэтому мы ограничиваемся рассмотрением декомпрессоров. Рассматривать компрессоры бессмысленно.)

Задача 19. Существует ли алгоритм, которому можно на вход подать тексты двух программ, задающих способы описания D_1 и D_2, про которые известно, что D_1 не хуже D_2, и этот алгоритм выдаст константу в неравенстве $K_{D_1}(x) \leqslant K_{D_2}(x) + C$ из определения?

Задача 20. Пусть $B(n) = \min\{N \in \mathbb{Z} : \forall m > N\ K(m) > n\}$ (регулятор сходимости $K(m)$ к ∞). Тогда для любой алгоритмически вычислимой функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ почти для всех n верно $B(n) \geqslant f(n)$ (то есть B растёт быстрее любой вычислимой функции!).

Задача 21. Пусть $0 < \alpha < 1$. **а)** Докажите, что существуют сколь угодно длинные слова, у которых каждое начало x имеет сложность $K(x) > \alpha|x| + O(1)$.

б) Докажите, что существуют сколь угодно длинные слова, у которых каждое подслово x сложно: $K(x) > \alpha|x| + O(1)$.

Листок №36д. Распределение простых чисел 04.2006

В этом листке мы будем часто использовать следующие обозначения:
p_n — n-е простое число ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \dots$);
P — множество всех простых чисел ($P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$);
$\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих $x \in \mathbb{N}$;
$\log x$ — двоичный логарифм x (т. е. $\log_2 x$).

* * *

Задача 1. Докажите, что при $n \in \mathbb{N}$ **а)** $p_{n+1} \leqslant p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$; **б)** $p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.

Задача 2. Докажите, что $\pi(x) \geqslant \log\log x$ при $x \geqslant 2$.

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Определим функцию $F^n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом: F^n есть количество натуральных чисел, не превосходящих x, все простые делители которых принадлежат множеству $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

Задача 3. **а)** Найдите $F^3(57)$; **б)** Найдите $F^n(x)$ при $x < p_{n+1}$.

Задача 4. Докажите, что $F^n(x) \leqslant 2^n \cdot \sqrt{x}$.

Задача 5. Докажите следующие утверждения:

а) простых чисел бесконечно много; **б)** $\pi(x) \geqslant 0,5 \cdot \log x$; **в)*** ряд $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots$ расходится.

* * *

Задача 6. Докажите следующие утверждения:

а) $\prod\limits_{\substack{n<p\leqslant 2n,\\ p\in P}} p < C_{2n}^n < 2^{2n}$; **б)** $\prod\limits_{\substack{n+1<p\leqslant 2n+1,\\ p\in P}} p < C_{2n+1}^n < 2^{2n}$; **в)** $\prod\limits_{\substack{p\leqslant x,\\ p\in P}} p < 2^{2x}$.

Задача 7. Докажите следующие утверждения:

а) $(\pi(x) - \pi([\sqrt{x}])) \cdot \log\sqrt{x} < 2x$;

б) существует такое $c_1 \in \mathbb{R}$, что $\pi(x) \leqslant c_1 \cdot \dfrac{x}{\log x}$ при $x \geqslant 2$.

Задача 8. Пусть $n \in \mathbb{N}$, p — простое число. Докажите, что p входит в каноническое разложение числа $n!$ в степени $\sum\limits_{i=1}^{m} [n/p^i]$, где $m = [\log_p n]$.

Задача 9. Пусть p — простое число, α_p — степень, в которой p входит в каноническое разложение числа C_{2n}^n. Докажите, что $\alpha_p \leqslant [\log_p 2n]$.

Задача 10. Докажите следующие утверждения: **а)** $\dfrac{2^{2n}}{2n+1} \leqslant C_{2n}^n$; **б)** $C_{2n}^n \leqslant \prod\limits_{\substack{p\leqslant 2n,\\ p\in P}} p^{[\log_p 2n]}$.

Задача 11. Докажите следующие утверждения:

а) $2n - \log(2n+1) \leqslant \pi(2n) \cdot \log 2n$;

б) существует такое положительное $c_2 \in \mathbb{R}$, что $\pi(x) \geqslant c_2 \cdot \dfrac{x}{\log x}$ при $x \geqslant 2$.

* * *

Задача 12*. Докажите, что для всякого достаточно большого $x \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$0{,}9 \cdot \frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant 4{,}1 \cdot \frac{x}{\log x}.$$

Задача 13*. Докажите, что при всяком достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ между n и $5n$ обязательно найдется простое число.

Задача 14. В обозначениях задачи 9 докажите следующие утверждения:

а) $\alpha_p \leqslant 1$ при $p > \sqrt{2n}$; **б)** $\alpha_p = 0$ при $2n/3 < p \leqslant n$.

Задача 15*. (*Постулат Бертрана*) Докажите, что при всяком достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ между n и $2n$ обязательно найдется простое число.

Глава 3.

Контрольные мероприятия

Самостоятельная работа по комбинаторике 10.2003

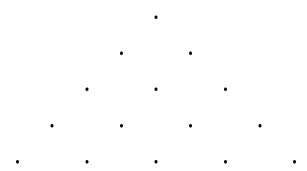
Вариант 1, 13.10.2003

Задача 1. Сколькими способами из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 можно выбрать два числа так, чтобы они не были соседями?

Задача 2. После уроков 12 школьников решили разделиться на две компании: первая отправится на прогулку по городу, а вторая — на дополнительное занятие по географии. Сколькими способами можно сделать такое разделение?

Задача 3. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске две белые и две чёрные ладьи так, чтобы белые не били чёрных? (Ладьи одного цвета неразличимы. Вращать доску нельзя.)

Задача 4. Сколькими способами из пятнадцати различных цветков можно составить три букета: один — из трех цветков, другой — из пяти, третий — из семи?



Задача 5. Справа изображена сеть дорог. Из вершины выходят 2^{10} человек. Половина идёт направо, половина — налево. Дойдя до первого перекрёстка, каждая группа делится: половина идет направо, половина — налево. Такое же разделение происходит на каждом перекрёстке. Сколько людей придёт в каждый из перекрёстков десятого ряда?

Для получения оценки 5 достаточно полностью решить любые 4 задачи.

Дополнительная задача

Задача 6*. На окружности отмечены 10 точек. Сколько можно провести незамкнутых несамопересекающихся ломаных с вершинами во всех этих точках?

Вариант 2, 30.10.2003

Задача 7. У Пети есть 5 книг по математике, а у Васи — 7 (все книги разные). Сколькими способами они могут обменяться тремя книгами (три книги одного на три книги другого)?

Задача 8. Сколько существует шестизначных чисел, в которых хотя бы 2 цифры совпадают?

Задача 9. **а)** Сколькими способами можно разложить в два разных кармана 9 монет различного достоинства? **б)** Тот же вопрос, но карманов 3.

Задача 10. Докажите тождество: $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \dots + C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m}^{m-1}$.

Задача 11. Дана белая клетчатая доска размером 10×10 клеток. Сколькими способами можно окрасить несколько клеток этой доски в черный цвет так, чтобы получился черный прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам доски?

Для получения оценки 5 достаточно полностью решить любые 4 задачи.

Самостоятельная работа по теме «Целые числа» 12.2003

Задача 1. Какие натуральные числа имеют ровно три натуральных делителя?

Задача 2. Пусть a и b — натуральные числа. Обязательно ли **а)** числа a и $b/(a,b)$ взаимно просты; **б)** либо числа a и $b/(a,b)$ взаимно просты, либо числа b и $a/(a,b)$ взаимно просты?

Задача 3. Сколько двоек в разложении числа $1001 \cdot 1002 \cdot \ldots \cdot 2000$ на простые множители?

Задача 4. Число n натуральное. Обозначим через k наименьшее целое число, которое больше 1 и взаимно просто с каждым из чисел $1, 2, \ldots, n$. Докажите, что k существует и является простым.

Задача 5. Найдите все целые числа, которые при делении на 3 дают остаток 2, а при делении на 5 дают остаток 3 (и докажите, что других нет).

Задача 6. При каких натуральных k число $(k-1)!$ не делится на k?

Задача 7. Числа a и b натуральные, $(a,b) = d$. Сколько решений в натуральных числах x, y имеет уравнение $ax + by = ab$?

Для получения оценки 5 достаточно полностью решить любые 6 задач.

Дополнительная задача

Задача 8. Натуральные числа m и n взаимно просты. Дробь $\dfrac{m+2003n}{2003m+n}$ можно сократить на число k. Каково наибольшее возможное значение k?

Самостоятельная работа по теме «Множества» 26.02.2004

Задача 1. Сколько есть взаимно однозначных соответствий между двумя множествами из n элементов?

Определение 1. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение, $A \subset X$, $B \subset Y$.
Образом множества $A \subset X$ при отображении f называют множество $\{f(x) \mid x \in A\}$ (обозначение: $f(A)$).
Прообразом множества $B \subset Y$ называют множество $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ (обозначение: $f^{-1}(B)$).

Задача 2. Пусть $f\colon X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$. Всегда ли верно, что

а) $f(X) = Y$; **б)** $f^{-1}(Y) = X$;
в) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; **г)** $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$;
д) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; **е)** $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
ж) если $f(A_1) \subset f(A_2)$, то $A_1 \subset A_2$; **з)** если $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$, то $B_1 \subset B_2$.

Задача 3. Любое ли счётное множество можно разбить на три непересекающихся счётных множества?

Задача 4. Из бесконечного множества M удалили некоторое счётное множество и получили бесконечное множество M'. Докажите, что M и M' равномощны.

Задача 5. В ящике A счётное число орехов, а ящики B и C пустые. Коля берёт 10 орехов из ящика A и перекладывает их в ящик B, после чего Петя берёт один орех из ящика B и перекладывает его в ящик C. Сколько орехов может оказаться в каждом из ящиков в результате бесконечного числа таких действий?

Задача 6. Пусть при отображении множеств $f\colon A \to B$ в каждый элемент $b \in B$ отображается непустое **а)** конечное; **б)** конечное или счётное множество элементов из A. Верно ли, что A счётно тогда и только тогда, когда B счётно?

Задача 7. Установите взаимно однозначное соответствие между окружностью и границей треугольника.

Задача 8. Равномощно ли множество иррациональных чисел множеству всех действительных чисел?

Задача 9. Счётно ли множество корней квадратных трёхчленов с рациональными коэффициентами?

Задача 10. Докажите, что множество прямых на плоскости равномощно множеству точек этой плоскости.

Задачи к зачёту по листкам 8 – 13 05.2004

Множества

Задача 1. Докажите, что количество троек целых чисел $(x;y;z)$, которые удовлетворяют условию $0 < x < y < z < 21$, равно количеству троек целых чисел $(a;b;c)$, удовлетворяющих условию $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 17$.

Задача 2. Счётно ли множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц, в которых число нулей конечно?

Задача 3. Счётно ли множество конечных последовательностей из целых чисел?

Задача 4. Рассмотрим на клетчатой плоскости всевозможные замкнутые несамопересекающиеся ломаные, звенья которых идут по сторонам клеток. Счётно ли множество таких ломаных?

