Аксиомы векторного пространства и их модели.

Пусть имеется некоторое множество E, в котором выделен элемент $\vec{0}$, задана функция взятия противоположного (обозначается $x \mapsto -x$), функция сложения, сопоставляющая с каждой парой $x, y \in E$ некоторый элемент $x+y \in E$, и функция умножения на число, сопоставляющая с каждой парой λ, x, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, некоторый элемент $\lambda x \in E$. Пусть при этом выполнены (для любых $x, y, z \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) такие свойства:

Аксиомы векторного пространства

(I) $x+(y+z) = (x+y)+z$; (2) $x+y = y+x$; (3) $x+\vec{0} = x$ (4) $x+(-x)=\vec{0}$;
(5) $0 \cdot x = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$; (6) $1 \cdot x = x$; (7) $\lambda \cdot (-x) = (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$;
(8) $(\lambda+\mu) \cdot x = \lambda x + \mu x$; (9) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$; (IO) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

В таком случае называется векторным пространством, или линейным пространством, а его элементы – векторами. Обозначение: $x - y$ есть $x + (-y)$.

I. Вывести из (I) – (4) такие следствия: (I) $x + (y + (z+w)) = ((x+y)+z)+w$; (2) $(x+z = y+z) \Rightarrow (x=y)$; (3) $-(x+y) = (-x)+(-y)$.

2. Доказать, что $x + x = 2 \cdot x$

3. Доказать, что для любого вектора a найдется такой вектор x, что $a = x + x$.

4. Доказать, что если $\lambda x = \vec{0}$, то $\lambda = 0$ **или** $x = \vec{0}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$).

5. Справедливо ли свойство $\lambda x = x \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$)?

6. Вывести свойства (5) и (7) из остальных.

7.* Вытекает ли свойство (6) из остальных?

8. Доказать, что если $2x + 3y = \vec{0}$ и $3x + 5y = \vec{0}$ (x, y – векторы), то $x = 0$ и $y = 0$.

Примером векторного пространства является множество векторов на плоскости. Приведем еще некоторые примеры.

9. Как превратить $\mathbb{R}$ в векторное пространство?

IO. Пусть n – фиксированное натуральное число. Рассмотрим множество всех столбцов высоты n, составленных из действительных чисел. Определим сложение покомпонентно: $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$

Как надо определить 0, взятие противоположного и умножение на число, чтобы превратить это множество в векторное пространство? Это пространство называется $\mathbb{R}^n$.

II. Определить операции, превращающие в векторные пространства следующие множества: (I) $\mathbb{C}$; (2) множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел; (3) множество всех функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

12. Пусть E и F – векторные пространства. Определить операции, превращающие множество пар $\langle e, f\rangle$ ($e\in E$, $f\in F$) в векторное пространство. Это пространство обозначается $E\oplus F$ и называется прямой суммой E и F.

Пусть E – векторное пространство, F – некоторое подмножество E. Говорят, что F – подпространство E, если $0\in F$, из $x\in F$ следует $(-x)\in F$ и из $x,y\in F, \lambda\in\mathbb{R}$ следует $\lambda x, x+y\in F$. В этом случае F можно рассматривать как векторное пространство (с операциями, унаследованными из E). Тривиальные примеры: $F=\{0\}$ и $F=E$.

13. Какие подпространства есть в пространстве $\mathbb{R}$? в пространстве всех векторов на плоскости?

14. Образуют ли подпространство $\mathbb{R}^n$ те столбцы, у которых (1) первый элемент равен 0 ? (2) хоть один элемент равен 0 ? (3) все элементы рациональны ? (4) сумма всех элементов равна 0?

15. Образуют ли подпространство в пространстве последовательностей последовательности, (1) имеющие предел ? (2) сходящиеся к 0 ? (3) сходящиеся к 1 ? (4) ограниченные? (5) монотонно возрастающие?

16. По аналогии с плоскостью можно определить понятие вектора в пространстве. Привести примеры подпространств возникающего векторного пространства.

17. Пусть E – пространство, K и L – его подпространства. Можно ли утверждать, что (1) $K\cap L$; (2) $K\cup L$ (3) $K+L=\{k+l \mid k\in K, l\in L\}$ – подпространства ?

18. Как ввести операции на множестве многочленов, чтобы получить векторное пространство? Образуют ли подпространство те многочлены, у которых (1) степень $= n$; (2) степень $\leqslant n$; (3) $P(-t)=P(t)$ при всех t ; (4) 0 – корень; (5) 0 – корень производной; (6) $P(t)\geqslant 0$ при всех t ?

19. Образуют ли подпространство пространства функций на решения дифференциального уравнения гармонического осциллятора, т.е. такие функции y, что $y''(t)+y(t)=0$ при всех t ?

20. Ввести структуру векторного пространства на (1) множестве всех прямых плоскости, параллельных данной; (2) множестве всех прямых пространства, параллельных данной.

