М н о г о ч л е н ы

А. Кольцо многочленов

Определения. Многочленом называется выражение $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, где a_i – числа, называемые коэффициентами. Два многочлена считаются равными, если равны их коэффициенты. При записи обычно опускаются члены с нулевым коэффициентом и единичные коэффициенты, так что $1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2$ записывается как $1 + x^2$ (или $x^2 + 1$ – слагаемые часто переставляют). Степенью ненулевого многочлена P называют наибольшую из степеней его членов (с ненулевыми коэффициентами). Она обозначается $\deg P$ (degree (англ) = степень).

Определим операции сложения и умножения многочленов. Суммой многочленов $a_0 + a_1 x + \ldots$ и $b_0 + b_1 x + \ldots$ называется многочлен $c_0 + c_1 x + \ldots$, где $c_i = a_i + b_i$, а произведением – многочлен $d_0 + d_1 x + \ldots$, где $d_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$ (складываются произведения коэффициентов при степенях, дающих в сумме n).

I. Что можно сказать о $\deg(P+Q)$ и $\deg(PQ)$, если известно, что $\deg P$ и $\deg Q$ равны соответственно (I) 5 и 7; (2) 7 и 7?

2. Найти коэффициент при x^{13} в многочлене $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{1983})(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{1984})$

3. Известно, что произведение двух многочленов равно 0. Можно ли утверждать, что один из них равен 0 ?

4. Доказать, что если $P\cdot Q = P\cdot R$, причем $P \neq 0$, то $Q = R$. (Указание. См. предыдущую задачу.)

5. Для каких многочленов P найдется такой многочлен Q, что $PQ = 1$?

6. Доказать, что коэффициент при x^n в произведении $(a_0 + a_1 x + \ldots)(b_0 + b_1 x + \ldots)(c_0 + c_1 x + \ldots)$ равен сумме всех произведений вида $a_k \cdot b_l \cdot c_m$, для которых $k + l + m = n$.

7. Найти коэффициент при x^n в $(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^k$

8. Многочлены P и Q имеют целые коэффициенты. Все коэффициенты их произведения PQ делятся на 5. Доказать, что все коэффициенты P делятся на 5 или все коэффициенты Q делятся на 5.

Строго говоря, определение многочлена не вполне ясно: будет ли, например, $1 + y + y^2$ многочленом? Равен ли он многочлену $1 + x + x^2$? И вообще, что такое многочлен? Формальное определение таково: многочленом называется произвольная последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots$ в которой конечное число ненулевых членов. Отказавшись от требования конечности, мы получаем определение формального степенного ряда.

Ряды можно складывать и умножать по тем же формулам, что и многочлены.

9. Верно ли, что если произведение двух рядов равно 0, то один из них равен 0 ?

I0. Какие ряды имеют обратные? (Ряд Q – обратный для P, если $PQ = 1$.) Найти обратный ряд для $1 + x$.

II. Найти обратный ряд к ряду $1 + 2x + 4x^2 + \ldots + 2^n x^n + \ldots$

I2. Найти обратный ряд к ряду $1 + x + x^2/2! + \ldots + x^n/n! + \ldots$

I3. Определим производную P' многочлена $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ формулой $P' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}$.
Докажите правила дифференцирования: $(P+Q)' = P' + Q'$, $(cP)' = cP'$, $(PQ)' = P'Q + Q'P$.

Б. Значения

Значением многочлена $P = a_0 + a_1 x + \ldots$ на числе α называется число $P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \ldots$. Таким образом, с каждым многочленом сопоставляется функция $\alpha \mapsto P(\alpha)$, которую часто отождествляют с исходным многочленом (и обозначают той же буквой). Это отождествление согласовано со сложением и умножением: $(P+Q)(\alpha) = P(\alpha) + Q(\alpha)$ и $(PQ)(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)$. Число α называется корнем многочлена , если $P(\alpha) = 0$.

I4. Придумать многочлен степени 4, имеющий корни I,2,3,4.

I5. Найти все корни многочлена $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
(Указание. $(x-1)(x-2)(x-3) = ?$)

I6. Существует ли многочлен степени I, у которого $P(0) = 1$, $P(1) = 2$, $P(2) = 4$?

I7. Пусть P и Q – многочлены степеней m и n. Доказать, что композиция соответствующих функций также соответствует некоторому многочлену: найдется такой многочлен R, что $R(a) = P(Q(a))$ Какова степень многочлена R ?

I8. Найти сумму всех коэффициентов многочлена
$(1 + x - x^2)^{1983}(1 + 2x - 2x^2)^{1984}$.

I9. Многочлен $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ имеет корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$
Какие корни у многочленов (I) $a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \ldots + (-1)^n a_n x^n$;
(2) $a_n + a_{n-1} x + \ldots + a_{n-k} x^k + \ldots + a_0 x^n$?

20. (Продолжение.) Написать многочлен, корнями которого были бы числа $2\alpha_1, \ldots, 2\alpha_k$ (выразив его коэффициенты через a_i).

2I. Доказать, что все значения многочлена $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ (при всех действительных x) положительны.

22. Доказать, что если P – многочлен с целыми коэффициентами, a, b – целые числа, то число $P(b) - P(a)$ кратно $b - a$.

(Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.)

23. Доказать, что если α – целый корень многочлена $P=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ с целыми коэффициентами, то α – делитель a_0.

Эта задача позволяет найти все целые корни многочлена указанного вида, перебрав все делители a_0. Как показывает следующая задача, если старший коэффициент равен 1, то при этом мы найдём не только все целые, но и все рациональные корни.

24. Доказать, что если α – рациональный корень многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом I, то α – целое число. Используя это, доказать иррациональность $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{2}$.

Отказываясь от требования "старший коэффициент равен I", получаем такое обобщение (позволяющее найти все рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами).

25. Доказать, что если p/q – несократимая дробь, являющаяся корнем многочлена $a_n x^n + \ldots + a_0$ с целыми коэффициентами, то a_0 делится на p, а a_n делится на q. Выведите отсюда утверждения двух предыдущих задач.

26. Найдите все рациональные корни многочленов $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ и $6x^3 - 7x^2 + 1$, используя предыдущую задачу.

27. Существует ли такой многочлен P, что $P(n)=2^n$ при всех натуральных n?

28. Существует ли такой многочлен P с целыми коэффициентами степени не меньше I, что $P(n)$ – простое число при всех натуральных n?

29. Существует ли такой многочлен P, что $\cos 17x = P(\cos x)$ при всех x?

30. Рассмотрим все функции f, которые сопоставляют с каждым многочленом P некоторое число $f(P)$, причем $f(P+Q)=f(P)+f(Q)$, $f(PQ)=f(P)\cdot f(Q)$ и если $P=a_0$ – многочлен степени 0, то $f(P)=a_0$. Докажите, что функция, сопоставляющая с каждым многочленом (I) сумму всех его коэффициентов; (2) его свободный член; (3) его значение $P(a)$ в некоторой фиксированной точке a – таковы. Докажите, что (I) и (2) представляют собой частные случаи (3). Верно ли, что любая такая функция имеет вид $P \mapsto P(a)$ для некоторого a?

31. Какими должны быть коэффициенты a, b, c, чтобы многочлен ax^2+bx+c принимал целые значения во всех целых точках?

Многочлен $Q(x)=P(x+1)-P(x)$ называется "разностной производной" многочлена P.

32. Как связаны степени P и Q?

33. Доказать, что для любого многочлена Q степени не выше n найдется многочлен P степени не выше $n+1$ ("разностный интеграл"), для которого $P(x+1)-P(x)=Q(x)$ при всех x.

34. С последовательностью $a_0, a_1, a_2, \ldots$ проделали такую операцию: под каждыми двумя членами последовательности написали их разность. Затем эту операцию повторяют. Доказать, что если исходной была последовательность $P(0), P(1), \ldots$, где P – некоторый многочлен, то через несколько шагов получится последовательность из одних нулей. Верно ли обратное?

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ & a_1-a_0 & a_2-a_1 & \ldots \\ & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

35. Существует ли многочлен с целыми коэффициентами, для которого $P(7)=11$, $P(11)=13$?

В. Делимость и корни

Говорят, что многочлен P **делится** на многочлен Q (обозначение $P \vdots Q$), если существует такой многочлен R, что $P=Q\cdot R$.

36. Делится ли (I) x^2 на x^3+1 ; (2) x^2+3x на $2x+6$?

37. Какие многочлены являются делителями многочленов (I) 1 (2) 0 ; (3) $1+x$?

38. Доказать, что если P, Q, R, S – многочлены, $PQ=RS$ и $P \vdots R$, то $S \vdots Q$.

39. (Теорема о делении с остатком.) Пусть A и B – многочлены, $B \neq 0$. Тогда существуют и единственны такие многочлены Q (частное) и R (остаток), что $A=BQ+R$ и ($\deg R<\deg B$ или $R=0$).

40. Найти частное и остаток при делении x^7+x^5+1 на $2x^2-4$.

4I. Доказать, что если $B \vdots C$, то A и $A+B$ дают одинаковые остатки при делении на C.

42. Делится ли $x^{10}-1$ на x^2+1 ?

43. (Теорема Безу.) Пусть P – многочлен, a – число. При делении P на $x-a$ остаток равен $P(a)$.

44. Доказать, что свойства $P \vdots (x-a)$ и $P(a)=0$ равносильны.

45. При каких c многочлен $x^{1984}+x^3+c$ делится на $x-1$?

46. Если $a_1, \ldots, a_n$ – различные корни многочлена P, то P делится на $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

47. Доказать, что многочлен степени n имеет не более n корней.

48. Доказать, что если многочлены P и Q задают одну и ту же функцию, то есть $P(x)=Q(x)$ при всех x, то P и Q равны (то есть имеют равные коэффициенты).

49. (Формулы Виета.) Многочлен $x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0$ имеет k различных корней $x_1,\ldots,x_k$. Выразить коэффициенты $a_0,a_1,\ldots,a_{k-1}$ через корни.

50. Доказать, что для любого многочлена P свойства (I) $P(-1)=P(1)=0$ и (2) $P\ \vdots\ (x^2-1)$ равносильны.

5I. Доказать, что если $P\ \vdots\ Q$, то (множество корней P) $\subset$ (множество корней Q). Верно ли обратное?