Задача 5. Рассмотрим на клетчатой плоскости всевозможные несамопересекающиеся ломаные, звенья которых идут по сторонам клеток, с началом в точке $(0;0)$ и концом в точке $(1;1)$. Счётно ли множество таких ломаных?

Задача 6. Множество A бесконечно, а множество B счётно. Равномощны ли множества $A \cup B$ и A?

Задача 7. Верно ли, что любое подмножество прямой равномощно некоторому подмножеству отрезка?

Задача 8. Докажите, что множество точек любого треугольника (с внутренностью) на плоскости равномощно множеству точек любого прямоугольника (с внутренностью) на плоскости.

Задача 9. Равномощно ли отрезку множество точек $[0;1] \cup [2;3] \cup [4;5] \cup \ldots$?

Задача 10. Множество A счётно, а множество B равномощно отрезку. Докажите, что множество $A \times B$ равномощно отрезку.

Задача 11. Равномощно ли прямой множество точек плоскости, у которых координата x целая?

Задача 12. Равномощно ли множество всех лучей множеству всех окружностей (на плоскости)?

Задача 13. Докажите, что множество точек плоскости, у которых координата x неотрицательна, равномощно множеству всех точек плоскости.

Задача 14. Счётно ли множество всевозможных возрастающих бесконечных последовательностей из целых чисел?

Задача 15. Равномощны ли множество всевозможных бесконечных последовательностей из целых чисел и множество всевозможных возрастающих бесконечных последовательностей из целых чисел?

Задача 16. Счётно ли множество способов разрезать бесконечную клетчатую плоскость на две части (резать можно только по сторонам клеток)?

Задача 17. Пусть A — множество всех бесконечных последовательностей из нулей и единиц. Докажите, что множества A и $A \times A$ равномощны.

Задача 18. Докажите, что множество всех лучей на плоскости равномощно множеству точек отрезка.

Задача 19. Докажите, что множество всевозможных отрезков на плоскости равномощно множеству точек отрезка.

Задача 20. Докажите, что множество всех окружностей на плоскости равномощно множеству точек отрезка.

Задача 21. Докажите, что множество точек куба (со внутренностью) равномощно множеству точек отрезка.

Задача 22. Докажите, что множество конечных последовательностей, элементами которых являются действительные числа, равномощно множеству действительных чисел.

Задача 23. Докажите, что множество бесконечных последовательностей действительных чисел равномощно множеству действительных чисел.

Неравенства и оценки

Задача 24. Найдите наименьшее значение выражения $5a + 4/a$ при $a > 0$. При каких a оно достигается?

Задача 25. Найдите наименьшее значение выражения $3a^2 + 2/a^2$ при $a \neq 0$. При каких a оно достигается?

Задача 26. Докажите, что при всех натуральных n и при всех неотрицательных a выполнено неравенство

$$(1+a)^n \geqslant 1 + a \cdot n + a^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + a^3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Задача 27. Верно ли, что $3^n + n^{10} > 2^n + n^{1000}$ при $n \gg 0$?

Задача 28. Верно ли, что $10 \cdot n! + 100^n < n^n + 2^n$ при $n \gg 0$?

Задача 29. Каких 100-значных чисел больше: содержащих в своей десятичной записи 7 или остальных?

Задача 30. Что больше при натуральных $n \gg 0$: $99^n + 100^n$ или 101^n?

Задача 31. Укажите такое натуральное n, что $n \cdot (0{,}99)^n < 0{,}01$.

Задача 32. Что больше: 1000^{1000} или 1001^{999}?

Задача 33. Найдите такое натуральное число N, что при всех целых $k > N$ выполняется неравенство $100 \cdot k^5 + k^3 + 1000 < k^6$.

Задача 34. Найдите такое натуральное число C, что при всех натуральных k выполняется неравенство $k^3 - 5 \cdot k^2 + 12 \cdot k + 41 < C \cdot k^4$.

Задача 35. Докажите, что при $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} \geqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Задача 36. Верно ли, что при $n \gg 0$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geqslant 1000?$$

Задача 37. При каком натуральном n величина $\dfrac{n^2}{(1,1)^n}$ принимает наибольшее значение?

Задача 38. Дано 10 чисел. Известно, что модуль суммы любых двух из этих чисел меньше 2. Верно ли, что модуль суммы любых трёх из этих чисел меньше 3?

Задача 39. Сколько цифр в десятичной записи числа 2^{40}?

Задача 40. Сколько цифр в десятичной записи числа 2^{100}?

Задача 41. Решите в натуральных числах x, y уравнение $x^3 + 4x^2 + 1 = y^3$.

Задача 42. Имеет ли уравнение $x^x + y^y = z^z$ решение в натуральных числах x, y, z?

Задача 43. Решите в натуральных числах $(x; y; z)$ уравнение $xy + yz + xz = xyz + 2$.

Последовательности и пределы

Задача 44. Последовательность (x_n) неограничена, причём $x_n > 0$ при всех натуральных n. Обязательно ли последовательность $(1/x_n)$ бесконечно малая?

Задача 45. Последовательности (a_n) и (b_n) таковы, что последовательность $(a_n b_n)$ бесконечно малая. Обязательно ли тогда хотя бы одна из последовательностей (a_n), (b_n) бесконечно малая?

Задача 46. Даны две последовательности: (x_n) и (y_n). Известно, что последовательность $x_n^2 + y_n^2$ бесконечно малая. Докажите, что каждая из последовательностей (x_n) и (y_n) бесконечно малая.

Задача 47. Известно, что у последовательности $(a_n + b_n)$ есть предел. Обязательно ли тогда (a_n) и (b_n) имеют пределы?

Задача 48. Последовательности (a_n) и $(a_n b_n)$ имеют пределы. Обязательно ли тогда (b_n) имеет предел?

Задача 49. Все элементы некоторой последовательности являются целыми числами. Докажите, что она имеет предел тогда и только тогда, когда все её члены, начиная с некоторого, одинаковы.

Задача 50. Известно, что последовательности (x_n) и (y_n) имеют предел. Составим последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$. Когда такая последовательность имеет предел?

Задача 51. Найдите предел последовательности (x_n), где $x_n = \sqrt[n]{2}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Задача 52. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \cdot \sin n}{n^2 + 1}$.

Задача 53. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n + \sqrt{n}) \cdot \cos n}{n^2 + 4n - 2}$.

Задача 54. На графике функции $y = x^2$ рассмотрим точки A_n и B_n с абсциссами $-1/n$ и $1/n$ соответственно. Пусть M_n — центр окружности, проведенной через точки A_n, B_n и начало координат. Докажите, что последовательность точек (M_n) имеет предел и найдите его.

Задача 55. На гиперболе $xy = 1$ взяты точки A_n и B_n с абсциссами $n/(n + 1)$ и $(n + 1)/n$ соответственно $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Пусть M_n — центр окружности, проходящей через точки A_n, B_n и вершину гиперболы. К какой точке плоскости стремится последовательность (M_n)?

Задача 56. При каких натуральных k выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2003}}{(n+1)^k - n^k} = \dfrac{1}{2004}$?

Задача 57. При каких натуральных k выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k - (n-1)^k}{n^{2003}} = 2004$?

Задача 58. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n})$.

Задача 59. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + n^3}{3^n + n^2}$.

Задача 60. Найдите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + 9^n}$.

Задача 61. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!}$.

Задача 62. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2$, осью абсцисс и прямыми $x = 1$ и $x = 2$.

Задача 63. Последовательность (a_n) состоит из ненулевых членов и имеет предел 0. Известно, что последовательность $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ имеет предел α. Найдите все возможные значения α.

Задача 64. Последовательность (x_n) строится по следующему закону: первый член выбирается произвольно, а каждый следующий выражается через предыдущий по формуле $x_{n+1} = ax_n + 1$. При каких a последовательность (x_n) обязательно будет иметь предел?

Задача 65. Найдите предел последовательности (a_n), если $a_1 = 0$ и $a_{n+1} = (a_n + 3)/4$ при $n \in \mathbb{N}$.

Задача 66. На отрезке AB строится последовательность точек (M_n) по следующему правилу: $M_1 = A$, $M_2 = B$, M_{n+2} — середина отрезка M_nM_{n+1} при $n \in \mathbb{N}$. К какой точке AB стремится (M_n)?

Задача 67. Первые два члена последовательности равны 0 и 1, а каждый следующий есть среднее арифметическое двух предыдущих. Найдите предел этой последовательности.

Задача 68. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$.

Задача 69. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$.

Задача 70. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2+3-\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Задача 71. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n\cdot(n+1)}{n^3}$.

Задача 72. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt{n^2+1}-n)$.

Задачи к зачёту по темам «Действительные числа» и «Непрерывность» 01.02.2005

Задача 1. **а)** Докажите, что множество чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, с обычными операциями сложения и умножения чисел, является полем. **б)** Полное это поле или нет?

Задача 2. Существует ли поле из шести элементов?

Задача 3. Последовательность имеет предел. Докажите, что один из элементов этой последовательности совпадает либо с точной верхней гранью множества $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, либо с точной нижней гранью этого множества.

Задача 4. Имеет ли предел последовательность (x_n), где при $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)?$$

Задача 5. На отрезке отметили бесконечное множество точек. Докажите, что на этом отрезке найдётся точка x, удовлетворяющая следующему условию: «любая окрестность точки x содержит бесконечно много отмеченных точек».

Задача 6. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$.

Задача 7. Пусть $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Ограничена ли последовательность (a_n)?

Задача 8. На плоскости дано некоторое (бесконечное) множество прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат. Известно, что любые два из них имеют общую точку. Обязательно ли существует точка, принадлежащая всем прямоугольникам?

Определение 1. Говорят, что y_n — *подпоследовательность* последовательности (x_n), если найдётся такая монотонно возрастающая последовательность (k_n) натуральных чисел, что $y_n = x_{k_n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Задача 9. Докажите, что из всякой ограниченной последовательности (x_n) можно выбрать подпоследовательность, которая имеет предел.

Задача 10. Верно ли, что любая последовательность имеет монотонно неубывающую подпоследовательность или монотонно невозрастающую последовательность?

Задача 11. На плоскости дана последовательность $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ вложенных прямоугольников (стороны которых не обязательно параллельны осям координат). Обязательно ли существует точка, принадлежащая всем прямоугольникам?

Задача 12. Функция f определена на отрезке $[0;1]$, причём $f(0) \geqslant 0$, $f(1) \leqslant 0$. Докажите, что найдутся такие различные точки a и b на этом отрезке, что $|a-b| < 0{,}001$ и $f(a) \geqslant 0$, $f(b) \leqslant 0$.

Задача 13. Школьник на зачёте дал такое определение непрерывности функции $f(x)$ в точке a: «существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ и для любого $x \in (a-\delta, a+\delta)$ выполнено $|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$».

а) Будет ли «непрерывной» при таком определении в каких-либо точках функция $f(x) = x^2$?

б) Какое свойство функции описано этим определением?

