# Метрические пространства: полнота и компактность

Задачи этого задания, к сожалению, более абстрактны, чем хотелось бы. Однако они весьма важны.

## Полнота

Превращая различные свойства $\mathbb{R}$ в требования к произвольному метрическому пространству, получаем полезные обобщения. Начнем с критерия Коши.

Последовательность $x_0, x_1, \dots$ точек метрического пространства называется фундаментальной, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует шар радиуса $\varepsilon$, являющийся её ловушкой.

I. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

2. Доказать, что обратное верно не всегда, приведя пример метрического пространства и фундаментальной, но не сходящейся последовательности в нем. (Указание. Пространство $= ]0, 1[$, $x_n = 1/n$.)

3. Доказать, что всякая фундаментальная последовательность, содержащая сходящуюся подпоследовательность, сходится.

Пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится, называется полным.

4. Будет ли полным пространство $\mathbb{R}$ (I) с обычной метрикой; (2) с метрикой $\rho(x,y) = \min(|x-y|, 1)$; (3) с метрикой $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$?

5. Доказать, что плоскость $\mathbb{R}^2$ (с обычной метрикой) полна.

6. Пусть $x_0, x_1, \dots$ последовательность точек полного пространства, причем $\rho(x_n, x_{n+1}) \leq 1/2^n$. Доказать, что она сходится.

7. Известно, что в метрическом пространстве всякая последовательность $x$, для которой $|x_n - x_{n+1}| \leq 1/2^n$, сходится. Можно ли утверждать, что оно полно?

8. Диаметром $diam(A)$ множества $A$ в метрическом пространстве $M$ называется $\sup\{\rho(x,y) \mid x, y \in A\}$ (Возможно, $diam(A) = +\infty$.) Доказать, что если $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ – убывающая последовательность замкнутых множеств полного пространства, причем $diam(A_i) \to 0$, то существует точка $x$, принадлежащая всем $A_i$.

9. Доказать, что верно и обратное: из утверждения предыдущей задачи вытекает полнота.

I0. (Теорема Бэра.) Если полное пространство $M$ покрыто счетным числом замкнутых множеств $A_i$ (т.е. $M = A_0 \cup A_1 \cup \dots$), то одно из $A_i$ имеет внутреннюю точку.

Пусть $A$ – подмножество метрического пространства $M$. Его можно рассматривать как метрическое пространство с метрикой, заимствованной (индуцированной) из $M$.

II. Доказать, что если $A$ полно в индуцированной метрике, то

$A$ замкнуто в $M$.

I2. Доказать, что замкнутое подмножество полного пространства полно (в индуцированной метрике).

I3. Доказать, что произведение двух полных метрических пространств полно.

I4. Пусть $X$ – произвольное множество. Рассмотрим множество $Огр(X)$ ограниченных действительных функций на $X$ как метрическое пространство, положив $\rho(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| \mid x \in X\}$ Доказать, что оно полно.

I5. (Продолжение.) Останется ли утверждение предыдущей задачи верным, если $X$ – метрическое пространство и мы рассматриваем не все ограниченные функции, а только непрерывные?

I6. (Теорема о пополнении.) Доказать, что для всякого метрического пространства $M$ можно построить полное пространство $\overline{M} \supset M$, метрика в котором продолжает исходную метрику на $M$. (Указание. (I вариант) Элементами $\overline{M}$ будут классы эквивалентных фундаментальных последовательностей в $M$. (2 вариант) Использовать задачу I4.)

<u>Компактность</u>

Следующим свойством, превращаемым в требование, будет свойство Гейне – Бореля.

Метрическое пространство $M$ называется <u>компактным</u>, если всякое его открытое покрытие имеет конечное подпокрытие. Здесь <u>открытым покрытием</u> называется семейство открытых множеств, объединением которых является $M$, а <u>подпокрытием</u> – любое подмножество, также являющееся покрытием.

I7. Пусть $a$ – точка компактного пространства $M$. Доказать, что при достаточно большом $N$ шар с центром в $a$ радиуса $N$ совпадает со всем $M$. (Указание. Шары с центром в $a$ натуральных радиусов образуют покрытие.)

I8. Доказать, что всякая локально ограниченная (в частности, непрерывная) функция с действительными значениями на компактном пространстве ограничена.

I9. Доказать, что всякая непрерывная функция с действительными значениями ка компактном пространстве достигает наибольшего и наименьшего значения.

Пусть $M$ – метрическое пространство, $A \subset M$. Говоря о компактности $A$, имеют в виду его компактность как метрического пространства с индуцированной метрикой. Чтобы осознать это определение, нужно понять, какие подмножества $A$ будут открыты в индуцированной метрике.

20. Доказать, что если $U$ открыто в $M$, то $A \cap U$ открыто в $A$.

21. Доказать, что верно и обратное: если $V$ – открытое в $A$ множество, то существует такое открытое в $M$ множество $U$, что $V = A \cap U$. (Указание. Открытое множество – объединение шаров.)

Эти факты позволяют переформулировать определение компактности: множество $A \subset M$ компактно, если всякое семейство открытых в $M$ множеств, покрывающее $A$ (т.е. объединение которых содержит $A$) содержит конечное подсемейство с тем же свойством.

22. Доказать, что это определение эквивалентно старому.

23. Доказать, что всякое компактное подмножество $A$ пространства $M$ замкнуто. (Указание. Пусть $x \notin A$. Для каждой точки $a \in A$ рассмотрим непересекающиеся шары $U_a$ и $V_a$ с центрами в $x$ и $a$ соответственно. Семейство $U_a$ – покрытие $A$.)

24. Доказать, что всякое замкнутое подмножество компактного пространства компактно. (Указание. Добавив к покрытию подмножества его дополнение, получим покрытие всего пространства.)

25. Какие подмножества $\mathbb{R}$ компактны?

26. Пусть $A$ и $B$ – подмножества метрического пространства $M$. Определим $d(A,B)$ как $\inf\{\rho(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ (Очевидно, при $A \cap B \neq \emptyset$ имеем $d(A,B) = 0$.) Доказать, что если $A$ и $B$ не пересекаются, замкнуты и одно из них компактно, то $d(A,B) > 0$. Все ли требования существенны?

27. Доказать, что если $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ – непустые замкнутые подмножества компактного пространства $M$, то существует точка, принадлежащая всем $A_i$. (Указание. Перейти к дополнениям.)

28. Доказать, что всякая последовательность точек компактного пространства имеет предельную точку (и, следовательно, сходящуюся подпоследовательность). (Указание. Если никакая точка не является предельной, то возникает открытое покрытие из окрестностей, содержащих конечное число членов.)

29. Доказать, что всякое компактное пространство полно.

Конечное множество $S$ точек метрического пространства называется $\varepsilon$-сетью ($\varepsilon > 0$), если шары радиуса $\varepsilon$ с центрами в точках $S$ образуют покрытие.

30. Доказать, что всякое компактное метрическое пространство <u>вполне ограничено</u>: для любого $\varepsilon > 0$ существует (конечная) $\varepsilon$-сеть. (Как бы ни был слаб фонарь, для освещения компактного пространства достаточно конечного числа фонарей.)

Следующие свойства метрического пространства $M$ равносильны:

$\boxed{M \text{ компактно}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{всякая последовательность точек } M \text{ имеет предельную точку}}$

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \swarrow\!\!\nearrow$

$\boxed{M \text{ вполне ограничено и } M \text{ полно}}$

Кое-что уже доказано; сейчас мы докажем остальное.

31. Доказать, что если в $M$ всякая последовательность имеет предельную точку, то $M$ вполне ограничено.

32. Доказать, что если в $M$ всякая последовательность имеет предельную точку, то $M$ полно.

33. Доказать, что если $M$ вполне ограничено, $\varepsilon > 0$, то из любой последовательности можно выбрать подпоследовательность, целиком лежащую в некотором шаре радиуса $\varepsilon$.

34. Доказать, что если $M$ вполне ограничено, то всякая последовательность имеет фундаментальную подпоследовательность. (Указание. Применяя предыдущую задачу, построить последовательности, лежащие во все меньших шарах, а затем "диагональную" последовательность, взяв из $i$-ой последовательности $i$-ый член.)

Из этой задачи следует, что если $M$ полно и вполне ограничено, то всякая последовательность в $M$ имеет сходящуюся подпоследовательность (и, следовательно, предельную точку). Таким образом, мы видим, что свойства "всякая последовательность в $M$ имеет предельную точку" и "$M$ полно и вполне ограничено" равносильны и вытекают из компактности. Осталось доказать обратное. Мы сделаем это двумя способами.

35. (Лемма Лебега.) Доказать, что если в пространстве всякая последовательность имеет предельную точку, то для всякого открытого покрытия существует такое $\varepsilon > 0$, что любой шар радиуса $\varepsilon$ целиком содержится в одном из множеств покрытия. (Указание. Если для это не так и $x_i$ – центры соответствующих шаров, то последовательность $x$ не имеет предельной точки.)

36. Доказать, что если всякая последовательность имеет предельную точку, то пространство компактно, используя предыдущую задачу и утверждение о полной ограниченности (задача 31).

Прежде чем указать другой способ доказательства этого факта, отметим, что лемма Лебега интересна и сама по себе.

37. Доказать теорему о равномерной непрерывности непрерывной на отрезке (или на произвольном компакте) функции, используя лемму Лебега.

Обещанный второй способ доказательства использует понятие сеперабельности. Мы видели ("Математический анализ", задача 99), что всякое пространство, в котором любая последовательность имеет предельную точку, сепарабельно. (На самом деле достаточно полной ограниченности.) Две следующие задачи завершают доказательство.

38. Доказать, что из любого открытого покрытия сеперабельного пространства можно выбрать конечное или счетное подпокрытие. (Указание. Воспользоваться определением сеперабельности в терминах открытых множеств.)

39. Доказать, что если в $M$ всякая последовательность имеет предельную точку, то из всякого счетного покрытия можно выбрать конечное. (Указание. Если $U_0$, $U_1$ ,... – счетное покрытие и $x_n \notin U_0 \cup \ldots \cup U_n$, то последовательность $x$ не имеет предельной точки.)

40. Доказать, что произведение двух компактных пространств компактно.

41. Доказать, что любое подмножество вполне ограниченного метрического пространства вполне ограничено (в индуцированной метрике).

42. Какие подмножества плоскости компактны?

43. Две метрики эквивалентны, если в них открыты одни и те же множества. Сохраняются ли свойства (1) компактности; (2) полноты; (3) полной ограниченности при замене метрики на эквивалентную?

Непрерывность и компактность.

44. Пусть $X$ , $Y$ – метрические пространства, $f: X \to Y$ – непрерывная функция и $X$ компактно. Доказать, что $f(X)$ компактно. (Указание. Как определяется непрерывность в терминах открытых множеств?)

45. Вывести из предыдущей задачи утверждение о том, что непрерывная на компакте функция с действительными значениями достигает минимума и максимума.

46. Пусть $f: X \to Y$ непрерывное взаимно однозначное отображение метрических пространств, причем $X$ компактно. Доказать, что обратное отображение непрерывно. Существенна ли компактность? (Указание. Доказать, что образ замкнутого множества при $f$ замкнут.)

47. Дано компактное выпуклое множество точек плоскости и точка, в нем не лежащая. Доказать, что можно провести прямую, по одну сторону от которой лежит точка, а по другую – множество.

48. Рассмотрим метрическое пространство непрерывных на отрезке функций с метрикой $\rho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\}$. Описать компактные подмножества этого пространства. (Ответ. Они должны быть: (1) замкнуты; (2) равномерно ограничены (все функции – одной константой); (3) равностепенно непрерывны (для каждой точки отрезка существует окрестность, в которой <u>все</u> функции подмножества мало колеблются).)