Геометрические преобразования

А. Симметрия, сдвиг, поворот, гомотетия

Симметрия относительно прямой ℓ – функция, переводящая каждую точку X плоскости в такую точку Y, что отрезок XY перпендикулярен прямой ℓ и делится этой прямой пополам.
Симметрия относительно точки O – функция, переводящая каждую точку X плоскости в такую точку Y, что O – середина XY.
Сдвиг (= параллельный перенос) на AB – функция, переводящая каждую точку X плоскости в такую точку Y, что $XY = AB$, $XY \parallel AB$ и луч XY направлен в ту же сторону, что луч AB.
Поворот вокруг точки O на угол α (α – число из отрезка $[-180, 180]$) переводит каждую точку X в такую точку Y, что $OX = OY$, $\angle XOY = |\alpha|$ и Y находится в направлении против часовой стрелки от X, если $\alpha > 0$, и по часовой стрелке от X, если $\alpha < 0$.
Гомотетией с центром в O и коэффициентом k при $k>0$ называется функция H_O^k, переводящая каждую точку X в точку Y, лежащую на луче OX, для которой $|OY| = k\cdot|OX|$. При $k<0$ гомотетия H_O^k определяется как композиция $H_O^{|k|}$ и центральной симметрии с центром в точке O.

1. Найти $f\circ g$, если f есть симметрия относительно прямой ℓ, а g – симметрия относительно прямой m. (Рассмотреть сучаи пересекающихся ℓ и m и параллельных ℓ и m.)

2. Найти $f\circ g$ и $g\circ f$, если f и g – симметрии относительно точек A и B.

3*. Найти $g\circ f$ и $f\circ g$, если f – сдвиг на AB, а g – симметрия относительно точки O.

4. Пусть f – сдвиг на AB, g – симметрия относительно прямой ℓ. В каких случаях $f\circ g$ равно $g\circ f$?

5. Найти $f\circ g$, если g – поворот, f – осевая симметрия и ось симметрии проходит через центр поворота.

6. (1) Известно, что f – осевая симметрия и $f(A)=B$. Как найти ось симметрии? (2) Известно, что f – поворот и $f(A)=B$, $f(C)=D$. Как найти центр и угол поворота?

7. Две непересекающиеся окружности гомотетичны (одна из них переходит в другую при гомотетии). Где может находиться центр гомотетии?

8*. Найти композицию $H_A^2\circ H_B^{0.5}$, где A и B – две произвольные точки. (Указание. Это – сдвиг.)

9.* Найти композицию $H_A^2 \circ H_B^3$, где A и B – две произвольные точки. (Указание. Это – гомотетия.)

10.* Точка O называется центром симметрии фигуры (=множества точек) F , если образ F при симметрии относительно O совпадает с F . Доказать, что если фигура имеет 2 центра симметрии, то она (1) неограниченна, т.е. не содержится ни в каком круге; (2) имеет бесконечно много центров симметрии. (Фигура предполагается непустой.)

11.* Прямая ℓ называется осью симметрии фигуры F , если образ фигуры F при симметрии относительно ℓ совпадает с F. Известно, что F имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом в 7^0. Доказать, что F переходит в себя при повороте на 4^0 вокруг точки пересечения осей симметрии.

12.* Доказать, что если фигура имеет конечное число осей симметрии, то они пересекаются в одной точке и каждые две соседние из них образуют один и тот же угол.

13. Может ли 1983-угольник иметь центр симметрии?

14.* Чему может быть равна композиция 1983 центральных симметрий?

Мы определили поворот R_O^α на угол α вокруг O при $|\alpha| \leq 180$. Легко проверить, что при $|\alpha|, |\beta| \leq 180$ и $|\alpha+\beta| \leq 180$ выполняется равенство $R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta}$. Мы хотим определить R_O^α при любом действительном α так, чтобы $R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta}$ выполнялось всегда. Пусть α – любое число. Найдем такое n , чтобы $|\alpha/n| \leq 180$ (такое n существует по аксиоме Архимеда). Определим теперь R_O^α как $R_O^{\alpha/n} \circ \ldots \circ R_O^{\alpha/n}$ (n раз). Нужно проверить корректность этого определения, доказав, что если n и m – два натуральных числа и $|\alpha/n|$, $|\alpha/m| \leq 180$, то $R_O^{\alpha/n} \circ \ldots \circ R_O^{\alpha/n}$ (n раз) $= R_O^{\alpha/m} \circ \ldots \circ R_O^{\alpha/m}$ (m раз).