Задача 14. Даны функция $f(x)$, непрерывная на всей прямой $\mathbb{R}$, и число $k > 0$. Определим функцию $g(x)$ следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} k, & \text{если } f(x) > k; \\ f(x), & \text{если } |f(x)| \leqslant k; \\ -k, & \text{если } f(x) < -k. \end{cases}$$

Докажите, что $g(x)$ непрерывна на всей прямой $\mathbb{R}$ (функция g называется «срезкой» функции f).

Задача 15. Пусть f непрерывна на $\mathbb{R}$, и пусть уравнение $f(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет корней.

Задача 16. Функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает некоторое значение дважды (на этом отрезке). Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки $x_1, x_2 \in [a;b]$, что $|x_1-x_2| < \varepsilon$ и $f(x_1) = f(x_2)$.

Задача 17. Функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и принимает все действительные значения. Докажите, что f либо строго монотонна на $\mathbb{R}$, либо принимает какое-то значение трижды.

Задача 18. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $(a;b)$ — любая точка на координатной плоскости. Докажите, что среди всех точек графика функции f найдётся такая, расстояние от которой до точки (a,b) минимально (то есть не больше, чем расстояние от любой другой точки графика f до $(a;b)$).

Задача 19. Запишем каждое $x \in (0;1)$ в десятичной системе счисления $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ (без бесконечного числа девяток подряд), и положим $f(x) = 0{,}0a_10a_20a_3\ldots$. Будет ли f непрерывна на $(0;1)$?

Задача 20. Запишем каждое $x \in (0;1)$ в троичной системе счисления: $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ (без бесконечного числа двоек подряд), и положим $f(x) = a_1/10 + a_2/10^2 + a_3/10^3 + \ldots$. Будет ли f непрерывна на $(0;1)$?

Задача 21. Пусть функция f определена на $\mathbb{R}$. Для каждого интервала $I \subset \mathbb{R}$ назовем *колебанием функции f на интервале I* число $\omega_I(f) = \sup\{f(x) \mid x \in I\} - \inf\{f(x) \mid x \in I\}$. *Колебанием функции f в точке a* назовем число $\omega_a(f) = \inf\{\omega_I \mid I \subset \mathbb{R},\ a \in I\}$. Докажите, что f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $\omega_a(f) = 0$.

Задача 22*. Попарно различные лучи OA, OB и OC и многоугольник M лежат в одной плоскости. Докажите, что существует такой параллельный перенос T, что лучи OA, OB и OC разбивают многоугольник $T(M)$ на три равновеликие части.

Контрольная работа по листкам 17 – 20

01.02.2005

Задача 1. **а)** Докажите, что множество чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, с обычными операциями сложения и умножения чисел, является полем. **б)** Полное это поле или нет?

Задача 2. На плоскости дано некоторое (бесконечное) множество прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат. Известно, что любые два из них имеют общую точку. Обязательно ли существует точка, принадлежащая всем прямоугольникам?

Задача 3. График функции $f(x)$ изображён на рис. 3.1. Нарисуйте график функции $f\left(\dfrac{|x-3|}{2}+1\right)$.

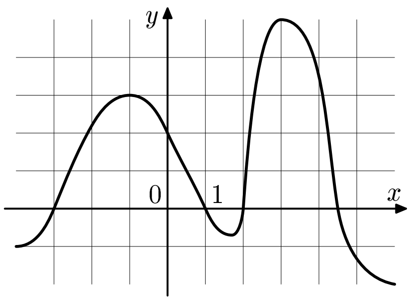


Рис. 3.1.

Задача 4. Функция f определена на отрезке $[0;1]$, причём $f(0) \geqslant 0$, $f(1) \leqslant 0$. Докажите, что найдутся такие различные точки a и b на этом отрезке, что $|a-b| < 0{,}001$ и $f(a) \geqslant 0$, $f(b) \leqslant 0$.

Задача 5. Школьник на зачёте дал такое определение непрерывности функции $f(x)$ в точке a:
«существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ и для любого $x \in (a-\delta, a+\delta)$ выполнено $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$».
а) Будет ли «непрерывной» при таком определении в каких-либо точках функция $f(x) = x^2$?
б) Какое свойство функции описано этим определением?

Задача 6. Даны функция $f(x)$, непрерывная на всей прямой $\mathbb{R}$, и число $k > 0$. Определим функцию $g(x)$ следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} k, & \text{если } f(x) > k; \\ f(x), & \text{если } |f(x)| \leqslant k; \\ -k, & \text{если } f(x) < -k. \end{cases}$$

Докажите, что $g(x)$ непрерывна на всей прямой $\mathbb{R}$ (функция g называется «срезкой» функции f).

Для получения оценки N достаточно полностью решить любые N задач.

Контрольная работа 11.02.2005

Задача 1. Существует ли поле, состоящее из действительных чисел, которое содержит рациональные числа, число $\sqrt{2}$ и число $\sqrt{3}$, но не совпадает с множеством действительных чисел?

Задача 2. Функция f монотонно возрастает на отрезке $[a;b]$. Известно, что для любого числа k из отрезка $[f(a);f(b)]$ найдется такое число $c \in [a;b]$, что $f(c) = k$. Обязательно ли f непрерывна на отрезке $[a;b]$?

Задача 3. Пусть $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Ограничена ли последовательность (a_n)?

Задача 4. Функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$. Для $x \in [a;b]$ пусть $g(x) = \min\{f(x) \mid x \in [a;x]\}$. Обязательно ли $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$?

Дополнительная задача

Задача 5. Функция f непрерывна на интервале $(a;b)$. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in (a;b)$. Докажите, что найдется такое число $z \in (a;b)$, что $f(z) = (f(x_1) + \cdots + f(x_n))/n$.

Задачи из зачётной работы по листкам 15 – 23 04.2005

Задача 1. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x)$, что для любого целого положительного n уравнение $\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n \text{ букв «}f\text{»}} = 0$ имеет ровно 2^n различных действительных корней?

Задача 2. Докажите, что из всякого покрытия отрезка интервалами можно выбрать конечное число интервалов, которые покрывают этот отрезок, причём каждая точка покрыта не более чем двумя интервалами.

Задача 3. Пусть $\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x)$, $\Delta_h^{m+1} f(x) = \Delta_h^1 \left(\Delta_h^m f(x)\right)$. Докажите, что непрерывная функция $f(x)$ является многочленом степени не выше m тогда и только тогда, когда $\Delta_h^{m+1} f(x) = 0$ при любых $x, h \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Дана бесконечная последовательность функций $f_1, f_2, \ldots$ (все функции определены на $\mathbb{R}$ и принимают действительные значения). Всегда ли существует конечный набор функций $g_1, g_2, \ldots, g_N$ (также определённых на $\mathbb{R}$ и принимающих действительные значения), композициями которых можно записать любую из функций исходной последовательности (например, $f_1(x) = g_2(g_1(g_2(x)))$ при всех $x \in \mathbb{R}$)?

Задача 5. Найдите все многочлены $P(x)$, для которых равенство $xP(x-1) = (x-26)P(x)$ верно при всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 6. Существует ли поле, состоящее из действительных чисел, которое содержит рациональные числа, число $\sqrt{2}$ и число $\sqrt{3}$, но не совпадает с множеством действительных чисел?

Задача 7. Пусть функция f такова, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ верно неравенство $f(x_1) - f(x_2) \leqslant \dfrac{1}{2}|x_1 - x_2|$.

а) Обязательно ли тогда f непрерывна на $\mathbb{R}$?

б) Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет ровно один действительный корень.

Задача 8. Найдите все комплексные числа z, по модулю равные 1, при которых $z^2 + (1+i)z$ принимает чисто мнимые значения. Изобразите соответствующее геометрическое место точек на плоскости.

Задача 9. Коэффициенты произведения двух многочленов с целыми коэффициентами делятся на 5. Докажите, что коэффициенты одного из этих многочленов делятся на 5.

Задача 10. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ — корень неприводимого многочлена из $\mathbb{Q}[x]$ степени n. Докажите, что

а) множество чисел $\{P(\alpha) \mid P(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ с обычными операциям сложения и умножения является полем (это поле обозначается $\mathbb{Q}(\alpha)$);

б) $\mathbb{Q}(\alpha) = \{q_0 + q_1\alpha + q_2\alpha^2 + \cdots + q_{n-1}\alpha^{n-1} \mid q_0, q_1, \ldots, q_{n-1} \in \mathbb{Q}\}$;

в) любой элемент поля $\mathbb{Q}(\alpha)$ представляется в виде суммы из пункта б) единственным образом.

Задача 11. **а)** Придумайте определение непрерывности функции двух переменных (аналогично определению для функции одного переменного).

б) Постройте такую функцию $f(x, y)$, что при любом $b \in \mathbb{R}$ функция $f(x, b)$ будет непрерывной на $\mathbb{R}$ как функция от x, при любом $a \in \mathbb{R}$ функция $f(a, y)$ будет непрерывной на $\mathbb{R}$ как функция от y, но $f(x, y)$ как функция двух переменных будет разрывна в точке $(0, 0)$.

Задача 12. На плоскости дана последовательность $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ вложенных кругов. Обязательно ли существует точка, принадлежащая всем кругам?

Задача 13. Назовем комплексное число $z = a + bi$ *конструктивным*, если на плоскости с отмеченными точками $(0;0)$ и $(1;0)$ можно с помощью циркуля и линейки построить точку $(a;b)$. Докажите, что **а)** множество конструктивных комплексных чисел является полем; **б)** если z конструктивно, то $\bar{z}$ и $\sqrt{z}$ конструктивны. (Напомним, что с помощью циркуля и линейки разрешается только:

1) построить отрезок, прямую, проходящие через две уже построенные точки;

2) построить окружность радиуса r с центром в уже построенной точке, если уже построен некоторый отрезок длины r;

3) построить точки пересечения уже построенных прямых и окружностей.)

Задача 14. Изобразите на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z = \dfrac{1+ti}{1-ti}$, где $t \in \mathbb{R}$.

Задача 15. Существует ли такое натуральное число n, что $\left(\dfrac{2+i}{2-i}\right)^n = 1$?

Задача 16. Пусть многочлен $A(x)$ таков, что $A(x) = A(1-x)$ при любом x. Докажите, что существует такой многочлен $P(x)$, что $A(x) = P((x-0{,}5)^2)$ при любом x.

Задача 17. Функция f непрерывна на интервале $(a;b)$. Пусть $x_1,\dots,x_n \in (a;b)$. Докажите, что найдется такое число $z \in (a;b)$, что $f(z) = (f(x_1)+\dots+f(x_n))/n$.

Задача 18. Пусть k и n — натуральные числа, большие 1. Верно ли, что множество корней степени n из комплексного числа z совпадает с множеством корней степени kn из числа z^k?

Задача 19. Многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами неприводим над $\mathbb{Q}$. Может ли он иметь кратный действительный корень?

Задача 20. Существуют ли такие многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ из $\mathbb{R}(x)$, что каждое рациональное число r представимо в виде $r = P(k)/Q(k)$ для некоторого целого числа k?

Задача 21. Пусть $p(x)$ — непостоянный многочлен с целыми коэффициентами.
а) Докажите, что при любом целом числе n либо $p(n)$ делит $p(n+p(n))$, либо $p(n) = p(n+p(n)) = 0$.
б) Могут ли все числа $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, … быть простыми?