21. Пусть F – подпространство E. Доказать, что E можно разбить на непересекающиеся классы, отнеся к одному классу те $x, y\in E$, для которых $x-y\in F$. Ввести на этих классах структуру векторного пространства. Оно называется факторпространством E по F и обозначается E/F.

Линейная оболочка

Пусть E – векторное пространство; $x_1, \dots, x_n, y$ – вектора из E. Говорят, что y линейно выражается через $x_1, \dots, x_n$, если найдутся такие действительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$

22. Выражается ли в $\mathbb{R}^2$ вектор $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ через $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

23. Какие вектора $\mathbb{R}^3$ выражаются через $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

24. Придумать такой набор векторов $\mathbb{R}^3$, чтобы через них выражались вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, но не выражается вектор $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

25. Пусть M – произвольное множество векторов пространства E Рассмотрим линейную оболочку M – множество $L(M)$ всех векторов, выразимых через вектора из M. Доказать, что $L(M)$ – наименьшее подпространство, содержащее M, т.е. что (I) $L(M)$ – подпространство; (2) $L(M)$ содержит M; (3) если F – подпространство, содержащее M, то $F \supset L(M)$.

26. Придумать 2 вектора в $\mathbb{R}^3$, через которые выражался бы любой вектор $\mathbb{R}^3$.

27. Доказать, что любой вектор $\mathbb{R}^4$ линейно выражается через вектора (I I I I), (I 2 3 4), (I 4 9 I6), (I 8 27 64), причем единственным образом.

Линейная зависимость.

Говорят, что вектора $x_1, \dots, x_n$ линейно зависимы, если существуют такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, не равные 0 одновременно, что $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$

28. Доказать, что система, содержащая (I) нулевой вектор; (2) два равных вектора; (3) линейно зависимую подсистему – линейно зависима.

29. В каком случае система из двух векторов зависима?

30. Когда система из 3 векторов плоскости зависима? Тот же вопрос для векторов в пространстве.

3I. Доказать, что система из 2 и более векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов выражается через остальные.

3I. (Продолжение.) Можно ли заменить "остальные" на "предыдущие"? А "один из" на "любой из" ?

32. Доказать, что вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы в $\mathbb{R}^n$.

33. Доказать, что если векторы линейно независимы, то всякий вектор, через них выражающийся, делает это единственным образом (коэффициенты определены однозначно).

34. Будут ли зависимы вектора $\binom{1}{2}, \binom{3}{4}, \binom{5}{7}$ в $\mathbb{R}^2$? А вектора $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ в $\mathbb{R}^3$?

35. Вектора x и y линейно независимы. Могут ли вектора $2x+y$ и $x+3y$ быть линейно зависимыми?

36. Доказать, что (вектора $x_1 \ldots x_n$ линейно зависимы) $\Leftrightarrow$ (вектора $x_1+1985\,x_2, x_3, \ldots, x_n$ линейно зависимы).

37. Рассмотрим в пространстве функций систему $f_n : x \longmapsto x^n$ $(n=0,1,\ldots,N)$. Будет ли она линейно зависимой?

38. Тот же вопрос для системы $1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{Nx}$

39. Тот же вопрос для системы $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin Nx$

40. Тот же вопрос для системы $x^N, (x-1)^N, \ldots, (x-N)^N$

41. Функции $f_1, \ldots, f_n$ образуют линейно независимую систему. Доказать, что можно найти такие точки $x_1 \ldots x_n$, что вектора $\langle f_1(x_1) \ldots f_1(x_n)\rangle, \ldots, \langle f_n(x_1) \ldots f_n(x_n)\rangle$ линейно независимы.

42. В матрице (таблице, заполненной числами) размера 2 на 2 столбцы независимы. Доказать, что и строки независимы.

43. Решить предыдущую задачу с заменой 2 на n.

Прямые суммы

Говорят, что пространство E есть (внутренняя) прямая сумма своих подпространств E_1 и E_2, если всякий вектор из E однозначно представляется в виде суммы $e_1 + e_2$, где $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$. Обозначение: $E = E_1 \oplus E_2$. (Слово "внутренняя" отличает это определение он данного нами ранее; ту прямую сумму будем называть "внешней".)

44. Доказать, что $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow (E = E_1 + E_2,\ E_1 \cap E_2 = \{0\})$.

45. Доказать, что пространство всех функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть прямая сумма подпространств четных и нечетных функций.

46. Пусть E - подпространство $\mathbb{R}^n$, состоящее из векторов, первая компонента которых равна 0. Для каких F выполнено $E \oplus F = \mathbb{R}^n$?

47. Дать определение прямой суммы нескольких подпространств. Доказать, что если $X = A \oplus B$, $A = A_1 \oplus A_2$, то $X = A_1 \oplus A_2 \oplus B$.

48. Доказать, что если A - подпространство $\mathbb{R}^n$, то существует такое подпространство B, что $A \oplus B = \mathbb{R}^n$.

