

Непрерывные функции

Пусть $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Говорят, что f непрерывна в точке $a \in M$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in M$, для которых $|x - a| < \delta$, выполнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

I. Сформулировать, что означает, что f не является непрерывной в точке a .

Отметим, что вопрос о непрерывности функции в точке, не входящей в ее область определения, лишен смысла!

2. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна в точке $x = \frac{1}{2}$; указать δ для $\varepsilon = 2$; $\varepsilon = 0.1$; $\varepsilon = 10^{-20}$

3. Доказать, что $f: M \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in M$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности x_0, x_1, \dots точек M , сходящейся к a , последовательность $f(x_0), f(x_1), \dots$ сходится к $f(a)$ (определение непрерывности по Гейне).

Терминология: f разрывна в $a \Leftrightarrow f$ имеет разрыв в $a \Leftrightarrow f$ не является непрерывной в a ; f непрерывна $\Leftrightarrow f$ непрерывна всюду $\Leftrightarrow f$ непрерывна во всех точках своей области определения.

4. Функция Дирихле $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ определена так: $D(x) = 1$ при $x \in \mathbb{Q}$, $D(x) = 0$ при $x \notin \mathbb{Q}$. Исследовать на непрерывность функции D , $x \mapsto x \cdot D(x)$.

5. Построить функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (1) разрывную в целых точках и непрерывную в остальных; (2) непрерывную в целых точках и разрывную в остальных; (3) разрывную в точках $1/n$ ($n = 1, 2, \dots$) и непрерывную во всех остальных.

6. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая и взаимно однозначная. Доказать, что f непрерывна.

7. Исследовать на непрерывность функцию Римана R , для которой $R(x) = 0$ при $x \notin \mathbb{Q}$ и $R(p/q) = 1/q$, если p/q — несократимая дробь.

8. Доказать, что монотонная функция имеет конечное или счетное множество точек разрыва.

9. Дано счетное множество $A \subset \mathbb{R}$. Построить монотонную функцию, разрывную во всех точках A и непрерывную во всех остальных.

10. Доказать, что множество точек разрыва любой функции можно представить в виде счетного объединения замкнутых множеств. (Указание. Точку a назовем точкой разрыва величины ε , если в любом содержащем ее интервале найдутся две точки x, y , для которых $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Множество точек разрыва данной величины замкнуто.)

II. Может ли функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ быть непрерывной во всех иррацио-

на рациональных точках и разрывной во всех иррациональных? непрерывной во всех иррациональных точках и разрывной во всех рациональных? (Указание. См. предыдущую задачу.)

12. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является "точечным пределом" последовательности непрерывных функций f_n : для любого x последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$. Как считал Коши, откуда следует, что f непрерывна. Покажите, что это не так!

13. (Продолжение.) Может ли функция f быть всюду разрывной?

14. Доказать, что если две непрерывные функции $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ совпадают на множестве \mathbb{Q} , то $f = g$.

Операции над непрерывными функциями

15. Пусть $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны в точке a . Доказать, что функции $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ ($(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ и т.п.) непрерывны в a . Если при этом g не обращается в 0 на M , то и f/g непрерывна в a .

16. Что можно сказать о непрерывности $f + g$ и $f \cdot g$ в точке a , если известно, что (1) ровно одна из функций f и g непрерывна в a ; (2) обе функции разрывны в a ?

17. Функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке a , функция g определена на множестве K , содержащем множество значений f и непрерывна в $f(a)$. Доказать, что функция $g \circ f(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке a .

18. Доказать непрерывность многочленов. Доказать непрерывность функции $f: x \mapsto \sqrt{x}$ (в любой точке области определения).

19. Говорят, что функция f удовлетворяет условию Липшица с константой C , если $|f(y) - f(x)| < C|y - x|$ для любых x и y из ее области определения. Доказать, что всякая функция, удовлетворяющая условию Липшица, непрерывна.

20. Известно, что $|\sin x - \sin y|$ и $|\cos x - \cos y|$ не превосходят $|x - y|$ (почему?). Доказать непрерывность функций \sin и \cos во всех точках их области определения.

21. Может ли непрерывная функция $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ не удовлетворять условию Липшица ни с какой константой?

22. Доказать, что если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна, $f(1/n) \rightarrow 0$ и $f(-1/n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то f непрерывна в 0.

23. Известно, что $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^0 = 1$ и функция $x \mapsto a^x$ монотонна ($a > 0$, $a \neq 1$). Доказать, что эта функция непрерывна ("непрерывность показательной функции")

О логарифме, степенной и обратных тригонометрических функциях см. далее.

24. (Локальная ограниченность.) Доказать, что если f непрерывна в точке a , то найдется такой интервал, содержащий a , в котором f ограничена.

25. (Сохранение знака.) Доказать, что если f непрерывна в a и $f(a) > 0$, то найдется такой интервал, содержащий a , что $f(x) > 0$ для всех x из этого интервала (для которых $f(x)$ определен).

Основные теоремы о непрерывных функциях.

26. (Ограниченность.) Функция f , определенная и непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на нем. (Указание. I. Применить лемму Гейне - Бореля. 2. Если функция не ограничена на отрезке, то она не ограничена на одной из его половин.)

27. (Достижение максимума.) Функция f , определенная и непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет точку максимума: существует такое $c \in [a, b]$, что $f(x) \leq f(c)$ для всех $x \in [a, b]$. (Указание. Пусть M - точная верхняя грань значений f . I. Если f не принимает значения M , то функция $1/(M - f(x))$ не ограничена. 2. Если $f(x) < M$, то f меньше M и в некотором интервале, содержащем x . 3. У последовательности x_i , для которой $f(x_i) \rightarrow M$, есть сходящаяся подпоследовательность.)

28. (Промежуточные значения.) Функция f , определенная и непрерывная на отрезке $[a, b]$ и принимающая на его концах значения разных знаков, имеет корень: если $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, то существует $c \in [a, b]$, для которого $f(c) = 0$. (Указание. Если f принимает значения разных знаков на концах некоторого отрезка, то одна из половин отрезка также обладает этим свойством.)

29. (Равномерная непрерывность.) Функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $x, y \in M$ из $|x - y| < \delta$ следует $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Доказать, что любая функция, определенная и непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна. (Указание. Пусть x_n и y_n таковы, что $x_n - y_n \rightarrow 0$, а $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Выберем из x_n сходящуюся подпоследовательность.)

30. Какие из сформулированных утверждений останутся верными, если заменить отрезок интервалом?

31. Какие из сформулированных утверждений останутся верными, если заменить отрезок замкнутым ограниченным множеством?

32. Известно, что f определена и непрерывна на $[0, 1]$, $f(x) > x$ при всех $x \in [0, 1]$. Доказать, что найдется такое c , что $f(x) \geq x + c$ при всех $x \in [0, 1]$.

33. Для функции f справедливо такое свойство: если p лежит между $f(x)$ и $f(y)$, то оно равно $f(z)$ для некоторого z , лежащего между x и y . Следует ли отсюда, что f непрерывна?

34. Доказать, что если f и g определены и непрерывны на $[0, 1]$, причем $f(0) < g(0)$ и $f(1) > g(1)$, то найдется такая точка $x \in [0, 1]$, что $f(x) = g(x)$.

35. Доказать, что всякое непрерывное отображение $f: I \rightarrow I$ отрезка I в себя имеет неподвижную точку (такую точку x , что $f(x) = x$). Верно ли это для интервала?

36. Не используя аксиому корня, доказать, что уравнение $x^n = a$ имеет положительное решение при любом $a > 0$. (Указание. Применить теорему о промежуточном значении.)

Эта задача позволяет вывести аксиому корня из остальных аксиом (включая аксиому полноты).

37. Пусть f — непрерывная строго возрастающая функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Доказать, что f является взаимно однозначным соответствием между $[a, b]$ и $[f(a), f(b)]$ и обратная функция непрерывна.

38. Дать определение обратных тригонометрических функций и доказать их непрерывность.

39. Дать определение логарифма и доказать его непрерывность.

40. Доказать непрерывность степенной функции $x \mapsto x^c$ при произвольном (не обязательно целом) c .

41. Найти все непрерывные функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых $f(x+y) = f(x) + f(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

42. (Продолжение.) Бывают ли разрывные функции с тем же свойством?

43. Найти все непрерывные функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Общее определение непрерывной функции.

Пусть M, N — метрические пространства, $f: M \rightarrow N$, $a \in M$. Говорят, что f непрерывна в a , если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in M$, для которых $\rho_M(x, a) < \delta$, выполнено $\rho_N(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

44. Сформулировать эквивалентное определение в терминах сходящихся последовательностей и доказать его эквивалентность.

45. Доказать, что следующие свойства функции $f: M \rightarrow N$ равносильны: (1) f непрерывна во всех точках M ; (2) прообраз любого открытого в N множества открыт в M ; (3) прообраз любого замкнутого в N множества замкнут в M .

46. Дать определение непрерывной в точке функции, используя лишь понятие открытого множества. (Эти задачи показывают, что для определения непрерывности достаточно знать лишь, какие множества открыты: этот факт выражают словами "непрерывность — топологическое свойство".)

47. Рассмотрим сложение, вычитание, умножение и деление как функции из множества \mathbb{R}^2 пар действительных чисел в \mathbb{R} . Доказать, что они непрерывны (на своей области определения).

48. Сформулировать и доказать теорему о непрерывности композиции непрерывных функций.

49. Можно говорить о непрерывности функций с комплексными аргументами и значениями (рассматривая \mathbb{C} как плоскость). Сформулировать и доказать теорему о непрерывности суммы, произведения, разности и частного для таких функций.

50. Пусть M — метрическое пространство, $A \subset M$. Определим $\rho_A(x)$ (расстояние от точки x до A) как точную нижнюю грань множества $\{\rho(x, y) \mid y \in A\}$. Доказать, что ρ_A — непрерывная функция. Что является множеством ее нулей?

51. Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества в метрическом пространстве M . Доказать, что существует непрерывная функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $f(x) = 0$ при $x \in A$ и $f(x) = 1$ при $x \in B$. Вывести отсюда, что существуют непересекающиеся открытые множества U и V , содержащие A и B соответственно. (Указание. $f = \rho_A / (\rho_A + \rho_B)$, $U = \{x \mid f(x) < 1/2\}$, $V = \{x \mid f(x) > 1/2\}$.)

52. Будет ли площадь треугольника ABC непрерывной функцией от координат его вершин (т.е. из \mathbb{R}^6 в \mathbb{R})?

53. Функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что для любого $a \in \mathbb{R}$ функции $x \mapsto f(a, x)$ и $x \mapsto f(x, a)$ непрерывны. Можно ли утверждать, что f непрерывна (всюду)?

54. (Продолжение.) Может ли функция f быть всюду разрывной?

55. Функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что для любой прямой ℓ на плоскости \mathbb{R}^2 сужение f на ℓ (т.е. функция, определенная только на ℓ и принимающая те же значения, что и f) непрерывна. Можно ли утверждать, что f непрерывна?

56. Функция f определена на некотором замкнутом множестве $A \subset \mathbb{R}$ и непрерывна на нем. Доказать, что ее можно так доопределить в точках $\mathbb{R} \setminus A$, чтобы она стала непрерывной на всем \mathbb{R} .

57. Решить предыдущую задачу для произвольного замкнутого подмножества произвольного метрического пространства (теорема Титце).

58. Последовательность функций $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. Доказать, что функция $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ всюду определена и непрерывна.