Задача 22. Пусть $p(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.
а) Докажите, что $a-b$ делит $p(a)-p(b)$ при любых различных целых числах a и b.
б) Пусть уравнения $p(x) = 1$ и $p(x) = 3$ имеют целое решение. Может ли уравнение $p(x) = 2$ иметь два различных целых решения?

Задача 23. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ равномерно непрерывны и ограничены на всей прямой. Докажите, что функция $f(x)\cdot g(x)$ равномерно непрерывна на всей прямой.

Задача 24. Даны два комплексных числа a и b. Опишите множество таких $z \in \mathbb{C}$, что $(z-a)/(z-b)$ — **а)** вещественное число; **б)** чисто мнимое число.

Задача 25. Пусть m и n — натуральные числа. Найдите такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что $x^m u(x) + (1-x)^n v(x) = 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 26. Пусть $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_1+\dots+a_n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Ограничена ли последовательность (a_n)?

Задача 27. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Изобразите на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z, удовлетворяющим равенству $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| = \lambda$.

Задача 28. Поставим в соответствие каждой точке квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ некоторый круг с центром в этой точке. Получим покрытие квадрата. Докажите, что из него можно выбрать конечное число кругов, покрывающих квадрат.

Задача 29. Многочлен f таков, что $f(x^n)$ делится на $x-1$. Докажите, что $f(x^n)$ делится на x^n-1.

Задача 30. Многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами неприводим над $\mathbb{Q}$. Может ли он иметь кратный действительный корень?

Задача 31. Найдите все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции f такие, что $f(x) = f(2x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 32. **а)** Найдите целое число a, при котором многочлен $(x-a)(x-10)+1$ раскладывается на два многочлена первой степени с целыми коэффициентами.
б) При каких попарно различных целых числах $a_1,\dots,a_n$ многочлен $(x-a_1)\dots(x-a_n)+1$ раскладывается в произведение двух многочленов меньшей степени с целыми коэффициентами?

Задача 33. Докажите, что точки плоскости, соответствующие комплексным числам z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0$ и $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0$.

Задача 34. Докажите, что многочлен $(x-a_1)\dots(x-a_n)-1$ не раскладывается в произведение двух многочленов меньшей степени с целыми коэффициентами при любых попарно различных целых числах $a_1,\dots,a_n$.

Задача 35. Пусть $c_1, c_2, \dots, c_n, z$ — такие комплексные числа, что

$$\frac{1}{z-c_1} + \frac{1}{z-c_2} + \dots + \frac{1}{z-c_n} = 0,$$

причём точки $c_1, c_2, \dots, c_n$ являются вершинами выпуклого многоугольника. Докажите, что точка z лежит внутри этого многоугольника.

Задача 36. Найдите наибольший общий делитель многочленов $x^{480}-1$ и $x^{36}+1$.

Задача 37. Пусть n и k — натуральные числа, (x_i) — последовательность, причём $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 1$ и при всех $i \in \mathbb{N}$ верно $x_i \neq 1$. Найдите
$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{n}{1-x_i^n}-\frac{k}{1-x_i^k}\right).$$

Задача 38. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ пусть $f(x) = \lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}(2\pi x m!)\right)$. В каких точках из $\mathbb{R}$ непрерывна функция f?

Задача 39. Многочлен $P(x)$ с рациональными коэффициентами неприводим над $\mathbb{Q}$. Может ли он иметь кратный действительный корень?

Задача 40. Докажите, что из всякого покрытия отрезка интервалами можно выбрать конечное число интервалов, которые покрывают этот отрезок, причём каждая точка покрыта не более чем двумя интервалами.

Задача 41. Пусть $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, $(a;b)$ — любая точка на координатной плоскости. Докажите, что среди всех точек графика функции f найдётся такая, расстояние от которой до точки (a,b) минимально (то есть не больше, чем расстояние от любой другой точки графика f до $(a;b)$).

Задача 42. Многочлен f таков, что $f(x^n)$ делится на $x-1$. Докажите, что $f(x^n)$ делится на x^n-1.

Задача 43. Пусть z — такое комплексное число, что $z+1/z = 2\cos\alpha$ для некоторого угла α. Докажите, что $z^n + 1/z^n = 2\cos n\alpha$ для $n \in \mathbb{N}$.

Задачи из зачётной работы по листкам 24 – 25 10.2005

Задача 1. а) Докажите, что при дифференцировании кратность корня многочлена понижается на 1.

б) Докажите, что многочлен из $\mathbb{R}[x]$ имеет кратный действительный корень тогда и только тогда, когда он имеет общий действительный корень со своей производной.

в) Может ли многочлен из $\mathbb{Q}[x]$, неприводимый над $\mathbb{Q}$, иметь кратный комплексный корень?

Задача 2. Пусть f — дифференцируемая функция. Известно, что уравнение $f(x)=0$ имеет n решений. **а)** Сколько решений может иметь уравнение $f'(x)=0$? **б)** А если f — многочлен?

Задача 3. Пусть $f(x) = (x-a_1)^{r_1}\cdot\dots\cdot(x-a_n)^{r_n}$, где числа $a_1,\dots,a_n$ действительные и различные, а числа $r_1,\dots,r_n$ — целые. Докажите, что $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r_1}{x-a_1}+\dots+\frac{r_n}{x-a_n}$.

Задача 4. Найдите все дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции f, для которых $f''(x)=0$ при всех $x\in\mathbb{R}$.

Задача 5. а) Пусть $c\in\mathbb{R}$ и $f(x)\to c$ при $x\to+\infty$. Верно ли, что $f'(x)\to 0$ при $x\to+\infty$?

б) Пусть $f'(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Верно ли, что $f(x)\to c$ при $x\to+\infty$ для некоторого $c\in\mathbb{R}$?

Задача 6. Даны две точки A и B по разные стороны от прямой l, разделяющей две среды. Требуется найти такую точку D на прямой l, чтобы время преодоления светом пути ADB было минимальным при условии, что скорость распространения света в верхней среде v_1, а в нижней — v_2. Докажите, что D существует и определяется условием $\sin\alpha_1/\sin\alpha_2 = v_1/v_2$, где α_1 и α_2 — углы, образованные прямыми AD и BD с прямой, проходящей через точку D перпендикулярно l.

Задача 7. На рисунке изображён[1)] график функции $y = f(x)$. Нарисуйте график функции: **а)** $y=f'(x)$;
б) $y=F(x)$, где $F(0)=0$ и $F'(x)=f(x)$ при всех x.

[1)] Каждому школьнику предлагался уникальный рисунок, который ему на листке с условием рисовал преподаватель.

Задача 8. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы всюду на $\mathbb{R}$, причём и f' и g' каждая обращается в нуль ровно в одной точке. Сколько нулей может иметь производная сложной функции $f(g(x))$? (Укажите все возможные ответы и докажите, что других нет).

Задача 9. Эллипс представляет собой геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 постоянна и равна s. Что произойдёт с отражённым от эллипса потоком лучей от точечного источника света в F_1?

Задача 10. Гипербола представляет собой геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 постоянна и равна s. Докажите, что поток лучей от точечного источника света в F_1, отразившись от гиперболы, предстанет стороннему наблюдателю как поток лучей от точечного источника в F_2 (и наоборот).

Задача 11*. Функция $f(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[0;1]$. Известно, что $f(0) = f(1) = 0$ и $\max f(x) = 1$ (при $0 \leqslant x \leqslant 1$). Найдётся ли такая точка $x_0 \in [0;1]$, что **а)** $|f'(x_0)| \geqslant 2$; **б)** $|f'(x_0)| > 2$?

Задача 12. **а)** Найдите все r, при которых на плоскости Oxy существует окружность радиуса r, пересекающая параболу $y = x^2$ ровно в двух точках, причём в одной из этих точек у параболы и окружности есть общая касательная, а в другой — нет.
б) Приведите пример такой окружности (хотя бы для одного r).

Задача 13. Пусть $f(x) = (x-a_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x-a_n)^{r_n}$, где числа $a_1, \dots, a_n$ действительные и различные, а числа $r_1, \dots, r_n$ — целые. Докажите, что $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r_1}{x-a_1} + \dots + \frac{r_n}{x-a_n}$.

Задача 14. Пусть существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$. Обязательно ли тогда функция $f(x)$ имеет асимптоту?

Задача 15. Является ли функция

$$y = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

а) непрерывной на $\mathbb{R}$; **б)** дифференцируемой на $\mathbb{R}$?

Задача 16. В каком наибольшем конечном числе точек прямая может касаться синусоиды?

Задача 17. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выпукла на $\mathbb{R}$. Верно ли, что **а)** график f имеет в каждой точке правую и левую касательные; **б)** если f ограничена, то f постоянна?

Задача 18. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы всюду на $\mathbb{R}$, причём и f' и g' каждая обращается в нуль ровно в одной точке. Сколько нулей может иметь производная сложной функции $f(g(x))$?

Задача 19. Пусть $f(x)$ дифференцируема на $\mathbb{R}$. Верно ли, что $f'(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$?

Задача 20. Каков максимальный радиус r круга, лежащего в области $y \leqslant x^2$ и содержащего начало координат?

Задача 21. В круглый бокал, осевое сечение которого — график функции $y = x^2$, опускают вишенку — шар радиусом r. При каком наибольшем r шар коснётся нижней точки дна? (Другими словами, каков максимальный радиус r круга, лежащего в области $y \leqslant x^2$ и содержащего начало координат)?

Контрольная работа 01.2006

Задача 1. Для каждого четного натурального n рассмотрим на плоскости фигуру F_n, заданную уравнением $2x^n + (3y)^n < 1$. Пусть F — объединение всех фигур F_1, F_2, …Нарисуйте фигуру F. Какова ее площадь?

Задача 2. Найдите ошибку в следующем доказательстве.

1) С одной стороны, по формуле Ньютона–Лейбница,

$$\int\limits_1^2 (\ln 2x)'\,dx = \int\limits_1^2 (\ln x)'\,dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

2) С другой стороны, по формуле замены переменной ($2x \leftrightarrow u$),

$$\int\limits_1^2 (\ln 2x)'\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_2^4 (\ln u)'\,du = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

3) В итоге получаем: $\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$.

Глава 4.

Материалы из прошлых курсов

Радикальные оси 03.97

Определение 1. *Радикальной осью* двух неконцентрических окружностей называется множество таких точек M, что касательные, проведённые из M к этим окружностям, имеют равные длины.

Задача 1. Докажите, что радикальная ось двух непересекающихся окружностей — прямая. Напишите уравнение этой прямой, если радиусы окружностей имеют длины R_1 и R_2, а их центры имеют координаты $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ соответственно.

Задача 2. Найдите радикальную ось двух пересекающихся окружностей.

Определение 2. Две окружности, пересекающиеся в точках A и B, называют *перпендикулярными,* если касательные, проведённые к ним в точке A, пересекаются под прямым углом.

Задача 3. Докажите, что радикальная ось двух неконцентрических окружностей S_1 и S_2 совпадает с множеством центров окружностей, перпендикулярных одновременно и S_1, и S_2.