52. Доказать, что если $P(a)=Q(a)$ при бесконечно многих a, то многочлены P и Q равны.

53. Известно, что многочлен P дает при делении на $x-1$ остаток 3, а при делении на $x+1$ остаток 5. Определить остаток при делении P на x^2-1.

54. При каких p и q остаток от деления $x^5+3x^3+px^2+qx+3$ на x^2+2 равен $x+1$?

55. При каких n и k многочлен x^n-1 делится на x^k-1 ?

56. Остатки при делении многочлена P на $(x-a)$, $(x-b)$ и $(x-c)$ равны соответственно a^2, b^2, c^2 (a,b,c – различные числа). Найти остаток при делении P на $(x-a)(x-b)(x-c)$.

57. Доказать, что если $\begin{cases} a+b+c+d=0, & a+2b+4c+8d=0 \\ a+3b+9c+27d=0, & a+4b+16c+64d=0 \end{cases}$

то $a=b=c=d=0$

58. Найти остаток от деления $x^{1984}-1$ на $(x^2+1)(x^2+x+1)$

59. Решить уравнение $x^3+6x^2+11x+6=0$
(Указание. Один из корней равен – I.)

60. (Интерполяция.) Пусть $x_1,\ldots,x_n$ – различные числа, $y_1,\ldots,y_n$ – произвольные числа. Доказать, что существует и единствен многочлен P, степень которого не выше $n-1$ и $P(x_i)=y_i$ при всех $i=1,\ldots,n$. (Другими словами, через n точек плоскости, никакие две из которых не лежат на одной вертикали, проходит единственный график многочлена степени не выше $n-1$.) (Указание. Единственность вытекает из того, что число корней многочлена не больше его степени. Для доказательства

существования рассмотрите сначала случай, когда все y_i, кроме одного, равны 0.)

61. Найдите многочлен степени не выше 3, для которого $P(0)=1$, $P(1)=-1$, $P(2)=1$, $P(3)=-1$

62. Многочлен P таков, что $P(x)=P(-x)$ при всех x. Доказать, что найдется такой многочлен Q, что $P(x)=Q(x^2)$ при всех x.

63. Многочлен P таков, что $P(x)=-P(-x)$ при всех x. Доказать, что найдется такой многочлен Q, что $P(x)=xQ(x^2)$ при всех x.

64. Доказать тождество $\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=1.$

65. Доказать, что если P – многочлен степени n и $P(x)$ целое при всех целых x, то все коэффициенты многочлена $n!\,P$ целые. Можно ли утверждать, что все коэффициенты P целые?

66. Обозначим через C_x^n многочлен $x(x-1)\ldots(x-n+1)/n!$ Доказать, что всякий многочлен степени n однозначно представляется в виде $a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1}+\ldots+a_1 C_x^1 + a_0$

67. (Продолжение.) Доказать, что для любого многочлена P свойства (I) $P(m)$ целое при всех целых m; (2) коэффициенты $a_n,\ldots,a_0$ в представлении, рассмотренном в предыдущей задаче, целые, – равносильны.

68. Доказать, что всякий многочлен степени 3 однозначно представляется в виде (I) $a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3$
(2) $a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$

69. Число a называется корнем многочлена P кратности k, если P делится на $(x-a)^k$. (Таким образом, обычные корни – корни кратности I.) Доказать, что свойства (I) a – корень многочлена P кратности k; (2) $P(a)=P'(a)=\ldots=P^{(k-1)}(a)=0$ ($P^{(i)}$ – i-ая производная многочлена P), – равносильны.

Д. Делимость в кольце многочленов.

Напомним, что многочлен P делится на Q (запись $P\,\vdots\,Q$), если существует такой многочлен R (частное), что $P=Q\cdot R$.

70. Что можно сказать о многочленах P и Q, если $P\,\vdots\,Q$ и $Q\,\vdots\,P$?

Многочлен S называется наименьшим общим кратным (НОК) многочленов P и Q, если выполнены 2 условия:

(I) S – их общее кратное, т.е. $S\,\vdots\,P$, $S\,\vdots\,Q$;

(2) если S' – любое общее кратное P и Q, то S' кратно S ($S' \vdots P$, $S' \vdots Q \Rightarrow S' \vdots S$).

71. Доказать, что многочлен S наименьшей степени, кратный P и Q, является их наименьшим общим кратным. (Указание. Пусть S' – любоее общее кратное. Разделите S' на S с остатком.)

72. Доказать, что любые два наименьших общих кратных данных многочленов отличаются на ненулевой постоянный множитель.

Две предыдущие задачи показывают, что наименьшее общее кратное всегда существует (что из определения сразу не вытекает) и почти единственно (если пренебречь постоянным множителем). Следующие задачи утверждают то же самое про наибольший общий делитель.

Многочлен S называется <u>наибольшим общим делителем</u> (НОД) многочленов P и Q, если выполнены 2 условия:

(I) S является их общим делителем, то есть $P \vdots S$, $Q \vdots S$

(2) если S' – их общий делитель, то S' – делитель S : $P \vdots S'$, $Q \vdots S' \Rightarrow S \vdots S'$

Заметим, что из определения не следует, что такой многочлен S существует. Мы докажем это впоследствии (и даже несколькими способами).

