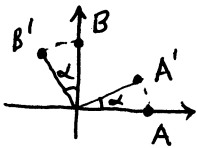


Повороты и тригонометрия

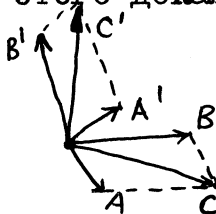
Выберем на плоскости прямоугольную систему координат. Мы будем рассматривать повороты вокруг начала координат.



1. Найти координаты точки, в которую переходит точка $A(1, 0)$ при повороте на угол α вокруг начала координат.

2. Тот же вопрос для точки $B(0, 1)$.

Мы хотим выяснить, куда переходит произвольная точка (x, y) . Для этого докажем некоторые свойства поворотов.*)

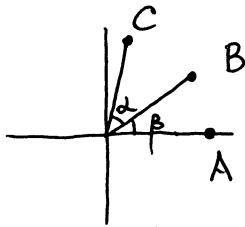


3. (Аддитивность.) Пусть $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ и точки A', B', C' получаются из A, B, C поворотом вокруг точки O . Тогда $\vec{OC'} = \vec{OA'} + \vec{OB'}$.

(Указание. При повороте — как и при всяком движении — параллелограмм переходит в параллелограмм.)

4. (Однородность.) Пусть $\vec{OB} = k \cdot \vec{OA}$ и точки A', B' получаются из точек A, B поворотом вокруг O . Тогда $\vec{OB'} = k \cdot \vec{OA'}$.

5. Доказать, что точка (x, y) при повороте на угол α переходит в точку $(x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha)$. (Указание. Согласно задаче 3, для нахождения образа точки (x, y) достаточно найти образы точек $(x, 0)$ и $(0, y)$; это делается с помощью 1, 2, 4.)



6. Точка B получается из точки $A(1, 0)$ поворотом на угол β . Пользуясь задачей 1 и предыдущей задачей, найти координаты точки C , получающейся из B поворотом на угол α , т.е. точки $R^\alpha(R^\beta(A))$.

7. Пользуясь результатом предыдущей задачи и тем, что $R^\alpha(R^\beta(A)) = R^{\alpha+\beta}(A)$, выразить $\cos(\alpha + \beta)$ и $\sin(\alpha + \beta)$ через $\cos \alpha, \sin \alpha, \cos \beta, \sin \beta$.

Замечание. Как отмечалось в "Геометрических преобразованиях", можно определить R^α при любых α (а не только при $|\alpha| \leq 180^\circ$) так, что $R^\alpha \circ R^\beta = R^{\alpha+\beta}$. Определив $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ как координаты точки $R^\alpha((1, 0))$, мы видим, что выведенные в задаче 7 формулы справедливы при всех α и β .

8. Вывести "формулы приведения" для $\cos(\alpha + 90^\circ), \cos(\alpha + 180^\circ), \cos(\alpha + 270^\circ), \sin(\alpha + 90^\circ), \sin(\alpha + 180^\circ), \sin(\alpha + 270^\circ)$, выражающие их через $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$.

9.* При каких a существует такое x , что (1) $\sin x = a$ и $\cos x = 4/5$; (2) $\sin x = a$ или $\cos x = 4/5$?

10.* Известно, что числа a и b таковы, что $\cos x + \sqrt{3} \sin x = a \cos(x + b)$ при всех x . Найти a и b .

* Преобразования, обладающие этими свойствами, называются линейными. Повороты, как и все движения, сохраняющие точку O , линейны (но не испытывают всех линейных преобразований).