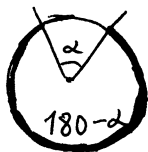
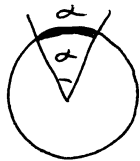


Листок Г.2. Задачи по геометрии. (Окружность.)

Напомним некоторые определения. Дугой называется часть окружности, заключенная между двумя точками. Величиной дуги называется величина


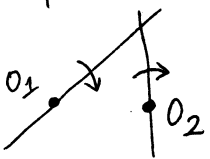


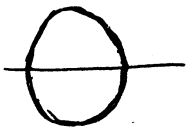
угла α , вершина которого в центре окружности, а стороны проходят через концы дуги, если дуга лежит внутри него, и $360^\circ - \alpha$ если дуга лежит вне угла. Касательной к окружности называется прямая, проходящая через некоторую точку A этой окружности и перпендикулярная радиусу OA .

Основным фактом всего учения об окружности является такая

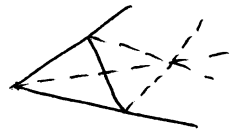
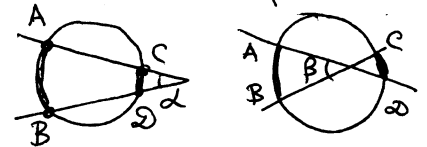
ТЕОРЕМА. ВЕЛИЧИНА ВПИСАННОГО УГЛА РАВНА ПОЛОВИНЕ ДУГИ, НА КОТОРУЮ ОН ОПИРАЕТСЯ.

проходящий через центр окружности

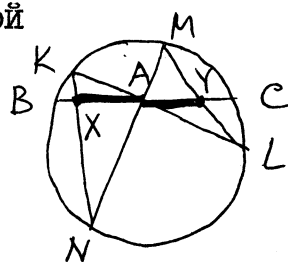
1. Докажите, что перпендикуляр к хорде, делит ее пополам.
2. Две дуги, меньшие 180° , равны тогда и только тогда, когда равны стягивающие их хорды. (Рассматриваются дуги одной окружности.)
3. Две дуги, отсеченные от окружности параллельными прямыми, равны. 
4. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны.
5. Дан отрезок AB и угол φ . Найти множества тех точек, из которых отрезок виден под углом: равным φ ; большим φ ; меньшим φ .
6. Две прямые, закрепленные в точках O_1 и O_2 , вращаются со скоростью 1 об/мин. Какую кривую описывает точка их пересечения? 
7. Для каких треугольников центр описанной окружности лежит внутри треугольника?
8. Доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.
9. Построить касательную к данной окружности, проходящую через данную точку вне этой окружности.
10. Построить общие касательные двух непересекающихся окружностей (их четыре!).
11. Окружность касается двух параллельных прямых. Под каким углом виден из центра этой окружности отрезок, отсекаемый прямыми от касательной к окружности?
12. В середине лестницы, стоящей у стены, сидит котенок. По какой кривой он будет двигаться, когда лестница начнет скользить и падать?
13. Окружность с центром O и радиусом r является вневписанной для треугольника ABC (точка O принадлежит углу A). Известно, что $AO = a$. Найдите периметр треугольника.
14. Нарисуйте множество точек, из которых данный треугольник виден под тупым углом.
- 15*. На сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах построены круги. Доказать, что они покроют весь четырехугольник.



- 16.* Нарисована окружность с диаметром. Пользуясь только линейкой, опустить из точки A (см. рисунок) перпендикуляр на диаметр.
17. Доказать, что середины всех хорд окружности, проходящих через некоторую точку A , лежат на одной окружности.
18. (Важный факт!) Доказать, что во вписанном четырехугольнике суммы противоположных углов равны 180° .
19. (Важный факт!) Доказать, что если в четырехугольнике сумма двух противоположных углов равна 180° , то его можно вписать в окружность.
20. (Важный факт!) Доказать, что в описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.
21. (Важный факт!) Доказать, что если в четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.
- 22.* Доказать, что отрезки, указанные на рисунке, равны.
23. (Важный факт!) Доказать, что угол α равен полуразности величин дуг AB и CD , а угол β равен полусумме величин этих дуг.
24. Окружность разбита четырьмя точками на четыре дуги. Их середины обозначены (по кругу) A , B , C и D . Доказать, что $AC \perp BD$.
- 25.* Доказать, что точка, симметричная точке пересечения высот треугольника относительно любой его стороны, лежит на описанной окружности.
26. Доказать, что биссектрисы одного внутреннего и двух внешних углов треугольника пересекаются в одной точке.
- 27.* Четыре прямые при пересечении образуют четыре треугольника. Доказать, что окружности, описанные около этих треугольников, имеют общую точку.
28. Доказать, что угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, равен половине дуги, отсекаемой этой хордой.
29. Стороны треугольника равны a , b , c . Найти отрезки, на которые они делятся точками касания со вписанной окружностью.
30. Стороны описанного шестиугольника равны I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 и a (в указанном порядке). Найти a (середина сторон).
- 31.* Перпендикуляры, опущенные из вершин вписанного в окружность четырехугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке.
- 32.* Три окружности радиуса I пересекаются в одной точке. Доказать, что радиус окружности, проходящей через их центры, равен I .
- 33.* На окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника ABC , взята точка M , лежащая на дуге BC . Доказать, что $AM = BM + CM$.