15.* Сделайте это. (Указание. Рассмотрите сначала случай, когда m кратно n . Затем рассмотрите общее кратное m и n .)

16.* Докажите, что при нашем определении $R_O^\alpha \circ R_O^\beta = R_O^{\alpha+\beta}$ при всех α и β .

17.* Докажите, что R_O^α – тождественная функция тогда и только тогда, когда $\alpha = 360k$, где k – целое.

Б. Движения

Движением (перемещением, изометрией) называется взаимно однозначная функция $f: P \to P$ (P – множество точек плоскости), сохраняющая расстояния, т.е. такая, что $|f(X)f(Y)| = |XY|$ при всех $X, Y \in P$. (В дальнейшем мы увидим, что условие взаимной однозначности можно отбросить: всякая функция $f: P \to P$, сохраняющая расстояния, взаимно однозначна.)

18. Докажите, что осевая и центральная симметрии, сдвиги и повороты являются движениями. Докажите, что композиция движений и преобразование, обратное к движению – движения.

19*. Определение движения можно дать и для функций на прямой. Именно, назовем $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ движением, если для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $|f(y) - f(x)| = |y - x|$. Доказать, что любое движение на прямой имеет вид $f(x) = x + C$ или $f(x) = -x + C$ при некотором C.

20. Доказать, что движение переводит отрезки в отрезки, лучи в лучи, прямые в прямые и сохраняет углы: если f – движение, A, B, C – точки, то образ отрезка (луча, прямой) AB при f есть отрезок (луч, прямая) $f(A)f(B)$ и $\angle ABC = \angle f(A)f(B)f(C)$.

В. Классификация движений

Точка x называется неподвижной точкой функции f, если $f(x)=x$.

21. (Теорема о трёх гвоздях.) Если движение f имеет 3 неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, то оно – тождественное (т.е. все точки неподвижны).

22. Доказать, что если движение имеет две различные неподвижные точки A и B, то оно – либо тождественное, либо симметрия относительно прямой AB.

23. Найти все движени , для которых данная точка A неподвижна (и доказать, что других не бывает).

24. Доказать, что любое движение может быть представлено в виде композиции не более чем 3 симметрий.

25. Доказать, что любая функция $f: P \to P$ (P – множество точек плоскости), сохраняющая расстояния, взаимно однозначна и, тем самым, является движением. (Указание. Доказать, что f представима в виде композиции нескольких симметрий.)

26*. Доказать, что любое движение плоскости есть либо сдвиг, либо поворот, либо скользящая симметрия – композиция осевой симметрии и сдвига, направление которого параллельно оси симметрии. (Теорема Шаля.)

Г. Ориентация

Все движения можно разбить на 2 непересекающихся класса – сохраняющих ориентацию ("не переворачивающих плоскость") и обращающих её ("переворачивающих плоскость"). Повороты (в том числе центральные симметрии) и сдвиги сохраняют ориентацию, осевые симметрии обращают её. Следующая таблица позволяет определить класс $g \circ f$, если известны классы g и f.