Базисы

Говорят, что векторы $x_1 \ldots x_n$ пространства E образуют базис, если (1) они линейно независимы; (2) любой вектор из E линейно выражается через них.

49. Доказать, что любой вектор <u>однозначно</u> выражается через базисные. (Коэффициенты этого разложения называются <u>координатами</u> данного вектора в данном базисе.)

50. Доказать, что $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ – базис в $\mathbb{R}^n$ (называемый <u>стандартным</u>).
Как найти координаты вектора в этом базисе?

51. Найти базис в пространстве тех векторов $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, у которых (1) $x_1 = 0$; (2) $x_2 = x_3 = 0$; (3) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

52. Что можно сказать о подпространствах $\mathbb{R}e_1, \ldots, \mathbb{R}e_n$ ($\mathbb{R}x$ – множество всех векторов, пропорциональных x), если $e_1 \ldots e_n$ – базис E ? (Ответ: $E = \mathbb{R}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}e_n$)

53. Доказать, что базис можно эквивалентно определить как (1) линейно независимую систему, становящуюся линейно зависимой при добавлении любого вектора; (2) систему, через которую выражается любой вектор, но которая теряет это свойство при изъятии любого вектора.

54. Доказать, что любую линейно независимую конечную систему векторов можно дополнить либо до базиса, либо до бесконечной линейно независимой системы и что любую конечную систему, через которую выражаются все вектора, можно сделать базисом, выкинув из нее некоторую часть. (Бесконечная система считается линейно независимой, если такова любая её конечная подсистема.)

<u>Изоморфизмом</u> линейных пространств E и F называется взаимно однозначное соответствие $\varphi: E \to F$, сохраняющее операции: $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$

55. Доказать, что E имеет базис из n элементов тогда и только тогда, когда оно изоморфно $\mathbb{R}^n$ (т.е. существует изоморфизм $\varphi: E \to \mathbb{R}^n$)

56. Пусть E является (внутренней) прямой суммой своих подпространств E_1 и E_2. Доказать, что оно изоморфно их внешней прямой сумме (пространству пар). Эта задача отчасти оправдывает двоякое применение термина "прямая сумма".

Нам потребуется следующий факт, доказательство которого мы отложим.

<u>Основная лемма</u>. Если $y_1 \ldots y_k$ линейно выражаются через $x_1 \ldots x_\ell$ и $k > \ell$, то $y_1 \ldots y_k$ линейно зависимы.

57. Доказать, что любые два базиса одного пространства имеют одинаковое количество векторов.

Пространство, имеющее (конечный) базис, называется <u>конечномерным</u>, а число векторов базиса (не зависящее от его выбора, см. предыдущую задачу) – <u>размерностью</u> пространства. Пространство, не имеющее конечного базиса, называется <u>бесконечномерным</u>. Размерность пространства E обозначается $\dim E$. Как правило, мы будем иметь дело с конечномерными пространствами (не оговаривая этого явно, если это ясно из контекста).

58. Доказать, что пространство бесконечномерно тогда и только тогда, когда в нем есть бесконечная линейно независимая система.

59. Как устроены одномерные пространства?

60. Найти размерность пространства $\mathbb{R}^n$.

6I. Доказать, что (I) если $x_1, \dots, x_n$ – линейно независимые вектора E, то $n \leqslant \dim E$; (2) если любой вектор E выражается через $x_1 \dots x_n$, то $n \geqslant \dim E$.

62. Можно ли определить размерность как максимальное число линейно независимых векторов? как минимальное число векторов, через которые выражается любой вектор?

63. Доказать, что в конечномерном пространстве любая система из $\dim E$ векторов, удовлетворяющая одному из условий в определении базиса, удовлетворяет и второму.

64. Существуют ли в $\mathbb{R}^2$ три независимых вектора? в $\mathbb{R}^3$ два вектора, через которые выражается любой?

65. Доказать, что изоморфные пространства имеют одинаковую размерность и, напротив, два пространства одной (конечной) размерности изоморфны.

66. Доказать, что если E – подпространство F, то $\dim E \leqslant \dim F$. В каких случаях возможно равенство?

67. Известно, что $E = E_1 \oplus E_2$, $\dim E_1 = n_1$, $\dim E_2 = n_2$. Найти $\dim E$.

68. Найти размерность подпространства $\mathbb{R}^n$, состоящего из векторов, координаты которых удовлетворяют уравнению $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ (a_i – заданные числа, не все равные нулю).

69. E и F – подпространства $\mathbb{R}^{10}$ размерности 7. Доказать, что они имеют общий ненулевой вектор.

70. Доказать, что для произвольных подпространств E_1 и E_2 пространства E справедливо соотношение

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

(Ср. формулу $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.)

7I. Можно ли написать аналогичную формулу, выражающую $\dim(E_1+E_2+E_3)$ через размерности E_i и их пересечений?