Пучки окружностей

Определение 3. *Пучком окружностей* называется множество окружностей и прямых, перпендикулярных двум данным неконцентрическим окружностям S_1 и S_2. Будем говорить, что окружности S_1 и S_2 *задают* этот пучок.

Задача 4. Нарисуйте пучки, задаваемые двумя **а)** пересекающимися (но не касающимися); **б)** касающимися; **в)** непересекающимися окружностями.

Задача 5. Докажите, что окружность, перпендикулярная некоторым двум окружностям одного пучка, перпендикулярна всем окружностям этого пучка.

Задача 6. Докажите, что множество окружностей и прямых, перпендикулярных всем окружностям данного пучка, также является пучком (он называется *перпендикулярным* данному).

Задача 7. Нарисуйте пучки, перпендикулярные пучкам из задачи 4.

Задача 8. Докажите, что радикальная ось любых двух окружностей одного пучка проходит через центры окружностей, задающих этот пучок. (Таким образом, радикальная ось — одна и та же для каждых двух окружностей одного пучка.)

Задача 9. **а)** Пусть пучок задан двумя пересекающимися (но не касающимися) окружностями. Докажите, что через каждую точку плоскости проходит единственная окружность или прямая пучка.
б) Что можно сказать в случае, когда окружности, задающие пучок, касаются?
в) Что можно сказать в случае, когда окружности, задающие пучок, не пересекаются?

Задача 10. Докажите, что любые две неконцентрические окружности принадлежат некоторому пучку окружностей.

Большая теорема Понселе

Задача 11. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Найдите геометрическое место таких точек M, что разность квадратов длин касательных, проведённых из M к S_1 и к S_2, есть заданное число l.

Задача 12. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Докажите, что геометрическое место таких точек M, что отношение длин касательных, проведённых из M к S_1 и к S_2, есть заданное число $k > 1$, является некоторой окружностью S из того же пучка, что и S_1 и S_2. При этом $k^2 = OO_1/OO_2$, где O, O_1, O_2 — центры окружностей S, S_1, S_2 соответственно.

Задача 13. Прямая l пересекает две неконцентрические окружности S_1 и S_2 в точках A, B и C, D соответственно. Пусть l_A, l_B, l_C, l_D — касательные, проведённые к S_1 и S_2 в соответствующих точках. Докажите, что точки пересечения прямых l_A, l_B с прямыми l_C, l_D

а) лежат на радикальной оси S_1 и S_2, если l проходит через центр подобия этих окружностей;

б) лежат на некоторой окружности в противном случае.

в) Докажите, что окружность из пункта б) принадлежит тому же пучку, что и окружности S_1 и S_2.

Задача 14. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2, причём S_2 лежит внутри S_1. Пусть вершины ломаных $A_1A_2 \dots A_n$ и $A'_1A'_2 \dots A'_n$ лежат на окружности S_1, а их звенья, а так же отрезок A_nA_1, касаются окружности S_2. Докажите, что если для всех i от 1 до n точки A_i и A'_i расположены достаточно близко друг от друга, то отрезки $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $\dots$, $A_nA'_n$ касаются некоторой окружности, причём из того же пучка, что и S_1 и S_2.

Задача 15. (*Большая теорема Понселе*) Две окружности лежат одна внутри другой. Выберем на внешней окружности точку, проведём через неё касательную к внутренней, продолжим до пересечения с внешней во второй точке, из неё снова проведём касательную к внутренней (отличную от уже проведённой) и так далее. Докажите, что если через n шагов мы вернемся в исходную точку, то с какой бы другой точки внешней окружности мы не начали аналогичный процесс, через n шагов мы вернемся в точку, с которой начинали.

Разные задачи

Задача 16. Даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведём для каждой пары из этих окружностей прямую, содержащую радикальную ось этой пары. Докажите, что три проведённые прямые пересекаются в одной точке.

Задача 17*. (*Теорема Брианшона*) Шестиугольник описан около окружности. Докажите, что его главные диагонали пересекаются в одной точке.

Задача 18. Докажите, что прямые, проведённые через общие хорды трёх попарно пересекающихся окружностей, пересекаются в одной точке (или параллельны друг другу).

Задача 19*. Даны точка A и две неконцентрические окружности S_1 и S_2.

а) Всегда ли найдётся окружность, проходящая через точку A и перпендикулярная окружностям S_1 и S_2?

б) Как с помощью циркуля и линейки построить такую окружность (если она существует)?

Задача 20*. **а)** Пусть R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей в некоторый треугольник, d — расстояние между центрами этих окружностей. Докажите, что тогда

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}.$$

б) Выведите из пункта а) большую теорему Понселе для $n = 3$.

Задача 21*. **а)** Пусть R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей в некоторый четырехугольник, d — расстояние между центрами этих окружностей. Докажите, что тогда

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}.$$

б) Выведите из пункта а) большую теорему Понселе для $n=4$.

Элементы теории вероятностей 01.99

Основные понятия

Предположим, что мы проводим серию испытаний или экспериментов, в результате которых могут наблюдаться различные *исходы (элементарные события)*, зависящие от случая. Пример — бросание игральной кости, здесь элементарное событие — выпадение одного из чисел $1,2,\ldots,6$. Некоторые совокупности элементарных событий называются *событиями*. Пример события — выпадение четного числа очков на игральной кости. Событием, *противоположным* событию A, называется событие $\overline{A}$, происходящее тогда и только тогда, когда не происходит событие A. *Суммой* событий A и B называется событие $A\cup B$, происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A,B. *Произведением* событий A и B называется событие $A\cap B$ (или AB), происходящее тогда и только тогда, когда происходит и A, и B. Тот факт, что некоторое событие при многократном повторении испытания происходит примерно с частотой p, на языке математической модели означает, что вероятность данного события равна p.

Определение 1. *Вероятностным пространством* называется тройка $(\Omega,\mathbf{A},P)$, где
Ω — некоторое множество (*пространство элементарных событий*);
$\mathbf{A}$ — совокупность подмножеств множества Ω (называемых *событиями*), обладающая следующими свойствами:
$i)$ $\varnothing\in\mathbf{A},\ \Omega\in\mathbf{A}$,
$ii)$ если $A,B\in\mathbf{A}$, то $\overline{A}\in\mathbf{A},\ A\cup B\in\mathbf{A}$ и $AB=A\cap B\in\mathbf{A}$,
(в случае конечного множества Ω за $\mathbf{A}$ принимают обычно множество всех подмножеств Ω);
P — числовая функция $P:\mathbf{A}\to\mathbf{R}$ (называемая *вероятностью*, или *вероятностной мерой*), такая что
$i)$ $P(\varnothing)=0$, $P(\Omega)=1$, $P(A)\geqslant 0$ для любого $A\in\mathbf{A}$;
$ii)$ *(аддитивность вероятностной меры)* если $A\cap B=\varnothing$ (то есть события A и B *несовместны*), то $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;
События, вероятность которых равна 1, называются *достоверными*.

Задача 1. **а)** Постройте вероятностное пространство, отвечающее бросанию четырех игральных костей.

б) Найдите вероятность выпадения при четырех бросаниях хотя бы одной шестерки.

Задача 2. **а)** (*Выборка без возвращения*) В урне M черных и N белых шаров. Наугад выбрано n шаров, причём после взятия из урны шар не возвращается назад. Какова вероятность вытащить ровно m белых шаров?

б) (*Выборка с возвращением*) Та же задача с тем отличием, что после каждого взятия шар кладется на место.

Задача 3. Пусть B — событие, обладающее ненулевой вероятностью. Дайте определение условной вероятности $P_B(A)$ события A при условии B.

Задача 4. Докажите, что тройка $(\Omega,\mathbf{A},P_A)$, где P_A — условная вероятность, является вероятностным пространством.

Задача 5. Китайское правительство издало следующий закон, имеющий целью уменьшить прирост населения и наименьшим образом повлиять на традиции. Если в семье первый ребенок — мальчик (наследник), то этой семье не разрешается больше иметь детей. Если же первый ребенок — девочка, то семье разрешается завести ещё одного ребенка. Какое отношение численности мужского населения к численности женского населения должно установиться в Китае при выполнении этого закона? (При конкретном рождении вероятность того, что рождается мальчик, принимаем равной 1/2.)

Определение 2. События A и B называются *независимыми*, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. События $A_1, \ldots, A_n$ называются *независимыми*, если для любых $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ выполнено равенство $P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \cdots \cdot P(A_{i_k})$.

Задача 6. Следует ли из попарной независимости нескольких событий их независимость в совокупности?

Задача 7. Какое наименьшее число учеников должно быть в классе, чтобы вероятность совпадения дней рождения у двух учеников была больше 1/2? (Разрешается посчитать на компьютере.)

Задача 8. **а)** Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события, вероятности которых больше 0. Докажите *теорему умножения вероятностей*: $P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot \cdots \cdot P_{A_1 \ldots A_{n-1}}(A_n)$.
б) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — попарно несовместные события, причём $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$. Докажите *формулу полной вероятности*: $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)$ для любого события B.

Задача 9. Студент Вася выучил 3 билета из 30. На экзамене эти 30 билетов (каждый — в одном экземпляре) разложены на столе, а студенты по очереди тянут билеты (если студент вытянул билет, то этот билет убирается со стола). Каким нужно тянуть билет Васе, чтобы иметь наибольшую вероятность вытянуть выученный билет?

Задача 10. Трое друзей хотят бросить жребий, кому идти в магазин за соком. Как им это сделать, если у них есть только одна монета (которую можно многократно бросать)?

Геометрические вероятности

При решении требуется построить соответствующее бесконечное вероятностное пространство.

Задача 11. Палку случайным образом ломают на 3 части. Какова вероятность того, что из этих частей можно сложить треугольник?

Задача 12. (*Задача Бюффона*) На плоскость, разлинованную параллельными прямыми, находящимися на расстоянии a друг от друга, случайно брошена игла длиной $l < a$. Найти вероятность пересечения иглы с какой-нибудь прямой.

Задача 13. Монету радиусом r и толщиной d бросают на горизонтальную поверхность (соударение неупругое). Какова вероятность того, что монета упадет на ребро?

Случайные величины. Закон больших чисел

Определение 3. Пусть Ω — конечное вероятностное пространство. Числовая функция $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ называется *случайной величиной*.

Определение 4. Пусть случайная величина ξ принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$ соответственно (т. е. вероятность события "$\xi = x_i$" равна p_i).
Число $M\xi = \sum\limits_{k=1}^{m} x_k p_k$ называется *математическим ожиданием* случайной величины ξ. Математическое ожидание равно среднему значению величины ξ.
Число $D(\xi) = M(\xi - M\xi)^2$ называется *дисперсией* случайной величины ξ. Дисперсия характеризует уклонение случайной величины от ее среднего значения.

Задача 14. Человек, имеющий n ключей, хочет отпереть свою дверь, испытывая ключи независимо один от другого в случайном порядке. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа испытаний, если неподошедшие ключи
а) не исключаются из дальнейших испытаний; **б)** если они исключаются.