$g \backslash f$	сохр	обр
сохр	сохр	обр
обр	обр	сохр

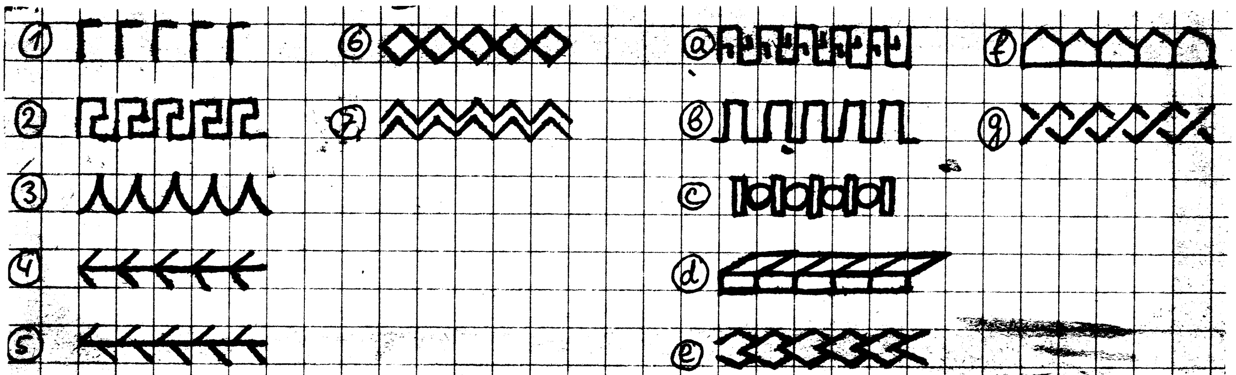
Решение некоторых из следующих задач облегчается, если использовать эти сведения. К сожалению, нам придется принять сформулированные утверждения без доказательства, так как простое и точное определение "сохранения ориентации" нам пока недоступно.

27.* Может ли композиция 1983 осевых симметрий быть поворотом?

28.* Доказать, что композиция двух поворотов с различными центрами есть либо поворот, либо сдвиг.

Д. Группа симметрий.

29. Пусть F – фигура на плоскости. Движение, при котором образом F является сама фигура F, называется симметрией фигуры F, а множество всех таких движений – группой симметрий фигуры F. Подберите для каждой картинки слева картинку справа, имеющую ту же группу симметрий (картинки предполагаются неограниченно продолжающимися; при сравнении двух картинок предполагается, что они перенесены в одно и то же место плоскости).



30. Сколько элементов имеет группа симметрий (1) разностороннего; (2) равнобедренного; (3) равностороннего треугольника?

31.* Нарисовать фигуру, группа симметрий которой содержала бы 5 элементов.

32.* Рассмотрим игру со следующими правилами. Написана конечная последовательность букв a, b, c (такие последовательности мы будем называть словами). Разрешается в любом месте заменить b на acc и наоборот, ca на $accc$ и наоборот, а также вставить или вычеркнуть aa, bb и $cccc$. Два слова P и Q назовем эквивалентными, если одно из них можно перевести по этим правилам.

$b \leftrightarrow acc$
$ca \leftrightarrow accc$
$aa \leftrightarrow$
$bb \leftrightarrow$
$cccc \leftrightarrow$

Докажите, что слова a и b не эквивалентны. Какое максимальное число попарно не эквивалентных слов можно найти? (Указание. a и b – осевые симметрии квадрата, c – поворот.)

33.* Говорят, что движение f имеет конечный порядок, если $f^n = e$ для некоторого n; наименьшее такое n называется порядком f. (Здесь f^n есть $f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n раз), а e - тождественное движение.) Например, порядок симметрии равен 2. Доказать, что если $f^k = e$ для некоторого k, то порядок f является делителем k.

Е. Конгруэнтность.

Две фигуры F и G называются конгруэнтными, или равными, если существует движение f, переводящее F в G, т.е. такое, что образ F при f равен G.

34. Докажите, что (1) если A конгруэнтно B, а B конгруэнтно C, то A конгруэнтно C; (2) если A конгруэнтно B, то B конгруэнтно A.

35.* Может ли фигура A быть конгруэнтна своей части B, т.е. такой фигуре B, что $B \subset A$, $B \neq A$?

36.* Может ли ограниченное множество на прямой быть конгруэнтным своей части? Может ли ограниченное множество на плоскости быть конгруэнтным своей части? (Множество ограничено, если оно содержится в некотором отрезке или в некотором круге.)

37.* Конгруэнтны ли множества $\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{2}[$ и $\mathbb{Q} \cap]-\infty, \sqrt{3}[$ на прямой?

38.** Представить каждое из множеств предыдущей задачи в виде объединения двух непересекающихся частей так, чтобы первая часть первого множества была конгруэнтна первой части второго, а вторая часть первого множества - второй части второго.