72. Доказать, что всякое подпространство H конечномерного пространства E выделяется прямым слагаемым, т.е. найдется такое подпространство $F \subset E$, что $H \oplus F = E$.

73. Доказать утверждение задачи 72 для бесконечномерного E.

74. Чему равно $\dim(E/F)$, если $\dim E = n$, $\dim F = k$.

75. Может ли пространство быть представлено в виде конечного объединения своих подпространств меньшей размерности?

76. Доказать, что всякое подпространство $\mathbb{R}^n$ замкнуто.

77. Рассмотрим множество всех векторов, выражающихся через данный конечный набор векторов из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными коэффициентами (конус, натянутый на них). Можно ли утверждать, что оно замкнуто?

Доказательства основной леммы.

Напомним: Основная лемма утверждает, что если вектора $y_1 \ldots y_k$ выражаются через $x_1 \ldots x_\ell$ и $k > \ell$, то $y_1, \ldots, y_k$ линейно зависимы. Сейчас мы предложим два доказательства этого факта (третье, использующее метод Гаусса решения систем линейных уравнений, см. далее). Первое проходит индукцией по ℓ.

78. Доказать Основную лемму при $\ell = 1$.

79. Провести шаг индукции. (Указание. Пусть $y_1 \ldots y_k$ выражается через $x_1 \ldots x_\ell$. Если в этих выражениях вектор x_1 не используется, то все сводится к меньшему ℓ. Пусть $y = a_1 x_1 + \ldots + a_\ell x_\ell$, $a_1 \neq 0$. Тогда векторы $y_2 - c_2 y_1, y_3 - c_3 y_1, \ldots$ при подходящих c_i выражаются через $x_2 \ldots x_\ell$, линейно зависимы по предположению индукции, поэтому и игреки линейно зависимы.)

Вот набросок другого доказательства (восходящего к Штейницу). Пусть $y_1, \ldots, y_k$ – линейно независимая система, выражающаяся через $x_1, \ldots, x_\ell$. В выражении $y_1 = a_1 x_1 + \ldots + a_\ell x_\ell$ один из коэффициентов не равен 0 (например, a_1). Тогда через $x_1, \ldots, x_\ell$ выразимо то же, что через $y_1, x_2, \ldots, x_\ell$. Рассмотрим выражение для y_2; в нем один из коэффициентах при иксах ненулевой (так как y_1 и y_2 линейно независимы), соответствующее x_i можно заменить на y_2 и т.д. В конце концов, если $k > \ell$, получится, что через некоторые ℓ игреков выражается то же самое, что и через иксы (что противоречит линейной независимости игреков).

80. Провести это рассуждение полностью.

Системы линейных уравнений

Системой линейных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{k1} x_1 + \ldots + a_{kn} x_n = b_k \end{cases}$$

(x_i – неизвестные, a_{ij} – коэффициенты, b_j – правые части). Система называется однородной, если все правые части равны 0. Таблица из чисел a_{ij} (k строк, n столбцов) называется матрицей системы; добавив к ней справа столбец правых частей, получим расширенную матрицу системы.

С каждой матрицей из n столбцов и k строк сопоставим отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, определенное формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \end{pmatrix}$$

В этих терминах решения системы с данной матрицей и правой частью суть прообразы правой части при отображении, задачаемом матрицей.

81. Найти эквивалентные утверждения в разных колонках и дописать недостающие (A – матрица из n столбцов и k строк, b – вектор высоты k, φ – соответствующее отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$)

вектор b линейно выражается через столбцы матрицы A;	при любой правой части система с матрицей A имеет единственное решение;	$b \in \{$ образ $\varphi\}$
через столбцы матрицы A выражается любой вектор $\mathbb{R}^k$	система с матрицей A и правой частью b имеет решение;	φ – наложение
столбцы матрицы A линейно независимы	однородная система с матрицей A имеет только нулевое решение;	φ взаимно однозначно

82. Назовем элементарными преобразованиями перестановку строк матрицы и вычитание из i-ой строки j-ой, умноженной на произвольный коэффициент (при этом j-ая не меняется!). Доказать, что элементарные преобразования расширенной матрицы системы заменяют её на равносильную.

83. Назовем матрицу ступенчатой, если первый ненулевой элемент i-ой строки расположен правее первого ненулевого элемента j-ой строки при $i > j$. Доказать, что всякая матрица может быть приведена элементарными преобразованиями к ступенчатому виду.

84. В каком случае система со ступенчатой расширенной матрицей имеет решение?

85. Назовем столбцы, в которых стоят первые ненулевые элементы строк, главными. Доказать, что все решения системы со ступенчатой расширенной матрицей (если они есть) могут быть получены так: значения неизвестных, стоящих в неглавных столбцах, выбираются произвольно, после чего значения неизвестных в главных столбцах определяются однозначно.

86. Доказать, что всякая однородная система, в которой неизвестных больше, чем уравнений, имеет ненулевое решение.

