Разные задачи о последовательностях

I. Существует ли такая последовательность $a: a_0, a_1, \ldots$, что $a_{k+l} = a_k + a_l + kl$ при всех натуральных k и l ?

2. Известно, что $x_0 = x_{100} = 0$, $x_n \leqslant (x_{n-1} + x_{n+1})/2$ при n от I до 99. Доказать, что $x_n \leqslant 0$ при n от I до 99.

3. Последовательность a определена так: $a_0 = 1$, $a_1 = 7$ a_{n+1} = (остаток от деления на 347 числа $2^{a_{n-1}}$ + число учеников в $a_n + 1$ -ой школе г. Москвы). Доказать, что последовательность a периодична. (Это значит, что, начиная с некоторого места, повторяется одна и та же последовательность цифр.)

4. Последовательность a такова: $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ Доказать, что $a_n \leqslant 3$ при всех n.

5. Последовательность a такова: $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 1/a_n$. Доказать, что эта последовательность не ограничена сверху.

6. (Продолжение.) Доказать, что $a_n \geqslant \sqrt{2n}$

7.* Доказать, что последовательность $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ монотонно неубывает. (Указание. Можно использовать неравенство среднего арифметического и геометрического или бином Ньютона.)

8.* (Продолжение.) Доказать, что эта последовательность ограничена.

9. При каких действительных c последовательность a: $a_n = n \cdot \{cn\}$ ограничена? ($\{x\}$ – дробная часть x .)

I0. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ при любых m и n. Доказать, что последовательность a_n/n ограничена.

Назовем числом перемен знака последовательности число пар соседних членов разных знаков, которые получатся, если вычеркнуть из нее все нулевые члены.

II. Доказать, что последовательность $a_0, a_0 + a_1, \ldots, a_{n-1} + a_n, a_n$ обладает не большим числом перемен знака, чем последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n$

I2. Тот же вопрос для последовательности $a_0,\ a_0 + a_1,\ a_0 + a_1 + a_2,\ \ldots,\ a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

I3. Доказать, что если последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет k перемен знака, то последовательность $a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_{n-1}, -a_n$ имеет их не менее $k+1$.

I4. Тот же вопрос для последовательности $a_0,\ a_1 - 2a_0,\ a_2 - 2a_1, \ldots,\ a_n - 2a_{n-1},\ -2a_n$.

I5. Существует ли такая последовательность натуральных чисел, что каждое целое положительное число однозначно представимо в виде разности двух членов этой последовательности?