73. Найти многочлен, являющийся наибольшим общим делителем многочленов P и 0 (нуль).

74. Пусть P дает при делении на Q остаток R. Доказать, что многочлен S является наибольшим общим делителем P и Q тогда и только тогда, когда он является наибольшим общим делителем многочленов Q и R.

Таким образом, если мы желаем доказать существование или найти наибольший общий делитель многочленов P и Q, можно заменить P его остатком при делении на Q. Такую замену (переход от пары P, Q с $\deg P \geq \deg Q$ и $Q \neq 0$ к паре Q, (остаток от деления P на Q)) мы будем называть "преобразованием Евклида".

75. Пусть P, Q – произвольные многочлены, $\deg P \geq \deg Q$. Будем применять к ним преобразование Евклида, пока это возможно. Чем закончится этот процесс? Как найти после этого НОД (P, Q)?

Этот способ отыскания наибольшего общего делителя называется <u>алгоритмом Евклида</u>. Из этой задачи, в частности, следует, что наибольший общий делитель всегда существует.

76. Найти НОД многочленов (I) $x+1$ и x^2+1 ; (2) $x^{15}-1$ и x^9-1 ; (3) $x^4+3x^3+5x^2+4x+2$ и $x^5+x^4+2x^3-1$.

77. Пусть R_1 и R_2 являются наибольшими общими делителями многочленов P и Q. Как связаны они между собой?

78. (Другое доказательство существования НОД.) Пусть S – наименьшее общее кратное многочленов P и Q. Доказать, что $PQ \vdots S$ и частное R от деления PQ на S является наибольшим общим делителем многочленов P и Q. (Это рассуждение не дает, однако, способа отыскания НОД, т.к. требует знания наименьшего общего кратного.)

79. Пусть S и T – НОК и НОД многочленов P и Q. Доказать, что $PQ = kST$, где k – ненулевое число.

Будем говорить, что многочлен R выразим через многочлены P и Q, если найдутся такие многочлены A и B, что $R = AP + BQ$.

80. Выразимы ли многочлены: (I) $x+1$ через x и x^2; (2) 1 через x и $x+1$?

81. Какие многочлены выразимы через (I) $x+1$ и x; (2) x^2 и x^2+x?

82. Пусть P и Q – произвольные многочлены. Доказать, что сумма и разность многочленов, выразимых через P и Q, выразимы через P и Q. Доказать, что произведение произвольного многочлена и многочлена, выразимого через P и Q, выразимо через P и Q.

83. Пусть P и Q – произвольные многочлены. Доказать, что через P и $P-Q$ выразимы те же самые многочлены, что и через P и Q.

84. Доказать, что, применяя преобразование Евклида к паре многочленов, мы не меняем множество выразимых через них многочленов: если при делении P на Q получается остаток R, то через Q и R выразимы те же многочлены, что и через P и Q.

85. Пусть P и Q – произвольные многочлены. Доказать, что через них выразимы те и только те многочлены, которые делятся на НОД (P, Q). (Указание. См. предыдущую задачу.)

86. Выразить (I) $x+1$ через x^4+1 и x^3+1; (2) 1 через $(x-2)(x-3)$ и $x(x-1)$.

Следующие задачи содержат еще одно доказательство существования НОД любых двух многочленов.

Множество I многочленов называется <u>идеалом</u>, если оно обладает такими свойствами:

(I) $A, B \in I \Rightarrow A+B,\ A-B \in I$

(2) $A \in I$, B – любой многочлен $\Rightarrow AB \in I$

87. Будут ли идеалами: (I) множество всех многочленов с нулевым свободным членом; (2) множество всех ненулевых многочленов: (3) множество всех кратных данного многочлена P ; (4) множество всех многочленов, выразимых через данные многочлены P и Q ; (5) множество всех многочленов, для которых $P(1) = 0$; (6) множество всех многочленов, для которых $P(1)=P(2)=0$; (7) множество всех многочленов, для которых $P(1)+P(2)=0$; (8) множество всех многочленов с рациональными коэффициентами?

88. Пусть I – произвольный идеал, P – многочлен наименьшей степени, содержащийся в I . Доказать, что идеал I состоит из всех кратных многочлена P и только из них. (Указание. Использовать теорему о делении с остатком.)

Идеал, состоящий из всех кратных многочлена P , называется <u>главным</u> идеалом с <u>образующей</u> P . Таким образом, утверждение предыдущей задачи может быть сформулировано так: в кольце многочленов (с действительными коэффициентами) всякий идеал является главным.

89. Многочлены P и Q являются образующими одного и того же идеала I . Как они связаны?

90. Найти образующие идеалов (I) многочленов с нулевым свободным членом; (2) многочленов P , для которых $P(1)=0$; (3) многочленов P , для которых $P(1) = P(2) = 0$.

91. Пусть I – идеал всех многочленов, выразимых через P и Q ; D – его образующая. Доказать, что D есть наибольший общий делитель P и Q . (Из этой задачи следует, помимо существования наибольшего общего делителя, также и описание выразимых через P и Q многочленов, см. задачу 85.)