Задача 15. **а)** Докажите, что для любых случайных величин ξ и η выполнено равенство $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.

б) Докажите, что $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$

Задача 16. В расписании движения автобусов на остановке «Университет» написано, что средний интервал движения автобуса №57 равен 35 минут, а средний интервал движения автобуса №661 равен 20 минут. Сколько времени в среднем нужно ждать один из этих автобусов?

Определение 5. Пусть случайные величины ξ и η принимают значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответственно. Случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если для любых $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n$ выполнено равенство $P(\{\xi = x_i\} \cap \{\eta = y_j\}) = P(\{\xi = x_i\}) \cdot P(\{\eta = y_j\})$.

Задача 17. Пусть ξ и η — независимые случайные величины. Докажите:

а) $M(\xi\eta) = M\xi M\eta$. Верно ли это равенство для зависимых случайных величин?

б) $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$. Верно ли это равенство для зависимых случайных величин?

Задача 18. (*Неравенство Чебышева*) Докажите, что для любого положительного α выполнено соотношение $P\{|\xi - M\xi| \geqslant \alpha\} \leqslant \frac{D\xi}{\alpha^2}$.

Задача 19. Схемой Бернулли называется последовательность n независимых испытаний с двумя возможными исходами — «успех» и «неудача», причём вероятность успеха в каждом испытании равна p. Обозначим μ_n случайную величину, равную числу успехов при n испытаниях в схеме Бернулли.

а) Найдите $M\mu_n$, $D\mu_n$.

б) (*Закон больших чисел для схемы Бернулли*) Докажите, что для любого $\alpha > 0$ выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{\mu_n - M\mu_n}{n}| < \alpha\} = 1$. Последнее утверждение означает, что при увеличении числа испытаний частота выпадения успехов стремится к вероятности p.

Задача 20. Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью успеха, равной $1/2$ (например, n-кратное подбрасывание монеты). Пусть α и β — положительные числа. Обозначим через $P_n(\alpha, \beta)$ вероятность того, что при n испытаниях число успехов заключено между $n/2 - \alpha\sqrt{n}$ и $n/2 + \beta\sqrt{n}$. Найдите предел $P_n(\alpha, \beta)$ при $n \to \infty$.

Случайные блуждания

Задача 21. Предположим, что мы находимся в целочисленной точке горизонтальной прямой и каждую секунду сдвигаемся с вероятностью $1/2$ на 1 вправо или влево.

а) Найдите число способов попасть из начала координат в точку с координатой x через t секунд ($t \geqslant x \geqslant 0$).

б) (*Принцип отражения*) Докажите, что число способов попасть через t секунд из точки $x > 0$ в точку $y > 0$, не проходя через начало координат, равно числу способов попасть через t секунд из точки $-x$ в точку y.

в) Найдите число способов попасть из начала координат в точку $x > 0$ через t секунд, не проходя при этом второй раз через начало координат.

г) Найдите число способов двигаться из начала координат t секунд, не проходя при этом второй раз через начало координат.

Задача 22. Пусть в начальный момент времени мы находимся в начале координат.

а) Найдите вероятность u_{2t} возвращения в начало координат через $2t$ секунд.

б) Обозначим f_{2t} вероятность первого возвращения в начало координат через $2t$ секунд. Докажите, что $f_{2t} = u_{2t-2} - u_{2t}$.

в) Докажите, что случайное блуждание на прямой возвратно, т. е. что выйдя из начала координат, мы вернемся в него с вероятностью 1.

г) Докажите, что выйдя из начала координат, мы с вероятностью 1 достигнем каждой целочисленной точки.

Задача 23. Аналогично предыдущему определяется случайное блуждание на плоскости и в пространстве. В каждую секунду производится сдвиг на 1 в направлении, параллельном одной из координатных осей. Вероятности сдвига по всем направлениям равны $1/4$ в случае плоскости и

1/6 в случае пространства. Также обозначим u_{2t} и f_{2t} соответственно вероятности возвращения и первого возвращения в начало координат через $2t$ секунд.

а) Найдите u_{2t} в случае блуждания на плоскости и в пространстве.

б) Докажите, что $u_{2t} = \sum\limits_{k=1}^{t} f_{2k} u_{2t-2k}$.

в)* Докажите, что в случае блуждания на плоскости ряд $\sum\limits_{t=0}^{\infty} u_{2t}$ расходится и блуждание возвратно.

г)* Докажите, что при блуждании в пространстве ряд $\sum\limits_{t=0}^{\infty} u_{2t}$ сходится и вероятность возврата строго меньше 1.

Дополнительные задачи

Задача 24. Двое бросают монету — один 10 раз, другой — 11. Какова вероятность того, что у второго орлов выпало больше, чем у первого?

Задача 25. (*Задача о баллотировке*) Предположим, что на выборах кандидат P набрал p голосов, а кандидат Q набрал q голосов, причём $p > q$. Найдите вероятность того, что при последовательном подсчете голосов P все время был впереди Q.

Задача 26*. (*Сумасшедшая старушка*) Каждый из n пассажиров купил по билету на n-местный самолет. Первой зашла сумасшедшая старушка и уселась на случайное место. Далее, каждый вновь пришедший занимает свое место, если оно свободно; в противном случае он занимает случайное место. Какова вероятность того, что последний пассажир займет свое место?

Задача 27. Датчик случайных чисел может выдавать конечное число чисел, каждое число — с определённой вероятностью. Скажем, что один датчик лучше другого, если с вероятностью большей 1/2 выданное им число больше числа, выданного другим датчиком. Можно ли изготовить 3 датчика A, B и C так, чтобы A был лучше B, B был лучше C, а C был лучше A?

Задача 28*. (*Выбор невесты*) Царь желает выбрать самую красивую невесту из 100 претенденток. Процедура выбора невесты состоит в следующем: претендентки в случайном порядке приходят к царю, и в момент прихода очередной претендентки царь может объявить ее своей невестой (царь заранее не знаком с претендентками, но легко упорядочивает девушек по красоте). Докажите, что царь может выбрать самую красивую с вероятностью, большей 1/3.

Задача 29*. В жвачку вложен с вероятностью $1/n$ один из n вкладышей. Какое количество жвачек нужно в среднем купить, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей?

Трансцендентность чисел e и π 02.99

Целью этого листка является доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Число π не является корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.*

Одним из следствий этой теоремы является невозможность совершить квадратуру круга при помощи циркуля и линейки.

Трансцендентность числа e

Прежде чем доказывать теорему о числе π, разберемся с числом e.

Задача 1. Пусть k — целое положительное число. Докажите, что

$$\int\limits_0^{\infty} z^k e^{-z} dz = k!$$

Предположим, что $a_0 + a_1e + a_2e^2 + \ldots + a_ne^n = 0$, где a_i — целые числа. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^\infty := \int\limits_0^\infty z^k[(z-1)(z-2)\ldots(z-n)]^{k+1}e^{-z}dz.$$

Задача 2. Докажите, что интеграл $\int\limits_0^\infty$ — целое число, делящееся на $k!$.

Домножим уравнение для числа e на этот интеграл. Левая часть разлагается в сумму двух слагаемых:

$$P_1 = a_0\int\limits_0^\infty + a_1e\int\limits_1^\infty + a_2e^2\int\limits_2^\infty + a_ne^n\int\limits_n^\infty$$

и

$$P_2 = a_1e\int\limits_0^1 + a_2e^2\int\limits_0^2 + \ldots + a_ne^n\int\limits_0^n.$$

Задача 3. Докажите, что P_1 — целое число, делящееся на $k!$; более того выполнено следующее сравнение:

$$\frac{P_1}{k!} \equiv \pm a_0(n!)^{k+1} \bmod (k+1).$$

Задача 4. Пусть M и m — наибольшие значения на промежутке $[0, n]$ модулей функций $z(z-1)\ldots(z-n)$ и $(z-1)\ldots(z-n)e^{-z}$. Докажите, что

$$|P_2| < (|a_1|e + 2|a_2|e^2 + \ldots + n|a_n|e^n)mM^k.$$

Задача 5. а) Покажите, что можно выбрать такое число k, что $\frac{P_1}{k!}$ — целое ненулевое число, а $\left|\frac{P_2}{k!}\right| < 1$.

б) Докажите, что число e трансцендентно.

Симметрические многочлены и алгебраические числа

Определение 1. Многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется *симметрическим* многочленом, если для любой перестановки τ множества $\{1, \ldots, n\}$ выполнено следующее равенство: $P(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = P(x_1, \ldots, x_n)$.

Примерами симметрических многочленов являются: $\sigma_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$; $\sigma_2(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n$; $\ldots$; $\sigma_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2\ldots x_n$. Эти многочлены называются *элементарными симметрическими многочленами*.

Определение 2. Убывающий набор натуральных чисел (0 — натуральное число!) $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ называется *разбиением на n частей числа* $|\lambda| = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Для любого такого разбиения пусть $m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_\alpha x^\alpha$, где суммирование производится по всем различным перестановкам α множества λ и $x^\alpha := x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$.

Для разбиений λ и μ с $|\lambda| = |\mu|$ будем говорить, что $\lambda > \mu$, если первая ненулевая разность $\lambda_i - \mu_i$ положительна.

Задача 6. (*Двойственное разбиение*) Пусть λ — некоторое разбиение числа $|\lambda|$. Положим $\lambda'_i = |\{j|\lambda_j \geqslant i\}|$. Покажите, что λ' — тоже разбиение числа $|\lambda|$. Докажите, что $(\lambda')' = \lambda$.

Задача 7. а) Докажите, что любой симметрический многочлен является линейной комбинацией многочленов m_λ.

б) Для любого разбиения на m частей λ положим $\sigma_\lambda = \sigma_{\lambda_1} \ldots \sigma_{\lambda_m}$. Докажите, что для любого разбиения на n частей λ

$$\sigma_{\lambda'} = m_\lambda + \text{линейная комбинация } m_\mu \text{ таких, что } \mu < \lambda.$$

в) Любой симметрический многочлен P выражается через элементарные симметрические многочлены.

г) Сформулируйте и докажите утверждение единственности для теоремы из предыдущего пункта.

Задача 8. а) (*Формулы Ньютона*) Пусть $p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k + \ldots + x_n^k$. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \sigma_{k-i} (-1)^i = (-1)^k k \sigma_k.$$

б) Выразите многочлены p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 через элементарные симметрические.

Определение 3. Число называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого ненулевого многочлена с целыми коэффициентами.

Задача 9. Докажите, что сумма, произведение, разность и частное двух алгебраических чисел являются алгебраическими числами.

Определение 4. Число α называется *целым алгебраическим*, если оно удовлетворяет уравнению вида $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ с целыми коэффициентами.

Задача 10. Любое алгебраическое число α представимо в виде β/m, где β — целое алгебраическое число, m — натуральное число.

Задача 11. Докажите, что сумма, произведение и разность целых алгебраических чисел являются целыми алгебраическими числами.

Задача 12. Докажите, что рациональное число является целым алгебраическим тогда и только тогда, когда оно является целым числом.

Функции комплексного переменного

Задача 13. а) Ряд $e^x := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ сходится для любого комплексного числа x.