39.* Доказать, что если фигуры A и B конгруэнтны, то между их группами симметрий S_A и S_B можно установить взаимно однозначное соответствие $\Phi: S_A \to S_B$, сохраняющее композицию: если $f, g \in S_A$, то $\Phi(f \circ g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$. Это утверждение выражают словами: "группы симметрий конгруэнтных фигур изоморфны", а функцию Φ называют изоморфизмом.

40.* Доказать, что если A и B - две фигуры на плоскости и существует взаимно однозначная функция $f: A \to B$, сохраняющая расстояния, то эту функцию можно доопределить на точках плоскости, не входящих в A, превратив её в движение. (Отсюда следует, что фигуры A и B конгруэнтны.)

Ё. Разные задачи.

41.* Движение f таково, что $f \circ f = e$, т.е. $f(f(x)) = x$ для всех x. Доказать, что f - осевая или центральная симметрия.

42.* Движение f имеет неподвижную точку x. Доказать, что движение $g \circ f \circ g^{-1}$ (где g - любое движение) также имеет неподвижную точку.

43. Доказать, что если f – движение, то точки x, $f(x)$, $f(f(x))$,... лежат на окружности или на одной или двух прямых.

44*. Пусть T – множество всех сдвигов, V – множество всех векторов на плоскости. Построить взаимно однозначную функцию $\Phi: T \to V$, при которой композиции в T соответствует сумма в V, т.е. $\Phi(f \circ g) = \Phi(f) + \Phi(g)$. Как связаны $\Phi(f)$ и $\Phi(f^{-1})$ при построенном f? (Утверждение о существовании функции Φ с указанными свойствами выражают словами "группа движений относительно композиции изоморфна группе векторов относительно сложения", а Φ называют "изоморфизмом" этих "групп".)

45*. Доказать, что любые два сдвига коммутируют: если f и g – сдвиги, то $f \circ g = g \circ f$.

Ж. Преобразования подобия

Функция f называется преобразованием подобия с коэффициентом k, если она взаимно однозначна и $|f(X)f(Y)| = k|XY|$ для всех X, Y. (Таким образом, преобразования подобия с коэффициентом 1 суть движения.)

46. Доказать, что гомотетия с коэффициентом k есть преобразование подобия с коэффициентом $|k|$.

47. Доказать, что любое преобразование подобия есть композиция гомотетии и движения.

48. Доказать, что преобразование подобия переводит прямые в прямые, лучи в лучи, отрезки в отрезки, окружности в окружности и сохраняет углы.

49**. На прямоугольную карту города наложена другая карта того же города, в 5 раз более мелкая. Доказать, что можно, не сдвигая карт, проколоть их иголкой так, чтобы точки прокола изображали одну и ту же точку местности.

50**. Доказать, что всякое преобразование подобия с коэффициентом $k \neq 1$ имеет единственную неподвижную точку.

З. Логическое строение геометрии.

51. Описать логическое строение (что из чего выводится) фрагмента курса геометрии, содержащего учение о равенстве и подобии фигур. Он должен включать, в частности, утверждение о том, что два треугольника конгруэнтны тогда и только тогда, когда их соответствующие стороны и углы равны, определение и признаки подобия треугольников и т.п. Тщательно следите за отсутствием порочного круга. (Указание. Без аксиомы Архимеда здесь не обойтись!)

И. Преобразования векторов

Пусть f – движение плоскости (или преобразование подобия), a – некоторый вектор. Определим результат применения f к a. (Это – нечто новое: до сих пор мы применяли движения к точкам!) Для этого выберем произвольную точку A, отложим от неё вектор $\overrightarrow{AB}$, равный a, и результатом применения f к a объявим вектор $\overrightarrow{f(A)f(B)}$.

52.* Доказать, что результат применения определен корректно (не зависит от выбора точки A).

Таким образом, для каждого движения (или преобразования подобия) f определена ~~функция~~ $\bar{f}: V \to V$, сопоставляющая с каждым вектором $a \in V$ результат применения f к a. (V – множество векторов плоскости.)

53.* При каких f функция $\bar{f}$ тождественная?