- 34* Дана окружность и на ней три различные точки, в которых с ней пересекаются продолжения высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из одной вершины вписанного в окружность треугольника. Постройте этот треугольник.
- 35* Построить треугольникам по радиусам вписанной и невписанной окружностей и периметру.
- 36* Через точки A и B пересечения двух окружностей проведены две прямые. Пусть C и D - точки их пересечения с первой окружностью, E и F - со второй. Доказать, что $CD \parallel EF$.
- 37* В треугольнике проведены три высоты. Доказать, что отмеченные на рисунке углы попарно равны.
- 38* (Задача о бабочке.) Через середину A произвольной хорды BC окружности проведены две секущие KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от BC), KN пересекает BC в точке X , ML - в точке Y . Доказать, что $AX = AY$.
- 39* Доказать, что в любом треугольнике три середины сторон, три основания высот и три точки, делящие пополам отрезки высот от точки их пересечения до вершин, лежат на одной окружности (окружность девяти точек).
- 40* Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из любой точки окружности на стороны вписанного в нее треугольника, лежат на одной прямой.
- 41* Окружность катится без проскальзывания по окружности вдвое большего радиуса, оставаясь внутри неё. Доказать, что любая точка внутренней окружности движется при этом по прямой.



У Ч Е Т Р Е Ш Е Н Н Ы Х З А Д А Ч

I 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41

② I. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на основании AC взята точка M так, что $AM = a$, $MC = b$. В треугольнички ABM и CBM вписаны окружности. Найти расстояние между точками касания этих окружностей со стороной BM .

① 2. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, опущенными на гипотенузу.

① 3. Дана окружность и точка A вне ее. AB и AC — касательные к окружности (B и C — точки касания). Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на данной окружности.

① 4. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a . Определить расстояние между серединой отрезка AM , где M — середина BC , и точкой N на стороне CD , делящей ее в отношении $CN : ND = 3 : 1$.

① 5. В окружности радиуса R проведен диаметр и на нем взята точка A на расстоянии a от центра. Найти радиус второй окружности, которая касается диаметра в точке A и изнутри касается данной окружности.

② 6. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды равной длины. Каждая хорда делится точками пересечения на 3 равные части. Найти радиус окружности, если длина каждой из хорд равна a .

① 7. Найти сумму квадратов расстояний от точки M , взятой на диаметре некоторой окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд, если радиус окружности равен R , а расстояние от M до центра равно a .

① 8. Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна линии центров. Доказать.

① 9. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60° . Найти радиусы окружностей, зная расстояние между их центрами.

② 10. В треугольнике ABC сторона AB равна 3, а высота CD , опущенная на сторону AB , имеет длину $\sqrt{3}$. Основание D высоты CD лежит на стороне AB , длина отрезка AD равна длине стороны BC . Найти AC .

② II. В треугольнике ABC на наибольшей стороне AC , равной b , выбрана точка M . Найти наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и BCM .

③ 12. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) биссектрисы внутренних углов A и B пересекаются в точке M , а биссектрисы углов C и D — в точке N . Докажите, что длина отрезка MN равна $\frac{1}{2}(AD + BC - AB - CD)$.

③ 13. Из точек K , E , H , лежащих соответственно на сторонах

AB , BC и CA треугольника ABC , восстановлены к этим сторонам перпендикуляры. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AK^2 + BE^2 + CH^2 = KB^2 + EC^2 + HA^2$

② 14. На двух смежных сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники ABE и BCF . Докажите, что треугольник DEF равносторонний.

② 15. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину C прямого угла прямоугольного треугольника ABC с центром квадрата, построенного на гипотенузе, делит угол C пополам и равен $\sqrt{2}/2 \cdot (AC + BC)$.