б) Функция e^x комплексного переменного непрерывна.

Задача 14. Докажите, что для любых комплексных x и y верно равенство $e^{x+y} = e^x e^y$.

Задача 15. Дайте определение дифференцируемой функции комплексного переменного и докажите дифференцируемость функции e^x.

Задача 16. Докажите, что для любого вещественного числа x выполнено равенство $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. В частности, $e^{i\pi} = -1$.

Задача 17. а) Пусть x_0 и x_1 — две точки на комплексной плоскости. Пусть C — путь, соединяющий x_0 и x_1. Пусть f — функция комплексного переменного. Определите интеграл $\int\limits_C f(x)dx$.

б) Пусть функция f имеет первообразную. Покажите, что $\int\limits_C f(x)dx$ зависит от x_0, x_1, f и не зависит от C.

Трансцендентность числа π

Предположим, что π — алгебраическое число. Тогда $\alpha_1 = i\pi$ тоже алгебраично и является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами. Пусть $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — остальные корни этого многочлена. Очевидно, что выражение

$$(1 + e^{\alpha_1}) \ldots (1 + e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_N}$$

равняется нулю.

Задача 18. Числа $\beta_1, \ldots, \beta_N$ — корни многочлена степени N с целыми коэффициентами.

Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_M$ — все числа из $\beta_1, \ldots, \beta_N$, являющиеся ненулевыми. Они являются корнями уравнения

$$f(x) = bx^M + b_1 x^{M-1} + \ldots + b_M = 0$$

с целыми коэффициентами, причём b и b_M не равны нулю. Кроме того, выполнено равенство

$$(*) \qquad a + e^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_M} = 0,$$

здесь a — положительное целое число.

Задача 19. Докажите, что число π трансцендентно.

Указание. Домножьте равенство $(*)$ на интеграл $\int\limits_0^\infty z^k[g(z)]^{k+1}e^{-z}dz$, где $g(z) = b^M f(z)$. Затем нужно действовать так же, как и в доказательстве трансцендентности числа e.

Прогрессии и суммы

09.2005

Определение 1. *Арифметическая прогрессия* — это (конечная или бесконечная) последовательность чисел $\ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots$, в которой разность $d = a_k - a_{k-1}$ между соседними членами a_k и a_{k-1} одинакова для всех k; она называется *разностью* или *приращением* прогрессии.

Задача 1. Выразите n-й член арифметической прогрессии через первый член и разность. Найдите 50-е натуральное число, большее 90, с остатком 3 от деления на 4.

Задача 2. Каждый член некоторой последовательности (кроме крайних, если такие есть) равен среднему арифметическому двух соседних членов: $a_k = (a_{k-1} + a_{k+1})/2$. Верно ли, что эта последовательность — арифметическая прогрессия? Верно ли обратное утверждение?

Задача 3. Выразите сумму всех членов конечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n$ через **а)** два крайних члена и число слагаемых; **б)** начальный член, число слагаемых и приращение.

Задача 4. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, оканчивающихся на 7.

Задача 5. По строкам и столбцам прямоугольной таблицы $m \times n$ стоят арифметические прогрессии. Найдите сумму всех чисел в таблице, если сумма четырёх угловых чисел равна S.

Задача 6. **а)** Дан квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$. При каких условиях найдётся такая арифметическая прогрессия (a_n), что $a_1 + \ldots + a_n = f(n)$ при всех натуральных n?
б) Найдите арифметическую прогрессию, сумма первых n членов которой равна $2n^2 - 3n$.

Задача 7*. Можно ли покрыть натуральный ряд k арифметическими прогрессиями с различными целыми разностями, не равными 1, если **а)** $k = 2$; **б)** $k = 3$; **в)** $k = 4$; **г)** $k = 5$?

* * *

Задача 8. Вычислите суммы:[1] **а)** $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)}$; **б)** $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n!$ (где $k! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k$); **в)** $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; **г)** $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{48}+\sqrt{49}}$.

Задача 9. **а)** Выразите $(n+1)^k$ и разность $(n+1)^k - n^k$ в виде многочленов от n при $k = 1, 2, 3, 4, 5$.
б) Пользуясь п. а), найдите сумму k-х степеней первых n натуральных чисел для $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Определение 2. *Геометрическая прогрессия* — это (конечная или бесконечная) последовательность ненулевых чисел $\ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots$, в которой отношение $q = a_k/a_{k-1}$ соседних чисел одинаково для всех k; оно называется *знаменателем* прогрессии.

[1] Сумму $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ иногда удаётся вычислить, представив каждое слагаемое в виде разности $b_i = c_{i+1} - c_i$ чисел некого другого набора (тогда при подстановке в исходную сумму почти все c_i сокращаются).

Задача 10. Будет ли геометрической прогрессией последовательность, k-й член которой равен **а)** $0,\underbrace{0\ldots0}_{k}3$; **б)** $\underbrace{1\ldots1}_{k}$; **в)** 2^{3k+5}; **г)** $g_k \cdot h_k$, где (g_k), (h_k) — геометрические прогрессии? **д)** Выразите n-й член геометрической прогрессии через первый член и знаменатель.

Задача 11. Квадрат каждого члена некоторой последовательности (кроме крайних, если такие есть) равен произведению двух соседних: $a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, и все члены ненулевые. Верно ли, что эта последовательность — геометрическая прогрессия? Верно ли обратное?

Задача 12. Некто приезжает в город с новостью и сообщает её двоим. Каждый из вновь узнавших новость через 5 минут сообщает её ещё двоим (которые её не знают) и т. д. (пока все в городе её не узнают). Через сколько времени новость узнает весь город, если в нём 1000000 жителей?

Задача 13. Найдите суммы: **а)** $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$; **б)** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots - \frac{1}{512}$.

Задача 14. Выразите сумму всех элементов конечной геометрической прогрессии через начальный член, количество слагаемых и знаменатель.

Определение 3. *Числа Фибоначчи* — это члены последовательности $f_0, f_1, \ldots$, в которой $f_0 = f_1 = 1$, а каждый следующий член равен сумме двух предыдущих: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при всех целых $n \geqslant 2$.

Задача 15. Вычислите первые 15 чисел Фибоначчи.

Задача 16. Найдите все **а)** арифметические; **б)** геометрические прогрессии, у которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих.

Задача 17. Представьте последовательность Фибоначчи в виде суммы двух геометрических прогрессий, т. е. найдите такие прогрессии (g_n) и (h_n), что $f_n = g_n + h_n$ при всех целых $n \geqslant 0$.

Лекция о множествах

Множества

Георг Кантор, основоположник теории множеств, дал такое определение: множество — это многое, мыслимое нами как единое. Навряд ли можно считать это строгим определением математического объекта — скорее, такое пояснение можно сопоставить с Евклидовым определением «точка — то что не имеет частей». Вы знаете, что с современной точки зрения точка (как и ещё несколько основных понятий геометрии) является неопределяемым понятием, а основную роль в прояснении смысла этих понятий играет набор аксиом. Так же обстоит дело и с понятием множества: оно является одним из неопределяемых понятий аксиоматической теории множеств. Однако, аксиоматическое построение теории множеств требует изрядной логической изощрённости и (желательно) понимания сути дела на «наивном» уровне. Так что аксиоматикой мы заниматься не будем, а постараемся вместо этого освоить основные понятия теории множеств с помощью объяснений, на особую строгость не претендующих, и примеров.

Итак, *множество* — это произвольная[2)] совокупность объектов, называемых его *элементами*. Обозначим множество буквой A, а один из его элементов — буквой a. Мы говорим «*элемент a принадлежит множеству A*» и пишем $a \in A$. Самое главное, что надо запомнить — что *множество целиком определяется тем, какие элементы в него входят.*

Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то множество A называют *подмножеством* множества B и пишут $A \subseteq B$. Тот факт, что множество полностью определяется своими элементами, можно сформулировать так: если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$. Если $A \subseteq B$, но $A \neq B$, то говорят, что множество A является *строгим* или *собственным подмножеством* множества B и пишут $A \subset B$. Символы $\subseteq$ и $\subset$ называются, соответственно, символом *включения* и символом *строгого включения*.

Так как множество целиком определяется тем, какие элементы в него входят, то множество задано, если про каждый объект можно однозначно сказать, принадлежит он данному множеству

[2)] Ну, на самом деле, не совсем произвольная: об этом — дальше.

или нет. Если у множества элементов немного, то его можно задать, просто перечислив (в фигурных скобках) все его элементы. Например, множество, элементами которого являются числа 1, 2 и 3 (и только они) записывается так: $\{1, 2, 3\}$. Полагаясь на догадливость читателя, множество натуральных чисел от 1 до n записывают так: $\{1, 2, \ldots, n\}$. В том же стиле, множество всех натуральных чисел можно записать так: $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Впрочем, это множество обычно обозначают буквой $\mathbb{N}$. Кстати, другие числовые множества тоже имеют стандартные обозначения: $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел, $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел.

Другой способ задать множество — сформулировать свойство, выделяющее его элементы, то есть такое, что элементы множества (и только они) удовлетворяют данному свойству. При этом, правила хорошего тона требуют указать, для элементов какого множества мы проверяем наше свойство. Например, множество чётных целых чисел можно записать так: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ делится на } 2\}$. Впрочем, используют и такую запись: $\{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ и } x \text{ делится на } 2\}$.

Для краткости, очень удобно использовать следующие обозначения для логических связок: если A, B — некоторые утверждения, то $A \,\&\, B$ означает «A и B», $A \vee B$ означает «A или B», а $A \Rightarrow B$ означает «из A следует B». Кроме того, часто используются *кванторы*: $\exists$, означающий «существует», и $\forall$, означающий «для любого». Например, множество чётных целых чисел можно записать так: $\{x \in \mathbb{Z} \mid (\exists k \in \mathbb{Z})\, x = 2k\}$, а множество простых чисел — так: $\{p \in \mathbb{N} \mid (p > 1) \,\&((\forall a \in \mathbb{N})\, (\forall b \in \mathbb{N})\, (ab = p \,\&\, a \neq 1) \Rightarrow b = 1)\}$.