87. Доказать, что любые n векторов в $\mathbb{R}^k$ при $n > k$ линейно зависимы. Доказать, что любые n векторов, линейно выражающиеся через k векторов при $n > k$, линейно зависимы. (Использовать предыдущую задачу.)

Мы получили еще одно доказательство Основной леммы.

88. Доказать, что если однородная система с квадратной матрицей и нулевой правой частью имеет лишь нулевое решение, то система с той

же матрицей и любой правой частью имеет решение.

На самом деле матрицы важны прежде всего как изображения линейных операторов.

Линейные операторы

Пусть E, F – линейные пространства. Отображение $A: E \to F$ называется линейным, если $A(x+y) = A(x) + A(y)$, $A(0) = 0$, $A(-x) = -A(x)$, $A(\lambda x) = \lambda \cdot A(x)$ $[x, y \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}]$

89. Доказать, что отображение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$, сопоставляемое с каждой матрицей из k строк и n столбцов, линейно. Доказать, что верно и обратное: любое линейное отображение соответствует некоторой матрице.

90. Движения плоскости задают линейные отображения векторов. Написать матрицу поворота. В каком случае матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ соответствует некоторому движению? (Ответ: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$.)

91. Для каких матриц размера 2 на 2 соответствующие им линейные операторы отображают множество всех точек с целыми координатами в себя? Когда это соответствие взаимно однозначно?

92. Доказать, что если $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ и $B: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ линейны, то их композиция $B \circ A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ линейна. Написать матрицу $B \circ A$, если $k = l = n = 2$ и известны компоненты матриц B и A. Матрица оператора BA называется произведением матриц операторов B и A. Сформулировать правило перемножения матриц произвольного размера.

93. Определим A^n как $A \cdot \ldots \cdot A$ (n раз). Найти A^n, если
(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; (3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [в ответ войдут числа Фибоначчи]

Пусть $A: E \to F$ – линейный оператор. Его ядром $\ker A$ называется множество $\{x \in E \mid Ax = 0\}$, образом $\operatorname{im} A$ – множество $\{Ax \mid x \in E\}$

94. Доказать, что $\ker A$ и $\operatorname{im} A$ – подпространства, причем $(\ker A = \{0\}) \Leftrightarrow (A$ – вложение$)$.

95. Любые ли подпространства могут быть образами и ядрами линейных операторов?

96. Придумать естественное взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из E/F в H и линейными операторами из E в H, ядра которых содержат F.

97. Линейный оператор $A: E \to E$ называется нильпотентным, если $A^n = 0$ для некоторого n (тогда, очевидно, $A^k = 0$ при $k \geqslant n$). Доказать, что если A нильпотентен, то $A^{\dim E} = 0$.

98. Доказать, что если $A: E \to F$, $f_1, \ldots, f_k$ – базис в F, а $e_1 \ldots e_l$ – базис в $\ker A$, то $e_1, \ldots, e_l$ вместе с любыми прообразами $f_1 \ldots f_k$ образуют базис в E.

99. Доказать, что $\dim(\operatorname{im} A)+\dim(\ker A)=\dim E$ (E – пространство, на котором определен оператор A).

100. Установить изоморфизм между $\operatorname{im} A$ и $E/\ker A$ и вывести отсюда утверждение предыдущей задачи.

101. Найти размерность пространства всех многочленов степени не выше n, для которых $P(1) = P(2) + P(3) = 0$.

102. Доказать, что если E конечномерно, то для оператора $A: E \to E$ свойства быть вложением и наложением равносильны. Вывести отсюда утверждение задачи 88.

103. Справедливо ли утверждение предыдущей задачи, если бесконечномерно?

Как найти размерность?

Подпространство $E \subset \mathbb{R}^k$ может быть задано как множество решений системы линейных уравнений или как линейная оболочка конечного набора векторов в $\mathbb{R}^k$. Следующие задачи посвящены вычислению размерностей заданных таким образом подпространств.

104. Показать, что вычисление размерностей заданных таким образом подпространств сводится к вычислению размерностей ядра и образа оператор с заданной матрицей. (Как мы видели, достаточно найти одну из них.)

105. Доказать, что при элементарных преобразованиях матрицы размерности ядра и образа соответствующего оператора не меняются.

106. Как найти размерности ядра и образа оператора, если его матрица – ступенчатая?

107. Найти размерность линейной оболочки векторов в $\mathbb{R}^5$ с координатами (1,1,5,1,1), (0,2,4,2,1), (0,3,3,3,1), (0,4,2,4,1) и (0,5,1,6,2).

108. Найти размерность линейной оболочки векторов (1, a ,-1,2), (2,-1, a ,5), (1,10,-6,1) в зависимости от a .

109. Найти размерность пространства решений системы

$$x+2y+3z=0,\quad ax+y+z=0,\quad x+ay+2z=0$$

в зависимости от a .

Размерность образа оператора называется его рангом.

