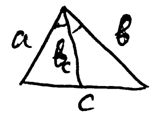
Задачи для письменных работ по геометрии.

I. Обозначим точки пересечения медиан треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ через M_1 и M_2 . Доказать, что $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}\,(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2})$.

2. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC . Доказать, что $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}$

3. Показать, что в треугольнике ABC биссектриса угла A равна $(|AB|\cdot\overrightarrow{AC} + |AC|\cdot\overrightarrow{AB})/(|AB|+|AC|)$

4. Используя предыдущую задачу, доказать, что



$b_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$, где p – полупериметр.

5. Доказать, что отрезок, соединяющий вершину прямого угла прямоугольного треугольника с центром квадрата, построенного на гипотенузе, (I) делит прямой угол пополам; (2) имеет длину, равную сумме длин катетов, умноженной на

6. Доказать, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин вписанного в нее правильного треугольника постоянна. Выразить её через сторону треугольника.

7. В треугольнике $a^2+b^2=5c^2$. Доказать, что 2 медианы взаимно перпендикулярны. Верно ли обратное?

8. В треугольнике ABC единичной площади проведен отрезок AD . пересекающий медиану CF в точке M , причем $FM=\frac{1}{4}CF$. Найти площадь треугольника ABD.

9. Доказать, что если в треугольнике со сторонами a , b , c прямая, проходящая через центр описанной окружности и точку пересечения медиан, перпендикулярна c , то $a^2+b^2=2c^2$. Верно ли обратное?

I0. Стороны параллелограмма пропорциональны его диагоналям. Доказать, что углы параллелограмма равны углам между его диагоналями.

II. Выразить величину задачи 2 через стороны треугольника.

I2. В окружность вписан треугольник ABC . Биссектриса угла ACB пересекает окружность в точке S . Выразить $\overrightarrow{CS}$ через $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

I3. Доказать, что в треугольнике со сторонами a , b , c и радиусом описанной окружности R имеет место равенство $|OH|^2 = 9R^2-(a^2+b^2+c^2)$, где O – центр описанной окружности, H – точка пересечения высот.

I4. Радиус вписанной в треугольник окружности равен r , радиус описанной окружности равен R . Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.