③ 16. На плоскости даны три точки. Построить четырехугольник, для которого эти точки были бы серединами трех последовательных равных сторон.

③ 17. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O , причем $OC = AB$. Найти угол при вершине C .

③ 18. Найдите угол C треугольника ABC , если расстояние от вершины C до точки пересечения высот равно радиусу описанной окружности.

③ 19. Найдите угол C треугольника ABC , если вершина A равноудалена от центров вневписанных окружностей, касающихся сторон AB и BC .

② 20. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и четыре круга, каждый из которых касается одной стороны четырехугольника и продолжений двух соседних с ней сторон. Доказать, что центры этих кругов лежат на одной окружности.

③ 21. Даны две окружности разных радиусов, лежащие одна вне другой, и точка A на одной из них. Построить окружность, касающуюся двух данных и проходящую через точку A .

③ 22. Даны окружность, прямая и точка A на прямой. Построить окружность, касающуюся данных прямой и окружности и проходящую через точку A .

① 23. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу.

② 24. Даны длины сторон четырехугольника $ABCD$. Построить этот четырехугольник, если известно, что диагональ AC делит угол A пополам.

② 25. Построить треугольник по точкам пересечения продолжений биссектрисы, медианы и высоты, выходящих из одной вершины с описанной окружностью

① 26. Построить параллелограмм, если известны диагональ и высоты.

② 27. Построить треугольник по медиане к одной стороне и высотам к двум другим.

Листок Г.4. Задачи по геометрии.

Этот листок содержит геометрические задачи, большинство из которых требует применения подобия. Напомним основные свойства подобных треугольников.

Определение. Треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, если $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1 = BC/B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$

Признаки подобия. Если 1) $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$ или 2) $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1 = BC/B_1C_1$ или 3) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны.

I. Докажите, что треугольник с вершинами в серединах сторон треугольника ABC подобен треугольнику ABC .

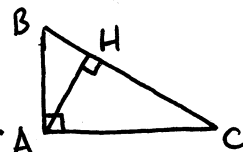
2. Дана окружность и точка O , лежащая внутри неё. Хорда AB проходит через точку O . Доказать, что $|OA| \cdot |OB|$ не зависит от выбора хорды AB . (Важный факт!)

3. Дана окружность и точка O , лежащая вне её. Прямая проходит через точку O и пересекает окружность в точках A и B . Доказать, что $|OA| \cdot |OB|$ не зависит от выбора прямой и равно квадрату отрезка касательной к окружности, проходящей через точку O . (Важный факт!)

4*. Три окружности радиуса r проходят через точку A . Доказать, что три другие точки их пересечения лежат на окружности радиуса r .

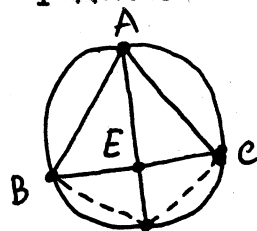
5*. Доказать, что если у шестиугольника, вписанного в окружность, две пары противоположных сторон параллельны, то и оставшиеся 2 противоположные стороны параллельны.

6. Доказать теорему Пифагора, используя подобие треугольников, изображенных на рисунке. Доказать, что $|AH|^2 = |BH| \cdot |HC|$.



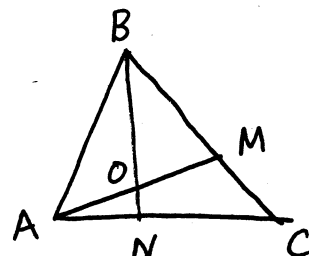
7. Докажите, что биссектриса AE треугольника ABC делит сторону BC в отношении $AB : AC$. Докажите аналогичное утверждение для биссектрисы внешнего угла. (Важный факт!)

8*. В треугольнике ABC проведена биссектриса AE . Докажите, что $|AE|^2 = |AB| \cdot |AC| - |EB| \cdot |EC|$ (Указание. Описать окружность около ABC и продолжить AE до пересечения с этой окружностью.)



9*. Используя задачи 7 и 8, выразить длину биссектрисы через стороны треугольника.

10*. Дан треугольник ABC . Из его медиан построен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан этого треугольника — треугольник $A_2B_2C_2$. Доказать, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны и определить коэффициент подобия.



II. (См. рисунок) Найти $AO : OM$, если $AN : NC = \alpha$, $BM : MC = \beta$.

12*. В шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны. Доказать, что $AB - DE = EF - BC = CD - FA$.