110. Доказать, что ранг оператора равен максимальному числу линейно независимых столбцов его матрицы.

111. Доказать, что ранг произведения операторов не превосходит ранга любого сомножителя.

112. Доказать, что следующие свойства равносильны: (1) оператор имеет ранг 1; (2) все столбцы его матрицы пропорциональны; (3) все строки его матрицы пропорциональны.

II3. Доказать, что любой оператор представим в виде суммы операторов ранга I, причём наименьшее возможное количество слагаемых в этой сумме равно его рангу.

II4. Доказать, что ранг оператора равен размерности линейной оболочки его <u>строк</u>. Вывести отсюда утверждение задачи 43.

II5. Дать другое решение предыдущей задачи, используя тот факт, что при элементарных преобразованиях матрицы размерность линейной оболочки её строк сохраняется.

<u>Пространство линейных операторов. Сопряженное пространство</u>

II6. Пусть $e_1 \dots e_n$ – базис в E. Доказать, что всякий линейный оператор $A: E \to F$ однозначно определяется своими значениями на векторах e_i, причем они могут быть произвольными векторами F.

Пусть $A: E \to F$, $e_1 \dots e_n$ – базис в E; $f_1 \dots f_k$ – базис в F. Запишем координаты каждого из векторов $Ae_1, \dots, Ae_n$ в базисе $f_1 \dots f_k$ в виде столбца. Полученная таблица из k строк и n столбцов называется <u>матрицей</u> оператора A в данных базисах.

II7. Доказать, что при фиксированных базисах в E и F каждый оператор однозначно определяется своей матрицей (которая может быть произвольной). Как связано это определение с данным выше определением матрицы оператора $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$?

II8. Ввести на множестве $L(E, F)$ линейных операторов из E в F структуру векторного пространства и определить его размерность.

Линейные операторы из E в $\mathbb{R}$ называются <u>линейными функционалами</u> на E; пространство линейных функционалов называется <u>сопряженным</u> к E и обозначается E^*.

II9. Какие подпространства могут быть ядрами линейных функционалов? Что можно сказать о двух функционалах, если их ядра равны?

I20. Указать базис в E^*, если задан базис в E, и найти размерность E^*.

I2I. Установить изоморфизм между конечномерным пространством E и вторым сопряженным $(E^*)^*$ (не фиксируя базис в E !). Существенна ли конечномерность?

I22. Пусть $f_1, \dots, f_n, g \in E^*$. Доказать, что (g линейно выражается через $f_1 \dots f_n$) $\Leftrightarrow$ $\ker g \supset (\ker f_1 \cap \dots \cap \ker f_n)$.

I23. Пусть E – пространство векторов на плоскости. Установить изоморфзим между E и E^*, используя скалярное произведение векторов.

I24. Пусть $F \subset E$ – подпространство. Рассмотрим множество тех функционалов из E^*, которые равны 0 на F. Доказать, что это – подпространство и найти его размерность.

125. Доказать, что всякое подпространство конечномерного пространства E может быть представлено в виде пересечения нескольких подпространств размерности $\dim E - 1$ (такие подпространства называют <u>гиперплоскостями</u>). Каково минимально возможное число таких гиперплоскостей?

126. Система векторов $x_1 \dots x_n$ такова, что ни один функционал не обращается в 0 на всех них одновременно. Доказать, что из нее можно выбрать базис.

127. Доказать, что множество обратимых операторов открыто в $L(E, E)$ (в какой-нибудь естественной метрике).

128. Доказать, что при каждом k множество операторов из $L(E, F)$, ранг которых не превосходит k, замкнуто в $L(E, F)$.

<u>Линейная алгебра в действии</u>

129. Электрическая цепь состоит из клемм, некоторые пары которых соединены сопротивлениями. На некоторых клеммах поддерживается произвольно заданное напряжение (они подключены к источнику питания). Доказать, что распределение напряжений на остальных клеммах, согласованное с законом Ома и требованием "сумма токов, втекающих в клемму, не соединенную с источником питания, равна 0", существует и единственно. (Предполагается, что цепь связна, т.е. её нельзя разбить на не соединенные друг с другом группы.)

130. В граничные клетки прямоугольной таблицы записывают произвольные числа. Доказать, что можно так заполнить внутренние клетки, чтобы каждое число равнялось среднему арифметическому четырех соседей.

131. На окружности записано n чисел. Между каждыми двумя из них пишут их сумму, а исходные числа стирают. Любой ли набор чисел может получиться? (Указание. Ответ зависит от n.)

132. Задача интерполяции состоит в отыскании многочлена степени $< n$, принимающего заданные значения в n точках. Мы доказали, что (I) решение всегда существует и что (2) оно единственно. С помощью линейной алгебры можно вывести (I) из (2) и наоборот. Как?

