

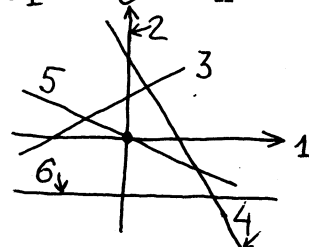
## Метод координат

Метод координат позволяет перевести любое геометрическое утверждение на язык алгебры. Упражнениям в таком "переводе" и посвящено предлагаемое задание.

Напомним, что на координатной плоскости всякая точка задается своими координатами  $\langle x, y \rangle$ , а каждая прямая есть множество точек  $\langle x, y \rangle$ , для которых  $ax + by + c = 0$ . (Числа  $a$  и  $b$  не могут быть одновременно равны 0.) В предлагаемых задачах каждая точка задается своими координатами, а прямая — коэффициентами уравнения.

1. Как определить, (1) лежит ли точка  $\langle p, q \rangle$  на прямой  $ax + by + c = 0$ ; (2) параллельна ли прямая  $ax + by + c = 0$  оси ординат; (3) задают ли уравнения  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  и  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$  одну и ту же прямую или нет?

2\*. Что можно сказать о знаках коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$ , если прямая  $ax + by + c = 0$  — одна из 6 прямых, изображенных на рисунке? (Прямые 1 и 2 — оси координат.)



3. Как найти (1) уравнение прямой, проходящей через точки  $\langle x_1, y_1 \rangle$  и  $\langle x_2, y_2 \rangle$ ; (2) точку пересечения прямых с уравнениями  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ,  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ?

4\*. Даны 2 точки  $A$  и  $B$  и прямая  $l$  (заданные, напомним, своими координатами и коэффициентами уравнения). Как определить, лежат ли точки  $A$  и  $B$  по одну сторону от прямой  $l$  или нет?

5. Как найти точку, делящую заданный отрезок  $AB$  в заданном отношении  $p : q$  ?

6. Заданы координаты вершин треугольника. Как найти координаты точки пересечения его медиан?

7. Как определить, (1) эквивалентны ли направленные отрезки  $AB$  и  $CD$ ; (2) параллельны ли отрезки  $AB$  и  $CD$  ?

8\*. Найдите координаты какого-нибудь направленного отрезка, параллельного прямой  $ax + by + c = 0$ . (Ответ.  $\langle b, -a \rangle$ .)

9\*. Как определить, параллельны ли прямые  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  и  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$  ?

10. Куда переводит гомотетия с центром  $\langle a, b \rangle$  и коэффициентом  $k$  точку  $\langle x, y \rangle$  ? (Проверьте ответ при  $k = 1$  и  $k = -1$ .)

11. Как найти расстояние между точками  $\langle x_1, y_1 \rangle$  и  $\langle x_2, y_2 \rangle$  ?

12. Как проверить, является ли угол  $ABC$  прямым, если заданы координаты точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  ? (Указание. Используйте скалярное произведение.)

13\*. Доказать, что направленный отрезок с координатами  $\langle a, b \rangle$  перпендикулярен прямой  $ax + by + c = 0$ .

14.\* Как определить, перпендикулярны ли прямые  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  и  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$  ?

15.\* Заданы координаты точек  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ . Как определить, равны ли углы  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  ?

16. Записать уравнение, множеством решений которого является окружность с центром  $\langle a, b \rangle$  и радиусом  $r$ .

17.\* Доказать, что множеством решений уравнения  $x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$  является окружность, точка или пустое множество. Как определить, что именно? Как найти центр и радиус окружности (если это окружность?)

18.\* Доказать, что расстояние от точки  $\langle p, q \rangle$  до прямой с уравнением  $ax + by + c = 0$  равно  $|ap + bq + c| / \sqrt{a^2 + b^2}$ .  
(Указание. Вектор  $\langle a/\sqrt{a^2 + b^2}, b/\sqrt{a^2 + b^2} \rangle$  перпендикулярен к этой прямой и имеет единичную длину.)

19.\* Даны координаты  $\langle a_1, a_2 \rangle, \langle b_1, b_2 \rangle, \langle c_1, c_2 \rangle$  точек  $A, B$  и  $C$ . Как найти площадь треугольника  $ABC$  ? (Ответ:  $S = \frac{1}{2} | (b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (c_1 - a_1)(b_2 - a_2) |$ .)

20. Найти координаты точки, в которую переходит точка  $\langle p, q \rangle$  при повороте вокруг начала координат на  $90^\circ$  против часовой стрелки.

21.\* Как найти проекцию заданной точки на заданную прямую?

22.\* Доказать, что график квадратного трехчлена  $y = x^2$  есть множество всех точек, равноудаленных от некоторой точки  $A$  и прямой  $l$ . Найти  $A$  и  $l$ .

23.\* Даны две точки  $A$  и  $B$  и число  $c > 0$ . Доказать, что множество тех точек  $X$ , для которых  $|AX|/|BX| = c$ , — окружность.

24.\* Найти такие точки  $A$  и  $B$  и число  $c$ , чтобы множество  $\{X \mid ||AX| - |BX|| = c\}$  совпадало бы с гиперболой  $\{\langle x, y \rangle \mid xy = 1\}$ .

25.\* Степенью точки относительно окружности называется квадрат длины касательной, проведенной из этой точки к этой окружности (если точка лежит вне окружности). Придумать разумное определение степени для точек внутри окружности. Доказать, что множество всех точек, имеющих равные степени относительно двух данных окружностей, есть прямая (называемая радикальной осью пары окружностей).

26.\* (Продолжение.) Даны три окружности. Доказать, что 3 радикальные оси пересекаются в одной точке. Вывести отсюда, что если окружности попарно пересекаются, то их общие хорды имеют общую точку.

Зачетные задачи. 1. При каких условиях на координаты точек

$A, B, C, D$  четырехугольник  $ABCD$  — ромб?

2. Даны координаты вершин трапеции. Как написать уравнение её средней линии?