Обозначим через A множество $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 0\}$, а через B — множество девятиглавых огнедышащих драконов, живущих в Московском зоопарке. Очевидно, что каждый элемент множества A принадлежит множеству B, а каждый элемент множества B принадлежит множеству A. Если кто-нибудь с этим не согласен, то он, видимо, считает, что в Московском зоопарке живёт девятиглавый огнедышащий дракон, не являющийся натуральным числом, квадрат которого меньше нуля, или наоборот, что существует натуральное число, квадрат которого меньше нуля, и которое не является девятиглавым огнедышащим драконом, живущим в Московском зоопарке. Таким образом, $A = B$. Вообще, существует ровно одно множество, в котором не содержится ни одного элемента. Это множество называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Ясно, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Пора сказать, что на самом деле не каждая совокупность мыслимых объектов представляет собой множество. Например, совокупность всех множеств множеством не является. Действительно, попробуем предположить, что существует множество $\mathcal{E}$, элементами которого являются все множества. Тогда, в частности, само это множество является собственным элементом. На мой взгляд, уже от этого должно возникать чувство какой-то неправильности. Но давайте пренебрежём нехорошими предчувствиями и отважно решим, что множество вполне может быть собственным элементом. Назовём такие множества (то есть множества, являющиеся собственными элементами) экстраординарными, а все остальные множества (то есть множества, не являющиеся собственными элементами) — ординарными. Рассмотрим множество всех ординарных множеств, то есть $\mathcal{O} = \{A \in \mathcal{E} \mid A \notin A\}$. Возникает естественный вопрос: Является ли множество $\mathcal{O}$ ординарным или экстраординарным? Если $\mathcal{O}$ — ординарное множество, то, согласно определению множества $\mathcal{O}$, оно должно содержать $\mathcal{O}$ в качестве своего элемента (ведь все ординарные множества являются элементами множества $\mathcal{O}$). Тем самым множество $\mathcal{O}$ должно быть экстраординарным. Но если $\mathcal{O}$ — экстраординарное множество, то, согласно определению множества $\mathcal{O}$, оно не должно содержать $\mathcal{O}$ в качестве своего элемента (ведь только ординарные множества являются элементами множества $\mathcal{O}$). Тем самым множество $\mathcal{O}$ должно быть ординарным. Таким образом, если множество $\mathcal{O}$ — ординарное, то оно экстраординарное, а если оно экстраординарное, то оно ординарное. Ясно, что это невозможно, так как по определению каждое множество является либо ординарным, либо экстраординарным, и никакое множество не является одновременно ординарным и экстраординарным. Это рассуждение называется *парадоксом Рассела*[3].

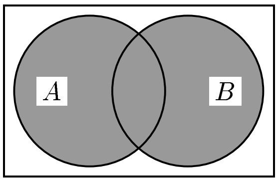
На мой взгляд, ошибка здесь в самом начале рассуждения: собирая объекты в множество, мы

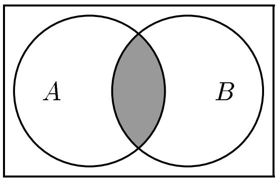
[3]Парадокс Рассела изложен по популярной книжке Виленкина «Рассказы о множествах».

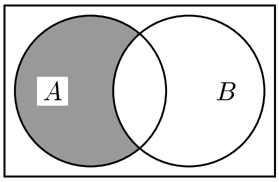
должны в некотором смысле *заранее* знать, что мы собираем. Когда же мы говорим «множество всех множеств», мы оказываемся в ситуации логического порочного круга: чтобы понять, какие элементы входят в это множество, мы должны уже иметь, в частности, само это множество. По той же причине никакое множество не может быть собственным элементом.

Операции над множествами и тождества

Для произвольных множеств A и B определены *пересечение* $A \cap B = \{x \mid x \in A \,\&\, x \in B\}$, *объединение* $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ и *разность* $A \setminus B = \{x \mid x \in A \,\&\, x \notin B\}$. Эти операции удобно изображать с помощью *кругов Эйлера* (такие картинки называют ещё *диаграммами Эйлера–Венна*):







Часто бывает так, что все множества, рассматриваемые в каком-то рассуждении, являются подмножествами некоторого естественного *универсального множества* $\mathcal{U}$: таким универсальным множеством может быть множество всех целых чисел, множество всех точек плоскости и т. п. Тогда определена ещё одна операция над множествами: *дополнением* множества A называется множество $\overline{A} = \mathcal{U} \setminus A$.

Введённые операции удовлетворяют некоторым *тождествам*. Например, $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ для любых множеств A и B. Вот ещё несколько тождеств:

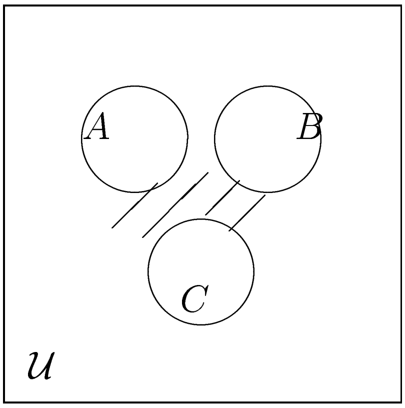
$$
\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A; & A \cap B &= B \cap A;\\
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C); & (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C);\\
(A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C); & (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C);\\
\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}; & \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B};\\
A \cup A &= A; & A \cap A &= A;\\
A \cup (A \cap B) &= A; & A \cap (A \cup B) &= A;\\
A \cup \overline{A} &= \mathcal{U}; & A \cap \overline{A} &= \varnothing;\\
A \cup \varnothing &= A; & A \cap \mathcal{U} &= A;\\
A \cup \mathcal{U} &= \mathcal{U}; & A \cap \varnothing &= \varnothing;\\
\overline{\mathcal{U}} &= \varnothing; & \overline{\varnothing} &= \mathcal{U};
\end{aligned}
$$

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Почти все эти тождества совершенно очевидны. Впрочем, очевидный факт и доказать нетрудно. Один из способов — доказать, что каждый элемент множества, стоящего в правой части равенства, принадлежит множеству, стоящему в его левой части, и наоборот. Этот способ называется *методом двух включений*. Например, докажем этим методом тождество $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Если $x \in (A \cup B) \cap C$, то $x \in (A \cup B)$ и $x \in C$, то есть выполняются следующие два утверждения: во-первых, $x \in A$ или $x \in B$, и, во-вторых, $x \in C$. Таким образом, возможны два случая: 1) $x \in A$ и $x \in C$; 2) $x \in B$ и $x \in C$. В первом случае $x \in A \cap C$, а во втором случае $x \in B \cap C$. Отсюда мы получаем, что $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Так как любой элемент множества $(A \cup B) \cap C$ принадлежит множеству $(A \cap C) \cup (B \cap C)$, то имеет место включение $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Обратное включение, то есть $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$, доказывается аналогично. Следовательно, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Убедить себя в справедливости того или иного тождества можно и с помощью кругов Эйлера. Например, для обеих частей тождества $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ картинка получается такая:



Такую картинку несложно нарисовать для любой *операции от трёх множеств A, B и C, выраженной в виде формулы через операции пересечения, объединения и дополнения.* Заметим, что операцию разности множеств $A \setminus B$ так выразить можно: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$; пустое множество $\varnothing$ и универсальное множество $\mathcal{U}$ тоже можно так выразить: $\varnothing = A \cap \overline{A}$ и $\mathcal{U} = A \cup \overline{A}$; таким образом, $\varnothing$ и $\mathcal{U}$ тоже являются операциями от A, B и C.

Диаграмма Эйлера–Венна — это просто способ наглядно представить все варианты расположения элемента множества $\mathcal{U}$ относительно множеств A, B и C (ясно, что таких вариантов 8 — столько же, сколько «долек» на диаграмме Эйлера–Венна). Операции, выраженные формулой через пересечение, объединение и дополнение, обладают таким свойством: принадлежность элемента $x \in \mathcal{U}$ результату операции зависит только от принадлежности его множествам A, B и C, то есть от того, какой дольке на диаграмме Эйлера–Венна этот элемент отвечает. Поэтому если две формулы имеют одинаковые диаграммы Эйлера–Венна, то они тождественно равны (и, тем самым, задают одну и ту же операцию).

Сама картинка, разумеется, доказательством тождества не является; однако, если её снабдить объяснением того, *почему* для обеих частей равенства получается именно эта картинка, то это, пожалуй, уже можно считать строгим доказательством. Беда только в том, что такое объяснение занимает ещё больше места, чем доказательство методом двух включений.

Для формального доказательства тождеств применяют также *метод характеристических функций. Характеристической функцией χ_A множества A* называют функцию на множестве $\mathcal{U}$, определённую так:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Ясно, что само множество A однозначно восстанавливается по своей характеристической функции: $A = \{x \in \mathcal{U} \mid \chi_A(x) = 1\}$.

Для характеристической функции произвольного множества A верно равенство ${\chi_A}^2 = \chi_A$ (имеется в виду, что для любого $x \in \mathcal{U}$ выполнено равенство $(\chi_A(x))^2 = \chi_A(x)$). Следующие равенства тоже довольно очевидны:

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B; \quad \chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A.$$

Чуть-чуть поразмыслив, мы убеждаемся в справедливости следующей формулы:

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B.$$

Докажем с помощью характеристических функций тождество $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Для его левой части

$$\chi_{\overline{A \cup B}} = 1 - (\chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B) = 1 - \chi_A - \chi_B + \chi_A \cdot \chi_B.$$

Для правой части

$$\chi_{\overline{A}\cap\overline{B}} = (1-\chi_A)\cdot(1-\chi_B) = 1-\chi_A-\chi_B+\chi_A\cdot\chi_B.$$

Так как характеристические функции равны, то равны и множества. Тождество доказано.

Упражнения

1) *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Изобразите следующие множества на диаграммах Эйлера–Венна и выразите через χ_A, χ_B и χ_C их характеристические функции:

а) $A \triangle B$;

б) $(A \triangle B) \triangle C$.

2) Какие из следующих тождеств верны и почему:

а) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

б) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$;

в) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$?

3) Сколько всего различных операций от трёх множеств можно выразить формулой через операции объединения, пересечения и дополнения? (Тождественно равные операции считаются совпадающими.)

Самостоятельная работа 09.2000

Задача 1. Найдите сумму первых 15 членов арифметической прогрессии, если её 8-й член равен 11.

Задача 2. Торговец принёс на рынок мешок орехов. Первый покупатель купил 1 орех, второй — 2 ореха, третий — 4, и так далее: каждый следующий покупатель покупал вдвое больше орехов, чем предыдущий. Орехи, купленные последним, весили 50 кг, после чего у продавца остался один орех. Сколько килограммов орехов было у продавца вначале? (Все орехи одинаковые.)

Задача 3. В некоторой арифметической прогрессии $a_m = -a_n$ для каких-то натуральных m и n, где $m < n$. При каких m и n эта прогрессия обязательно содержит нуль и под каким номером?

Задача 4. Докажите: сумма n-го треугольного и n-го квадратного числа на n больше, чем n-е пятиугольное число. Попробуйте решить задачу двумя способами — алгебраически и геометрически.

Контрольная работа 10.2000

Задача 1. Найти произведение первых 11 членов геометрической прогрессии, если её 6-й член равен -1.

Задача 2. Вычислите: **а)** сумму всех трёхзначных чисел, делящихся на 13; **б)** $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots-\frac{1}{512}$.

Задача 3. Количество членов геометрической прогрессии чётно. Сумма всех её членов в 3 раза больше суммы членов, стоящих на нечётных местах. Найдите знаменатель прогрессии.

Задача 4. **а)** Докажите, что n-е пятиугольное число P_n задаётся формулой $P_n = (3n^2-n)/2$.

б) Найдите арифметическую прогрессию, сумма первых n членов которой равна P_n.

Задача 5. В некоторой арифметической прогрессии сумма первых n членов равна сумме первых m членов (где $m < n$). Докажите, что сумма первых $n + m$ членов этой прогрессии равна нулю.

Для оценки 4 достаточно решить первые 3 задачи, а для оценки 5 достаточно решить любые 4 задачи.