133. Рассмотрим пространство последовательностей x, у которых $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ при всех n. Найти его размерность. Указать базис из геометрических прогрессий. Указать формулу для n-го члена последовательности Фибоначчи (у которой $x_1 = x_2 = 1$)

134. Сделать то же для последовательностей, у которых $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

135. (Линейная алгебра и программирование.) Как вычислить n-ый член последовательности Фибоначчи, сделав не более $C \log_2 n$ арифметических операций (над целыми числами)?

Пусть E – линейное пространство. Говорят, что функция $\langle x, y\rangle \mapsto (x, y)$ из E E в R называется скалярным произведением, если выполнены такие свойства:

(1) $(x, y) = (y, x)$ (симметрия)

(2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ (билинейность)
$(\lambda x, y) = (x, \lambda y) = \lambda(x, y)$

(3) $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$ (положительная определенность)

Пространство, снабженное скалярным произведением, называется евклидовым.

1. Известные из курса школьной геометрии скалярные произведения обладают этими свойствами. Существуют ли другие скалярные произведения на плоскости и в пространстве ?

Векторы x и y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. (Запись: $x \perp y$.)

2. Известно, что вектор $x \in E$ ортогонален любому вектору пространства E. Что это за вектор ?

3. Доказать, что множество $x^{\perp}$ векторов, ортогональных данному вектору x, является подпространством. Доказать, что всякий вектор y из E однозначно представляется в виде суммы $y_1 + y_2$, где y_1 пропорционален x, а y_2 ортогонален x. (Векторы y_1 и y_2 можно назвать проекциями y на x и $x^{\perp}$.)

Нормой, или длиной, вектора x называется число $\sqrt{(x, x)}$. Обозначение: $\| x \|$.

4. Доказать, что $|(x, y)| = \|x\| \cdot \|$проекция y на x$\|$

5. Доказать теорему Пифагора: если $x \perp y$, то
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

6. Доказать, что $\|$ проекция y на x $\| \leq \|y\|$
Указание: катет короче гипотенузы.

7. Доказать неравенство Коши – Буняковского – Шварца:
$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Поскольку $|(x, y)| / (\|x\| \cdot \|y\|) \leq 1$, эту величину называют косинусом угла между векторами x и y (а углом считают ее арккосинус).

8. Пусть x, y – произвольные векторы. Квадратный трехчлен $t \mapsto (x + ty, x + ty)$ неотрицателен, и его дискриминант неотрицателен. Вывести отсюда неравенство предыдущей задачи.

9. Доказать неравенство треугольника $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

10. Доказать равенство параллелограмма:
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

11. Доказать теорему о 2 перпендикулярах: если вектор x перпендикулярен двум непропорциональным векторам y и z, лежащим в двумерной плоскости, то он перпендикулярен всем векторам этой плоскости.

12. Сформулировать и доказать теорему о 3 перпендикулярах из школьного курса геометрии в терминах евклидовых пространств.

13. (1) В евклидовом пространстве даны три вектора x, y, z единичной длины. Доказать, что $(x, y) + (y, z) + (x, z) \geq -3/2$. (2) Доказать, что если $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$, $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geq -3/2$. (3) Доказать, что сумма косинусов углов треугольника не превосходит 3/2.

14. Доказать, что сумма косинусов двугранных углов при всех ребрах тетраэдра не превосходит 2.

15. Векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ попарно ортогональны. Доказать, что они линейно независимы.

16. Рассмотрев в пространстве $C[0, 2\pi]$ непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ функций скалярное произведение $(f, g) = \int_0^{2\pi} fg$, доказать линейную независимость системы функций 1, cos x, cos 2x,..., cos nx, sin x,..., sin nx.

Базис, составленный из ортогональных векторов единичной длины, называется ортонормированным.

17. Доказать, что любое конечномерное пространство имеет ортонормированный базис и, более того, любой вектор единичной длины может быть дополнен до ортонормированного базиса.

Пусть L – подпространство евклидова пространства E, x – вектор из E. Вектор l из L называется (ортогональной) проекцией x на L, если x – l ортогонально L (ортогонально всем векторам из L).

18. Доказать, что если L – конечномерное подпространство евклидова пространства E, то всякий вектор из E имеет единственную проекцию на L. (Указание. Каковы координаты проекции в ортонормированном базисе в L ?)

19. Существенна ли конечномерность в предыдущей задаче?

20. Доказать, что проекция x на L – ближайшая к x точка подпространства L. (Расстоянием между x и y считаем $\|x - y\|$.)

21. Пусть S – произвольное множество векторов конечномерного евклидова пространства. Доказать, что множество $S^\perp$ векторов, ортогональных всем векторам S, есть подпространство; если S – подпространство, то $E = S \oplus S^\perp$, а $(S^\perp)^\perp = S$.

22. Доказать, что любые два евклидовых пространства E_1 и E_2 одинаковой конечной размерности изоморфны, т.е. существует такой изоморфизм линейных пространств $\varphi: E_1 \to E_2$, что $(\varphi(x), \varphi(y))_{E_2} = (x, y)_{E_1}$ для всех x, y из E_1.

