Комплексные числа, ч. I (Структура поля.)

I. Немного мистики.

Как известно, не существует такого действительного числа i, что $i^2=-1$. Однако забудем на минуту об этом и постараемся сложить и перемножить по обычным правилам числа $2+3i$ и $7+2i$:

$$(2+3i)+(7+2i)=(2+7)+(3+2)i=9+5i;$$
$$(2+3i)\cdot(7+2i)=14+4i+21i+6i^2=(14-6)+(4+21)i=8+25i.$$

I. Сложить и перемножить $(2+3i)$ и $(7-i)$.

2. Найти $(-i)^2$, $(-i)^{10}$.

3.* Найти $(1+i)^{1001}$

4. Доказать тождество $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$

5.* Найти x, для которого $x\cdot(1+i)=1$.

6.* Найти x, для которого $x^2+2x+2=0$.

7.* Найти x, для которого $x^2=i$.

2. Точные определения.

<u>Комплексным числом</u> называется пара $\langle a,b\rangle$, где a, b – любые действительные числа. Комплексные числа $\langle a,b\rangle$ и $\langle a',b'\rangle$ равны, если $a=a'$, $b=b'$. Иногда вместо $\langle a,b\rangle$ пишут $a+bi$; мы не придаем (пока) знакам $+$ и i никакого смысла. Комплексное число $\langle a,b\rangle$ можно изобразить точкой на координатной плоскости с координатами a и b. Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$ (complex – комплексное).

I. Изобразить числа $2+3i$, $7-i$, $1+i$.

<u>Суммой</u> чисел $\langle a,b\rangle$ и $\langle a',b'\rangle$ называется число $\langle a+a',b+b'\rangle$. (Как для векторов.) Очевидно, выполнены аксиомы коммутативности ($x+y=y+x$) и ассоциативности ($(x+y)+z=x+(y+z)$)

2. Какое комплексное число нужно назвать нулем (0), чтобы для любого комплексного z выполнялась аксиома $z+0=z$?

3. Как определить операцию взятия противоположного ($z\mapsto -z$), чтобы для любого комплексного z выполнялась аксиома $z+(-z)=0$?

Решив задачи 2 и 3, мы определили на $\mathbb{C}$ операции, удовлетворяющие всем аксиомам сложения – и, следовательно, всем их следствиям. Так что теперь можно складывать и вычитать комплексные числа так же свободно, как и действительные. (Напомним, в частности, что $z-w$ есть по определению $z+(-w)$.)

4. Точки, соответствующие комплексным числам z_1, z_2, z_3, z_4 являются вершинами параллелограмма. Выразить z_4 через z_1, z_2, z_3.

<u>Произведением</u> комплексных чисел $\langle a,b\rangle$ и $\langle a',b'\rangle$ называется число $\langle aa'-bb',\ ab'+a'b\rangle$

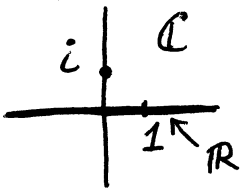
5. Найти $\langle 2, 3\rangle\cdot\langle 7, -1\rangle$, $\langle 0, 1\rangle\cdot\langle 0, 1\rangle$.

6. Доказать справедливость аксиом коммутативности ($xy = yx$), ассоциативности ($x\cdot(yz) = (xy)z$) и дистрибутивности ($x(y+z) = xy + xz$) умножения.

7. Какое число следует назвать единицей (I) , чтобы выполнялась аксиома $z\cdot 1 = z$?

О том, как определять $1/z$, мы скажем дальше.

Умножая и складывая комплексные числа, вторая компонента которых равна 0, мы видим ($\langle a,0\rangle + \langle b,0\rangle = \langle a+b,0\rangle$, $\langle a,0\rangle\cdot\langle b,0\rangle = \langle ab,0\rangle$), что они ведут себя так же, как действительные числа – их первые компоненты. Поэтому отождествляют действительное число a с комплексным числом $\langle a,0\rangle$. Так "действительная прямая" становится частью "комплексной плоскости". Обозначим число $\langle 0,1\rangle$ через i .



8. Доказать, что $i^2 = -1$

9. Доказать, что $\langle a,b\rangle = a+bi$ (Полная запись: $\langle a,b\rangle = \langle a,0\rangle + \langle b,0\rangle\cdot\langle 0,1\rangle$.)

3. Действительная и мнимая части. Сопряжение. Модуль.

<u>Действительной</u> и <u>мнимой</u> частями комплексного числа $\langle a,b\rangle$ называются (действительные) числа a и b . Обозначения: $a = Re(z)$, $b = Im(z)$ (*real* – действительный, *imaginary* – мнимый). Число $\bar{z} = \langle a,-b\rangle$ называется <u>сопряженным</u> к числу $z = \langle a,b\rangle$. <u>Модулем</u> $|z|$ числа $z = \langle a,b\rangle$ называется расстояние от начала координат до изображающей число z точки комплексной плоскости: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

I. Нарисовать множество $\{z \mid Re\, z + Im\, z = 1\}$.

2. Нарисовать множество $\{z \mid Im((1+i)z) = 1\}$.