92. Пусть I и J – идеалы. Доказать, что $I \cap J$ и $I + J = \{i+j \mid i \in I, j \in J\}$– идеалы. Как связаны их образующие с образующими идеалов I и J ?

Многочлены P и Q называются <u>взаимно простыми</u>, если они не имеют общих делителей, кроме констант (т.е. если 1 = НОД(P,Q)).

93. Доказать, что свойства (I) P и Q взаимно просты; (2) существуют такие многочлены X и Y , что $XP+YQ=1$, – равносильны.

94. (Продолжение.) Доказать, что если P и Q взаимно просты, то найдутся такие X и Y , что $XP+YQ=1$, $\deg X < \deg Q$, $\deg Y < \deg P$.

95. (Основная лемма о взаимной простоте.) Если AB делится на C , а A взаимно просто с C , то B делится на C .
(Указание. Если $XA+YC=1$, то $B=B(XA+YC)$.)

Многочлен P, не являющийся константой, называется <u>простым</u>, или <u>неприводимым</u>, если в любом его разложении на 2 множителя один из них – константа: если $P=QR$, то Q или R – константа.

96. Доказать, что если P неприводим, а Q – любой многочлен, не делящийся на P, то Q взаимно прост с P.

97. Доказать, что если произведение двух многочленов делится на неприводимый многочлен P, то один из них делится на P.

98. (Продолжение.) Доказать то же самое для произведения произвольного числа многочленов.

99. Доказать, что всякий многочлен, отличный от константы, можно разложить в произведение неприводимых.

100. Доказать, что разложение на неприводимые множители единственно: если $A = P_1 \cdot \ldots \cdot P_n = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_m$ то $m = n$ и после подходящей перенумерации можно получить $P_i = c_i Q_i$, где c_i – константы.

101. Для каких многочленов P равенство $xP(x-1)=(x-26)P(x)$ справедливо при всех x?

102. Известно, что $(x-1)(x^2+px+q)=(x-3)(x^2+rx+s)=(x-5)(x^2+lx+m)$ при всех x. Найти p, q, r, s, l, m.

<u>Д. Основная теорема алгебры и ее следствия.</u>

До сих пор мы неявно предполагали, что коэффициентами многочленов являются действительные числа. Однако все наши рассуждения остаются в силе и для многочленов с комплексными коэффициентами. Комплексный случай даже проще вещественного, так как имеет место

<u>Основная теорема алгебры</u>. Всякий многочлен с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один (комплексный) корень.

Доказательство этой теоремы использует сведения из курса анализа и будет дано впоследствии.

103. Доказать, что всякий многочлен P с комплексными коэффициентами разлагается на линейные множители, т.е. представим в виде $k(x-a_1)\ldots(x-a_n)$, где n – степень P, $a_1, \ldots, a_n$ и k – комплексные числа.

104. Доказать, что если z – (комплексный) корень многочлена с действительными коэффициентами, то $\bar{z}$ – также его корень.

105. Как изменятся корни многочлена с комплексными коэффициентами и его разложение на линейные множители (задача 103), если все коэффициенты многочлена заменить на комплексно-сопряженные?

I06. Доказать, что в разложении на линейные множители (задача I03) многочлена с действительными коэффициентами все множители ($x-\alpha$) с $\alpha\notin\mathbb{R}$ можно разбить на пары $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$ комплексно сопряженных.

I07. Доказать, что всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных и квадратных множителей с действительными коэффициентами, т.е. представим в виде

$$c(x-a_1)\ldots(x-a_k)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_sx+q_s).$$

Обратите внимание, что в условии этой задачи нет ни слова о комплексных числах – они появляются только в её решении !

I08. Доказать, что всякий многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.

I09. Найти многочлен с действительными коэффициентами наименьшей степени, для которого $1+i$, $2-i$ и 3 – корни.

II0. Разложить на линейные множители (с комплексными коэффициентами) многочлены x^2+1, x^4+1, x^n-1, x^n+1.

III. Пусть P – многочлен с комплексными коэффициентами, $x_1,\ldots,x_s$ – его корни, $k_1,\ldots,k_s$ – их максимальные кратности. Доказать, что $P=a(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_s)^{k_s}$ где a – старший коэффициент многочлена P .

II2. Доказать, что многочлен степени n имеет n (комплексных) корней, если каждый корень учитывать столько раз, какова его кратность.

II3. Доказать, что для любых двух многочленов P и Q свойства (I) $P\,\vdots\,Q$ и (2) всякое комплексное число z , являющееся корнем Q кратности k , является корнем P кратности k ,– равносильны. (Напомним, что согласно нашему определению всякий корень кратности k является корнем кратности l при $l<k$!)

II4. Доказать, что если многочлен с действительными коэффициентами принимает во всех действительных точках неотрицательные значения, то его можно представить в виде $P=Q_1^2+\ldots+Q_l^2$ где $Q_1,\ldots,Q_l$ – многочлены с действительными коэффициентами.

II5. Пусть P – произвольный многочлен степени $n\geqslant 1$ с комплексными коэффициентами. Доказать, что задаваемая им функция $P:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ является наложением.

II6. (Продолжение.) Доказать, что при этом отображении каждая точка $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа точек, имеет ровно n прообразов.