23. (Ортогонализация Грама – Шмидта.) Пусть $e_1, \dots, e_n$ – произвольный базис евклидова пространства. Доказать, что существует ортонормированный базис $f_1, \dots, f_n$ того же пространства, для которого линейные оболочки $e_1, \dots, e_k$ и $f_1, \dots, f_k$ совпадают при всех $k = 1..n$.

24. Доказать, что для всякого линейного функционала φ на конечномерном евклидовом пространстве E найдется такой вектор f, что $\varphi(x) = (x, f)$ для всех $x \in E$. Указать изоморфизм между конечномерным евклидовым пространством и сопряженным к нему.

25. (Метод наименьших квадратов.) Дано n точек плоскости $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Нужно провести прямую $y = kx$ как можно ближе к этим точкам – так, чтобы сумма $\sum (y_i - kx_i)^2$ была бы минимальной. Доказать, что эта задача всегда имеет ровно одно решение. Какое? Тот же вопрос, если нужно провести прямую $y = kx + b$ так, чтобы $\sum (y_i - (kx_i + b))^2$ была бы минимальной.

26. Доказать, что многочлены Чебышёва $P_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ортогональны в пространстве непрерывных на $[-1, 1]$ функций со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x) / \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

27. Любые 2 из n векторов евклидова пространства образуют тупой угол (их скалярное произведение меньше 0). Доказать, что после отбрасывания любого вектора получаем линейно независимую систему.

28. Нормой в линейном пространстве называется неотрицательная функция $x \mapsto \|x\|$, для которой $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$. Доказать, что если норма такова, что выполнено равенство параллелограмма (см. задачу 10), то существует скалярное произведение на E, при котором $\|x\|^2 = (x, x)$.

29. Назовем тригонометрическим многочленом степени n функцию
$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$
Доказать, что для любой непрерывной на $[0, 2\pi]$ функции наиболее близкий к ней тригонометрический многочлен степени n можно найти, положив
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx$$
(Расстояние между f и g измеряется величиной $\int_0^{2\pi} |f - g|^2$)

Числа a_k, b_k, определяемые этими формулами, называются коэффициентами Фурье функции f, а ряд $\sum a_k \cos kx + \sum b_k \sin kx$ – её рядом Фурье.

30. Доказать, что если a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции f, то $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \le \int_0^{2\pi} |f|^2$ (неравенство Бесселя).

31. Доказать, что при $n \to \infty$ левая часть неравенства Бесселя стремится к правой (равенство Парсеваля).

СКОЛЬКО ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ ?

I. На кружок пришли школьники из n различных школ. Из каждой школы было ровно n человек: один первоклассник, один второклассник,..., один n-классник. Можно ли всех выстроить в квадрат $n \times n$ так, чтобы ни в одном ряду и ни в одной колонне не оказалось двух ребят из одной школы или из одинаковых классов, если (а) $n = 3$; (б) $n = 5$; (в) $n = 4$; (г)* $n = 6$?

Определение. Пусть в множестве Π (элементы которого мы будем называть точками) выделены некоторые подмножества (мы будем называть их прямыми) так, что выполнены следующие свойства (аксиомы):

АПI. В множестве Π существуют 3 точки, не принадлежащие одной прямой.

АП2. Для любых двух различных точек Π существует ровно одна прямая, которая их содержит.

АП3. Для любой прямой ℓ и любой точки A существует ровно одна прямая, которая содержит A и параллельна ℓ (параллельными называются совпадающие или не пересекающиеся прямые).

В таком случае множество Π называется (аффинной) плоскостью.

2. Доказать, что на плоскости не менее 4 точек.

3. Привести пример плоскости из 4 точек.

4. Может ли плоскость иметь ровно (а) 5; (б) 7; (в) 9 точек?

5. Может ли на одной прямой плоскости быть 4 точки, а на другой – 5 точек?

6. Докажите, что на любых двух прямых плоскости одинаковое число точек.

7. Пусть на прямой n точек. (а) Сколько точек на плоскости? (б) Сколько на этой плоскости прямых?

8. Придумать плоскость, прямая на которой содержит (а) 3 точки; (б) 5 точек; (в) 4 точки; (г)* p точек (p – простое).

9.* Может ли прямая на плоскости содержать (а) 6; (б) 9 точек?

IO. (Проективная плоскость.) Система линий метро в городе Великий Гусляр устроена так, что с любой станции на любую можно проехать без пересадки, а любые две линии имеют ровно одну общую станцию, и линий не менее двух. Доказать, что (а) станций не меньше 7; (б) если закрыть все станции одной линии, то получится аффинная плоскость (как?); (в) число станций равно числу линий; (г) найти число станций, если на линии n станций.

II. Какое наибольшее число клеток в квадрате (а) 7 на 7; (б) I3 на I3 можно закрасить так, чтобы никакие 4 закрашенные клетки не оказались в углах прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата?