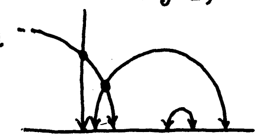
Плоскость Лобачевского*

Мы хотим построить систему, в которой бы выполнялись все аксиомы геометрии, за исключением аксиомы о параллельных. Построив такую систему, мы убедимся, что аксиома о параллельных не следует из других. Мы не будем проводить этого построения полностью, но наметим его план.

Назовем "точкой" произвольную точку верхней полуплоскости на комплексной плоскости (не включая границу). Назовем "прямой" любой луч, проходящей в верхней полуплоскости, выходящий из точки на действительной оси перпендикулярно ей, а также любую полуокружность с центром на действительной оси, лежащую в верхней полуплоскости. (Концы лучей и полуокружностей не включаются!) Построенную систему назовем плоскостью Лобачевского.



1. Доказать, что через любые две "точки" проходит ровно одна "прямая".

2. Назовем две "прямые" параллельными, если они не имеют общих точек. Сколько прямых, параллельных данной, можно провести через данную точку, не лежащую на данной прямой?

Чтобы построить геометрию, точек и прямых мало: надо определить длины отрезков, величины углов и т.п. Мы начнем с определения движений.

3. Пусть a, b, c, d – действительные числа. Доказать, что преобразование $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ переводит верхнюю полуплоскость в верхнюю (если $ad-bc>0$) или в нижнюю (если $ad-bc<0$). Что будет, если $ad-bc=0$?

Будем называть отображения верхней полуплоскости в себя, заданные формулой $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ при $ad-bc>0$, "собственными движениями" плоскости Лобачевского. (Собственные движения обычной плоскости – движения, сохраняющие ориентацию.)

4. Доказать, что каждое "собственное движение" является взаимно однозначным отображением плоскости Лобачевского на себя и обратное отображение также является "собственным движением".

5. Доказать, что композиция двух "собственных движений" является "собственным движением".

Помимо "собственных движений" рассмотрим "несобственные движения", задаваемые формулой $z \mapsto (a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d)$ при $ad-bc<0$. "Движением" будем называть "собственное движение" или "несобственное движение".

6. Доказать, что инверсия с действительным центром, сдвиг вдоль вещественной оси, симметрия относительно мнимой оси и гомотетия с действительным центром и положительным коэффициентом являются "движениями".

7. Доказать, что "движения" взаимно однозначны, композиция "движений" и обратное к "движению" – "движения".

Утверждение этой задачи выражают словами: «"движения" образуют группу».

---

* Дополнительный листок

8. Доказать, что каждое "движение" представимо в виде композии нескольких "движений", каждое из которых является инверсией с центром 0 и радиусом I, гомотетией с центром 0 и положительным коэффициентом, сдвигом вдоль вещественной оси или симметрией относительно мнимой оси.

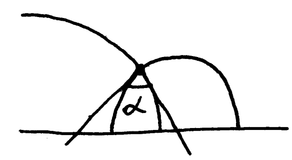
9. Доказать, что при "движении" "прямые" переходят в "прямые".

I0. Доказать, что (I) для любых двух точек; (2) для любых двух прямых существует "движение", переводящее одну в другую.

Теперь можно определить равенство "отрезков" и "углов": "отрезок" AB "равен" "отрезку" CD, если существует "движение", переводящее A в C и B в D; "угол" между "прямыми" ℓ и m "равен" "углу" между "прямыми" ℓ_1 и m_1, если существует "движение", переводящее ℓ в ℓ_1 и m в m_1.

II. Доказать, что "отрезок" AB "равен" "отрезку" BA.

Определить равенство отрезков и углов мало: нужно уметь измерять их величину. Для "углов" это просто: величиной "угла" между двумя "прямыми" (т.е. дугами окружностей) мы можем назвать величину (обычного) угла между касательными к ним.

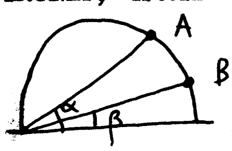


I2. Доказать, что два "угла" "равны" тогда и только тогда, когда их величины равны.

С расстоянием дело обстоит сложнее.

I3. Определить расстояние между двумя "точками" так, чтобы два "отрезка" AB и CD были бы "равны" тогда и только тогда, когда "расстояние" между A и B равно "расстоянию" между C и D

(Указание. Пусть A и B лежат на вертикальном луче. Как нужно определить "расстояние", чтобы оно не менялось при гомотетии? Затем определите расстояние между любыми двумя точками, пользуясь тем, что оно должно сохраняться при "движении".



Ответ: $|AB| = \log(\operatorname{tg}\alpha / \operatorname{tg}\beta)$)

Теперь Вы можете взять любой учебник геометрии - желательно такой, в котором аксиома параллельных вводится как можно позже - и проверить, что в нашей модели выполнены все аксиомы геометрии, кроме аксиомы параллельных, и, следовательно, все теоремы, не опирающиеся на эту аксиому. (Среди них отметим теорему: сумма углов треугольника не превосходит I80^0.)

I4. Рассмотрим другую модель геометрии Лобачевского: назовем точками точки единичного круга (без границы), а прямыми - его диаметры и дуги окружностей, пересекающих единичную окружность под прямым углом. Докажите, что эта модель изоморфна построенной ранее, т.е. существует взаимно однозначное отображение верхней полуплоскости на единичный круг, при котором "прямые" (в одном смысле) переходят в "прямые" (в другом смысле) и наоборот.