II7. Доказать, что в задаче II4 можно положить $l=2$.

Е. Различные множества коэффициентов

Все рассмотренные в пп. А – Г свойства многочленов справедливы для многочленов с коэффициентами в любом поле (полем называется множество с операциями сложения, умножения, взятия обратного и противоположного, 0 и I, удовлетворяющим обычным аксиомам). В частности, все эти свойства справедливы для многочленов с рациональными, действительными и комплексными коэффициентами.

Однако если мы рассматриваем многочлены с целыми коэффициентами, то ситуация меняется (т.к. $\mathbb{Z}$ не поле: нет взятия обратного).

I18. Привести примеры, показывающие, что теорема о делении с остатком и теорема о главных идеалах не выполняются для многочленов с целыми коэффициентами.

К многочленам с целыми коэффициентами мы еще вернемся; рассмотрим теперь, что меняется при переходе от одного поля к другому (от $\mathbb{Q}$ к $\mathbb{R}$ и от $\mathbb{R}$ к $\mathbb{C}$). Соответствующие множества многочленов обозначаются $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{C}[x]$

I19. Доказать, что свойство делимости не меняется при расширении поля: если $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$, то $P \vdots Q$ в $\mathbb{Q}[x]$ равносильно $P \vdots Q$ в $\mathbb{R}[x]$. (Аналогично для $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{C}[x]$.)

I20. Доказать, что наибольший общий делитель не меняется при расширении поля: если $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$ и R – их наибольший общий делитель, то он останется их наибольшим общим делителем в $\mathbb{R}[x]$.

I2I. Какие многочлены являются неприводимыми (I) в $\mathbb{C}[x]$; (2) в $\mathbb{R}[x]$?

I22. Будут ли неприводимыми в $\mathbb{Q}[x]$ многочлены (I) $x-1$; (2) x^2-1; (3) x^2-2; (4) x^2+1 (5) x^3-2; (6) x^2+x+1; (7) x^3+x^2+x+1; (8) $x^4+x^3+x^2+x+1$; (9) x^4-2 ?

I23. Разложить многочлены предыдущей задачи на неприводимые множители в $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$.

Как видно из приведенных примеров, неприводимость (= простота), в отличие от взаимной простоты, существенно зависит от поля коэффициентов.

I24. При каких n многочлен $x^n+x^{n-1}+\ldots+x^2+x+1$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$?

Наиболее прост, как всегда, комплексный случай.

I25. Доказать, что многочлены $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ не взаимно просты тогда и только тогда, когда они имеют общий корень, т.е. существует такое $z \in \mathbb{C}$, что $P(z) = Q(z) = 0$.

I26. Пусть $P_1,\dots,P_n \in \mathbb{C}[x]$. Доказать, что следующие свойства равносильны:

(I) существуют такие многочлены $Q_1,\dots,Q_n \in \mathbb{C}[x]$, что $P_1Q_1+\dots+P_nQ_n=1$;

(2) не существует такого $z\in\mathbb{C}$, что $P_1(z)=\dots=P_n(z)=0$

I27. Доказать, что если многочлен $P\in\mathbb{Q}[x]$ имеет кратный корень в $\mathbb{C}$, то он приводим в $\mathbb{Q}[x]$ (т.е. разлагается на множители с рациональными коэффициентами).

Изучим теперь подробнее $\mathbb{Z}[x]$ (кольцо многочленов с целыми коэффициентами)

I28. Доказать, что если a – целый корень многочлена $P\in\mathbb{Z}[x]$ то $P=(x-a)\cdot Q$, где Q – многочлен с целыми коэффициентами (теорема Безу для $\mathbb{Z}[x]$; напомним, что теорема о делении с остатком, вообще говоря, неверна в $\mathbb{Z}[x]$!)

I29. Доказать, что если $P,Q\in\mathbb{Z}[x]$ таковы, что $P(x)=Q(x+1)$ при всех x, то они одновременно приводимы или неприводимы в $\mathbb{Z}[x]$.

Назовем <u>содержанием</u> многочлена с целыми коэффициентами наибольший общий делитель его коэффициентов.

I30. (Лемма Гаусса.) Доказать, что произведение двух многочленов с содержанием I есть многочлен с содержанием I. (Указание. Если все коэффициенты произведения PQ делятся на некоторое простое число p, а для сомножителей это не так, то произведение двух "ненулевых по модулю p" многочленов P и Q – "нулевой по модулю p многочлен".)

I3I. Доказать, что содержание произведения многочленов равно произведению их содержаний.

I32. Доказать, что если многочлен $P\in\mathbb{Z}[x]$ разлагается на множители с рациональными коэффициентами: $P=RS$, $R,S\in\mathbb{Q}[x]$, то он разлагается и на множители с целыми коэффициентами $P=R_1S_1$, причем R_1 и S_1 отличаются от R и S лишь рациональным множителем.

Таким образом, если многочлен $P\in\mathbb{Z}[x]$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$, то он неприводим и в $\mathbb{Z}[x]$.

I33. Вывести из предыдущей задачи утверждение о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами (если p/q – несократимая дробь, являющаяся корнем $P=a_nx^n+\dots+a_0$, то $a_0\vdots p$, $a_n\vdots q$).

I34. Придумать алгоритм, позволяющий по любому многочлену с целыми коэффициентами определить, будет ли он неприводим в $\mathbb{Z}[x]$ и $\mathbb{Q}[x]$. (Указание. (I) Если $P\vdots Q$, то $P(a)\vdots Q(a)$ при любом a; (2) Многочлен степени n определяется своими значениями в $n+1$ точке.)

I35. Доказать, что любой многочлен с целыми коэффициентами, отличный от I и – I, однозначно разлагается на неприводимые в $\mathbb{Z}[x]$ множители. (Указание. Воспользуйтесь установленной связью между разложениями в $\mathbb{Z}[x]$ и $\mathbb{Q}[x]$, а также однозначностью разложения в $\mathbb{Q}[x]$.)

I36. Доказать, что в $\mathbb{Z}[x]$ существуют НОД и НОК любой пары многочленов. (Напомним, что НОД – это общий делитель, делящийся на любой общий делитель, а НОК – общее кратное, делящее любое общее кратное.)

Разные задачи о многочленах

1. (Формула Тейлора) Доказать, что если P – многочлен, то $P(a+h) = P(a) + P'(a)h + P''(a)h^2/2! + \dots + P^{(n)}(a)h^n/n!$ (правая часть продолжается до тех пор, пока слагаемые не обращаются в нуль).

2. Доказать, что если многочлен $P \in \mathbb{R}[x]$ степени n имеет n (различных) вещественных корней, то многочлен P' имеет $n-1$ (различных) вещественных корней. Остается ли это утверждение верным, если разрешить корням совпадать и учитывать кратности?

3. Доказать, что многочлен $1 + x + x^2/2! + \dots + x^n/n!$ не имеет кратных корней

4. Пусть P – многочлен с комплексными коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Доказать, что найдется точка $z \in \mathbb{C}$ с $|z| = 1$, для которой $|P(z)| \geqslant 1$.

5. Дан пятиугольник $ABCDE$ и окружность радиуса 1. Доказать, что на окружности найдется точка M, для котрой $|MA|\cdot|MB|\cdot|MC|\cdot|MD|\cdot|ME| \geqslant 1$

6. Доказать, что комплексные корни многочлена P' лежат в выпуклой оболочке корней многочлена P. (Это значит, что если вбить в комплексную плоскость гвозди в корнях P и натянуть на них резинку, то корни P' окажутся внутри.)

7. (Оценка корней многочлена через коэффициенты.) Доказать, что любой корень многочлена $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ со старшим коэффициентом 1 не превосходит $\max(1, |a_{n-1}| + \dots + |a_0|)$

8. Доказать, что для любого p найдется многочлен степени p с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, все значения которого в целых точках делятся на p.

9. (Продолжение.) Доказать, что для простого p не существует многочлена меньшей степени со свойством, указанным в предыдущей задаче.

Комплексное число называется <u>алгебраическим</u>, если оно является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Все остальные числа называются <u>трансцендентными</u>.

10. Доказать, что существуют трансцендентные числа.

11. Если иррациональное число α таково, что при любом n неравенство $|\alpha - p/q| \leqslant 1/q^n$ имеет бесконечное число целочисленных решений, то α трансцендентно (теорема Лиувилля).

12. Доказать, что число $\alpha = 0{,}11000100\dots$ (единицы стоят на 1, 2, 6 (=3!), 24 (=4!),... местах после запятой) трансцендентно.

13. Доказать, что если $\alpha \neq 0$ – алгебраическое, то и $1/\alpha$ – алгебраическое число.

14. Доказать, что если α и β – алгебраические числа, то $\alpha+\beta$ и $\alpha\cdot\beta$ – алгебраические.

15. Доказать, что комплексное число z является алгебраическим тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ являются алгебраическими.

16. Пусть α – алгебраическое число. Рассмотрим все многочлены $P\in\mathbb{Q}[x]$, для которых $P(\alpha)=0$. Пусть P_0 – многочлен наименьшей степени среди них. Доказать, что любой многочлен $P\in\mathbb{Q}[x]$ для которого $P(\alpha)=0$, делится на P_0. (Указание. Множество таких P – идеал.) Многочлен P_0 называется <u>минимальным</u> многочленом алгебраического числа α.

17. Найти минимальный многочлен чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

18. Пусть $f:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ таково, что $f(P+Q)=f(P)+f(Q)$, $f(PQ)=f(P)\cdot f(Q)$ и $f(c)=c$ (c – константа = многочлен нулевой степени). Такие f называют <u>автоморфизмами</u> кольца $\mathbb{R}[x]$. Описать все автоморфизмы $\mathbb{R}[x]$. Какие из них являются взаимно однозначными?

19. Доказать, что если значения многочлена P степени n в $n+1$ идущих подряд целых точках – целые. то его значения во всех целых точках – целые.

20. Многочлен P с комплексными коэффициентами таков, что $P(x)$ действительно при действительных x. Доказать, что его коэффициенты действительны. Что можно сказать о коэффициентах P, если $P(ix)\in\mathbb{R}$ при всех действительных x?

21. (Критерий Эйзенштейна.) Доказать, что если многочлен $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ с целыми коэффициентами таков, что все коэффициенты (кроме старшего, равного 1) делятся на некоторое простое p, причем a_0 не делится на p^2, то он неприводим в $\mathbb{Z}[x]$. (Указание. "По модулю p" – т.е. пренебрегая кратными p членами – этот многочлен есть x^n, поэтому его сомножители должны быть степенями x (по модулю p), а тогда a_0 делится на p^2.)

22. Доказать, что многочлен $Q(x)=\dfrac{x^p-1}{x-1}=x^{p-1}+\ldots+1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$ тогда и только тогда, когда p простое. (Указание. Рассмотреть многочлен $Q(x+1)$ и воспользоваться критерием Эйзенштейна.)

23. Доказать, что если значение многочлена $P\in\mathbb{Z}[x]$ в трех целых точках, равно 1, то он не имеет целых корней.

24. Определить кольцо $\mathbb{R}[x,y]$ "многочленов от двух переменных" и доказать однозначность разложения на неприводимые в нем.

(Краткое указание. Многочлены с двумя переменными можно рассматривать как многочлены с одной переменной, коэффициенты которых - многочлены от другой переменной; далее поступать аналогично случаю $\mathbb{Z}[x]$.)

25. Доказать, что многочлен $1+x+x^2/2!+\ldots+x^n/n!$ имеет не более одного вещественного корня.

26. (Теорема Декарта.) Назовем <u>числом перемен знака</u> в последовательности действительных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$ число пар соседних членов разных знаков (если в последовательности есть нули, выкинем их и подсчитаем число пар после этого). Доказать, что число положительных корней (с учетом кратности) многочлена с действительными коэффициентами равно числу перемен знаков в последовательности его коэффициентов или меньше его на (положительное) четное число.

27. (Продолжение.) Доказать, что если все корни многочлена действительны, то в предыдущей задаче имеет место равенство.

28. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - корни степени n из единицы. Найти многочлен степени $n-1$, равный 1 в одном из этих корней и 0 в остальных. Установить, что модули всех его коэффициентов равны $1/n$.

29. В единичную окружность на комплексной плоскости вписан правильный n-угольник. Доказать, что если $P \in \mathbb{C}[x]$ - многочлен степени $n-1$, один из коэффициентов которого по модулю не меньше I, то $|P(z)| \geq 1$ хотя бы для одной точки z , являющейся вершиной n-угольника. (Ср. задачу 4.)

30. Многочлен P_n , для которого $P_n(\cos x) = \cos nx$, называется n-ым <u>многочленом Чебышёва</u>. Доказать, что такой многочлен существует, единствен, имеет вещественные коэффициенты и степень n .

31. (Продолжение.) Найти корни многочленов Чебышёва и их старшие коэффициенты. (Указание. Ответ "старший коэффициент равен I " неверен.)

32. (Продолжение.) Найти число решений уравнений $P_n = 1$ и $P_n = -1$ на отрезке $[-1, 1]$ (P_n - n-ый многочлен Чебышёва).

33. (Продолжение.) Доказать, что если многочлен P с действительными коэффициентами таков, что $|P(x)| \leq 1$ при $|x| \leq 1$, то уравнение $P(x) = P_n(x)$ имеет не меньше n решений (P_n - n-ый многочлен Чебышёва). (Указание. См. задачу 32.)

34. Доказать, что если P – многочлен степени n с действительными коэффициентами и со старшим коэффициентом 1, то $|P(x)| \geq 1/2^{n-1}$ хотя бы для одного $x \in [-1,1]$. Эту оценку нельзя улучшить.

35. Даны n точек $A_1 \ldots A_n$ и отрезок длины I. Доказать, что на отрезке найдется точка M, для которой $|MA_1| \cdot \ldots \cdot |MA_n| \geq 1/2^{2n-1}$.

36. Доказать, что многочлен $(x-a_1)\ldots(x-a_n)-1$ где $a_1, \ldots, a_n$ – различные целые числа, неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

Комплексное число называется <u>целым алгебраическим</u> числом, если оно есть корень многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом I.

37. Какие существуют целые алгебраические числа среди рациональных? Будет ли число $\sqrt{2}/2$ целым алгебраическим?

38. Доказать, что сумма и произведение целых алгебраических чисел – целое алгебраиское число.

39. Доказать, что число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}$ иррационально.

40. Функция $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сопоставляющая с каждой парой действительных чисел $\langle x,y \rangle$ число $f(x,y)$, такова, что при каждом x функция $y \mapsto f(x,y)$ совпадает с некоторым многочленом, а при каждом y функция $x \mapsto g(x,y)$ совпадает с некоторым многочленом. Доказать, что f можно представить как сумму слагаемых вида $c_{kl}x^k y^l$. (Указание. Множество действительных чисел несчетно.)

41. Даны произвольные комплексные числа $a_0 \ldots a_n$ (среди которых, возможно, есть совпадающие) и произвольные комплексные числа $z_0, \ldots, z_n$. Доказать, что существует единственный многочлен P степени не выше n, для которого $P(a_0) = z_0$, $P'(a_1) = z_1$, $P''(a_2) = z_2, \ldots, P^{(n)}(a_n) = z_n$

Заказ IOI-84. Тираж 50. ИПМ АН СССР