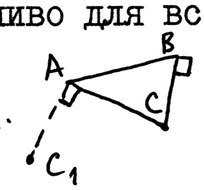
54.* Докажите, что функция $\bar{f}$ линейна. Это значит, по определению, что для всех $a, b \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$\bar{f}(a+b) = \bar{f}(a) + \bar{f}(b); \quad \bar{f}(\lambda a) = \lambda \bar{f}(a).$$

55.* Докажите, что если f, g и h суть движения (или преобразования подобия) и $h = g \circ f$, то $\bar{h} = \bar{g} \circ \bar{f}$. (Это выражают, говоря, что функция $f \mapsto \bar{f}$ есть гомоморфизм.)

56.* При каких f равенство $\bar{f}(a) = -a$ справедливо для всех a?

57.* Дан треугольник ABC. Построены точки C_1 и C_2 так, что $AC = AC_1$, $AC \perp AC_1$, $BC = BC_2$, $BC \perp BC_2$.



Доказать, что положение середины отрезка C_1C_2 не изменится, если сдвинуть точку C (оставив A и B на месте). (Указание. Как сдвинутся C_1 и C_2, если C сдвинуть на вектор h?)

58.* На сторонах треугольника ABC построены равносторонние треугольники с центрами O_1, O_2, O_3. Доказать, что треугольник $O_1O_2O_3$ равносторонний. (Указание. Если ABC равносторонний, это очевидно. Сдвиньте теперь точку B на произвольный вектор и посмотрите, на какие векторы сдвинутся другие точки.)

К. Задачи по геометрии

В предлагаемых задачах может оказаться полезным подвергнуть что-нибудь какому-нибудь преобразованию.

59. Даны два непересекающихся круга и точка, не принадлежащая ни одному из них. Через эту точку провести прямую, чтобы отрезок прямой, заключенный между кругами, делился этой точкой пополам.

60. Доказать, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой. (Указание. Точка и её образ при гомотетии лежат на одной прямой с центром гомотетии.)

61. Две окружности лежат по одну сторону от прямой. Найти такую точку X, чтобы касательные, проведенные из этой точки к окружностям, образовывали с прямой равные углы.

62. На плоскости дан угол и прямая. Построить квадрат так, чтобы две противоположные вершины его лежали на двух сторонах угла, а две другие вершины – на прямой.

63.* Точки A и B лежат по одну сторону от прямой PQ. Найти такую точку X на прямой PQ, чтобы $\angle AXP = 2\angle BXQ$.

64. В зеркальный угол попадает луч света и отражается от его сторон (угол падения равен углу отражения). Доказать, что после нескольких отражений от сторон угла луч вылетит из него. Каким должен быть угол, чтобы любой луч света, в него попавший, вернулся в направлении, противоположном тому, откуда пришел?

65. Даны 3 прямые, пересекающиеся в одной точке. Построить треугольник, для которого они являются биссектрисами.

66. На сторонах произвольного треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Доказать, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 равны между собой, пересекаются в одной точке и образуют между собой равные углы.

67. По одну сторону от прямой железной дороги расположены две деревни A и B. Где надо построить платформу MN данной длины a, чтобы общая длина дорог AM и BN, соединяющих её с деревнями, была минимальной?

68. Даны две окружности и прямая. Построить прямую, параллельную данной, на которой окружности высекают равные хорды.

69.* На одной из сторон угла дана точка M. Построить на этой же стороне точку N, для которой MN вдвое больше расстояния от N до другой стороны угла.

70.* Вписать в данный треугольник другой треугольник, стороны которого параллельны трем заданным прямым.

71. Точки C_1, C_2, C_3 являются точками пересечения медиан треугольников ABD_1, ABD_2, ABD_3. Доказать, что точки C_1, C_2, C_3 тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда точки D_1, D_2, D_3 лежат на одной прямой.

72. Пусть P – произвольная точка плоскости, K, L, M симметричны точке P относительно середин D, E, F сторон AB, BC, CA треугольника ABC. Доказать, что отрезки CK, AL, BM пересекаются в одной точке Q и делятся этой точкой пополам.

73. Вписать в данный треугольник квадрат.

74. Вписать в данный угол окружность, проходящую через данную точку.

75.* Вписать в данный угол окружность, касающуюся данной окружности.

76. Даны три концентрические окружности. Построить равносторонний треугольник, вершины которого лежат на данных окружностях.

77. Доказать, что точка пересечения высот, точка пересечения медиан и центр описанной окружности любого треугольника лежат на одной прямой и делят ее на отрезки, один из которых вдвое длиннее другого.

78. Провести через данную точку секущую к данной окружности так, чтобы высекаемая окружностью хорда была вдвое короче расстояния от данной точки до (ближайшей) точки пересечения секущей с окружностью.

79. Даны две окружности. Провести отрезок заданной длины, параллельный заданному направлению, концы которого лежат на заданных окружностях.

80.* Построить квадрат, если известны точки, лежащие на его сторонах.

81.* Даны три точки. Провести через них три прямые, при пересечении которых образуется треугольник, конгруэнтный данному.

82.** Дан угол и две точки внутри него. Построить равнобедренный треугольник с вершинами на сторонах угла, боковые стороны которого проходят через данные точки.

83.** В окружности даны две хорды AB и CD и на хорде CD точка Q. Найти на окружности такую точку M, чтобы прямые MA и MB высекали на хорде CD отрезок KL, делящийся в точке Q пополам.

84.** Внешним центром гомотетии двух окружностей называется центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей одну из окружностей в другую. Имеются 3 непересекающиеся окружности разных радиусов. Доказать, что их внешние центры гомотетии лежат на одной прямой.

Геометрические преобразования, с. 10 (приложение)

Задача № I.

Даны три словосочетания таджикского языка с русскими переводами:

а/ дӯсти хуби ҳамсояи шумо - хороший друг вашего соседа

б/ ҳамсояи дӯсти хуби шумо - сосед вашего хорошего друга

в/ ҳамсояи хуби дӯсти шумо - хороший сосед вашего друга

Задание. Определите, какому русскому слову соответствует по значению каждое из четырех встречающихся здесь таджикских слов.

Задача № 2.

Перед вами диалог на новогреческом языке, записанный русскими буквами:

- Ксерете афтон тон антропон?
- Нэ, ксеро.
- Пийос инэ афтос о антропос?
- Афтос о антропос инэ о Эллинас апо тин Кипрон. То онома афту ту антропу инэ Андреас.
- Мила Эллиника?
- Фисика, мила Эллиника поли кала. Ке мила Русика.
- Ке сис, милате Русика кала.
- Охи, эго ден мило Русика. Ксеро моно мэрикус лексис ке фрасис. Мило ке графо Англика кала. Ке сис, ксерете Англика?
- Нэ, ксеро афти ти глосса.
- Афто инэ кала.

Задание. Переведите этот диалог на русский язык.

Задача № 3.

Перед нами зашифрованный русский текст.

I 2+3+4+5, 6+4+6 7+8+9+4+I0+II 2+4+I2+4+I3+I4.

I I5+6+I6+7+I6 7+8+9+I4 8+8. 6+I0+I6 7+8+9+4+8+I0

2+4+I2+4+I3+I7 I5+6+I6+7+8+8, I0+I6+I0 7+8+9+I7+I0

I8+I6+I9+II+9+8 2+4+I2+4+I3. 2+4 6+4+20+I2+I4+5

7+8+9+8+3+3+I4+5 2+4+I2+4+I3+I4 2+4+I3+I7+I5+I9+I+5+I0+I5+I

I6+I3+6+I7.

Каждой букве соответствует одно число, причем разным буквам соответствуют разные числа /е и ё считаются одной буквой/; зашифрованные буквы в пределах одного слова разделяются плюсами; знаки препинания в тексте сохраняются.

Задание. Расшифруйте этот текст.

Задача № 4.

В русском языке разные грамматические формы одного и того же слова могут иногда совпадать. Например, слово <u>солдат</u> можно понять и как стоящее в единственном числе /<u>солдат приехал</u>/ и как стоящее во множественном /<u>взвод солдат</u>/.

Задание. Приведите такую форму русского существительного или прилагательного, чтобы ее можно было понять как слово, стоящее в именительном, родительном, дательном, винительном, творительном или предложном падеже, то есть, короче, чтобы можно было приписать этой форме любой падеж.