3.* Нарисовать множество $\{z^2 \mid Im\, z = 1\}$

4. Нарисовать множества $\{z \mid z = \bar{z}\}$, $\{z \mid z = -\bar{z}\}$, $\{z \mid z = i\bar{z}\}$

5. Нарисовать множество $\{z \mid 1 \le |z| < 2\}$.

6. Нарисовать множество $\{z \mid |z+(1+i)| \le 1\}$

7. Нарисовать множество $\{z \mid |z+i| = |z+2|\}$

8. Доказать, что $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{(zw)} = \bar{z}\cdot\bar{w}$, $\bar{\bar{z}} = z$ для любых $z, w \in \mathbb{C}$.

9. Доказать, что числа $z\cdot\bar{z}$ и $z+\bar{z}$ действительны (то есть их мнимая часть равна 0).

I0.* Известно, что числа zw и $z+w$ действительны. Доказать, что либо z и w оба действительны, либо $z = \bar{w}$.

II. Доказать, что $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$ (Внимание: слева стоит действительное число, а справа – комплексное. Более точно следовало бы написать $\langle |z|^2, 0\rangle = z\cdot\bar{z}$.)

I2. Доказать, что $|z+w| \le |z|+|w|$ для любых $z, w \in \mathbb{C}$.

I3. Когда неравенство предыдущей задачи превращается в равенство?

I4. Доказать, что модуль произведения равен произведению модулей: $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$ для всех $z, w \in \mathbb{C}$.

I5.* Доказать, что если $z\cdot w = 0$, то $z = 0$ или $w = 0$.

4. Деление

I. Найти такое z , что $z(1+i) = 1$ (Указание. Вычислите $(1+i)(1-i)$.)

2. Доказать, что для всякого $z \ne 0$ найдется такое w , что $zw = 1$ (Указание. Число $z\cdot\bar{z}$ действительно.)

Решив задачу 2, мы получаем возможность ввести операцию взятия обратного $z \longmapsto 1/z$, определенную при всех $z \ne 0$, так, чтобы выполнялась аксиома $z\cdot(1/z) = 1$ для всех $z \ne 0$.

Как мы видим, для комплексных чисел выполнены все аксиомы сложения и умножения (см. "Действительные числа") и, следовательно, все их следствия. (Аксиомы $z\cdot 0 = 0$ и $1+\ldots+1 \ne 0$ очевидно верны.)

3. Доказать, что если $z\cdot w = 0$, то $z = 0$ или $w = 0$.

4. Вычислить $1/i$, $1/(-2i)$, $1/(1+i)$, $1/(4-7i)$. Напомним, что a/b есть по определению $a\cdot(1/b)$

5. Вычислить $(1+i)/(1-i)$, $(3+4i)/(1+i)$, $(5+i)/(1-5i)$.

6. Доказать, что $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}$.

5. Квадратные уравнения.

I. Найти все комплексные z , для которых $z^2 = 1$. (Очевидно, I и –I таковы; есть ли другие?) (Указание: $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$)

2. Найти все комплексные z , для которых $z^2 = -1$.

3. Найти все комплексные z , для которых $z^2 = a$. (Число a – произвольное действительное число.)

4. Числа a , b , c – произвольные действительные. При каких z выполнено равенство $az^2 + bz + c = 0$?

5.* Доказать, что для любого комплексного c уравнение $z^2 = c$ имеет ровно 2 решения.

6.* Решить уравнения $z^2 = i$, $z^2 = (1+i)$.

7.* Доказать, что при любых комплексных a, b, c при $a \neq 0$ уравнение $az^2+bz+c=0$ имеет I или 2 решения в зависимости от того, равен ли дискриминант $D=b^2-4ac$ нулю.

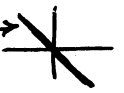
8. Разложить на множители многочлены z^2+1 и z^2-2z+2. (Многочлены - множители могут иметь комплексные коэффициенты.)

6. Комплексные числа и преобразования плоскости.

Функции $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ можно рассматривать как преобразования комплексной плоскости.

I. Найти образ и прообраз множества  при преобразовании $f: z \mapsto z+(2+i)$

2. Какие преобразования (повороты, симметрии, гомотетии и т.д.) задают формулы: (I) $z \mapsto \bar{z}$; (2) $z \mapsto -z$; (3) $z \mapsto iz$; (4) $z \mapsto 2z$; (5) $z \mapsto i\bar{z}$?

3.* Написать формулы, задающие: (I) центральную симметрию с центром $(1+2i)$; (2) осевую симметрию с осью $\longrightarrow$  (3) гомотетию с центром $1-i$ и коэффициентом 2.

4.* Найти образ прямой $\operatorname{Re} z=1$ при функции $z \mapsto z^2$.

5.* Доказать, что точки z и $1/\bar{z}$ лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, и произведение их модулей равно I. (Указание. $1/\bar{z} = z/(z\bar{z})$) Преобразование $z \mapsto 1/\bar{z}$ называется инверсией с центром 0 и радиусом I.

6.* Найти образ прямой $\operatorname{Re} z=1$ при функции $z \mapsto 1/z$ (Указание. Это - окружность.)

7.** Доказать, что образом прямой или окружности при функции $z \mapsto 1/z$ является прямая или окружность. (При этом прямая может перейти в окружность и наоборот!)

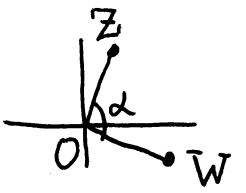
8.** Доказать аналогичное утверждение для функции $z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$.

9. Доказать, что если c - комплексное число, равное по модулю I, то $z \mapsto cz$ есть движение (т.е. не меняет расстояний.) Мы увидим впоследствии, что это движение - поворот.

7. Разное.

I.* Изобразим комплексные числа z и w точками Z и W плоскости. Доказать, что

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |OZ| \cdot |OW| \cdot \cos\alpha$$



2.* Доказать, что если z - комплексный корень уравнения $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ с действительными коэффициентами a_i, то $\bar{z}$ - также его корень.

3.* Доказать, что если уравнение $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ с действительными коэффициентами a_i имеет ровно 1983 корня, то оно имеет действительный корень.

4.* Найти все "автоморфизмы $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$", т.е. все функции $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для которых $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{C}$ и $f(t) = t$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Назовем <u>целым комплексным</u> числом число вида $a+bi$, где a, b – целые (в обычном смысле) числа. Очевидно, сумма и произведение целых комплексных чисел – целое (комплексное) число. Множество всех целых комплексных чисел обозначается $\mathbb{Z}[i]$.

5.* Пусть $a, b \in \mathbb{Z}[i]$. Говорят, что a делится на b, если существует $c \in \mathbb{Z}[i]$, для которого $a = bc$. Найти все делители числа I. (Указание. Их четыре: ± 1 и $\pm i$. Чтобы доказать, что других нет, используйте формулу $|zw| = |z| \cdot |w|$.)

6.* Найдите все делители чисел 2 и 3.

7.* Число $a \in \mathbb{Z}[i]$ называется простым (в $\mathbb{Z}[i]$), если оно не имеет разложений $a = bc$, кроме тех, в которых b или c является делителем I. Будут ли числа 2, 3, 5, $1+i$ простыми?

8.* Разложить числа из предыдущей задачи на простые множители.

9.** Сформулировать и доказать теорему об однозначности разложения на простые множители для элементов $\mathbb{Z}[i]$.

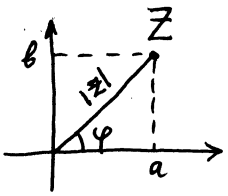
10.** Доказать, что простое (в обычном смысле) число p будет простым в $\mathbb{Z}[i]$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + y^2 = p$ не имеет решений в обыкновенных целых числах.

11.** (Продолжение.) Доказать, что это бывает тогда и только тогда, когда p дает остаток 3 при делении на 4.

12.* Доказать, что если $1/z_1 + 1/z_2 + \ldots + 1/z_n = 0$ то найдутся такие положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \ldots + \alpha_n z_n = 0$.

Комплексные числа, часть II

I. Модуль и аргумент.



Напомним, что комплексное число $z=a+bi$ изображается точкой $Z\langle a,b\rangle$, а расстояние от начала координат до точки Z называется модулем числа z и обозначается $|z|$: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Аргументом числа z называется величина угла φ, на который нужно повернуть ось абсцисс для того, чтобы она проходила через точку Z. Число φ определено с точностью до кратных 360^0 (или 2π, если углы измеряются в радианах): если φ – аргумент z, то $\varphi+360\cdot k$ $(\varphi+2\pi k)$ – также аргумент z (при целых k).

I. Найти модуль и аргумент чисел $i, 1+i, \sqrt{3}+i, 3-4i, -7$.

2. Число z имеет модуль r и аргумент φ. Найти его действительную и мнимую части.

3. По модулю и аргументу (измерен в радианах) найти число:
(1) $2, \pi$; (2) $0, \pi/3$; (3) $\sqrt{2}, -\pi/4$; (4) $-2, 3\pi/2$; (5) $1, \pi/2$.

4. Число z_1 имеет модуль r_1 и аргумент φ_1, число z_2 имеет модуль r_2 и аргумент φ_2. Доказать, что их произведение z_1z_2 имеет модуль $r_1\cdot r_2$ и аргумент $\varphi_1+\varphi_2$. (Указание. Использовать формулы для синуса и косинуса суммы.)

При умножении комплексных чисел модули умножаются, а аргументы складываются!

Мы видим, что аргумент подобен логарифму: аргумент произведения есть сумма аргументов. Это не случайно: на самом деле аргумент есть (при надлежащем понимании этих слов) "мнимая часть логарифма".

Обозначим через $U(\varphi)$ комплексное число с модулем I и аргументом φ.

5. Доказать, что $U(\varphi_1+\varphi_2)=U(\varphi_1)\cdot U(\varphi_2)$, $U(-\varphi)=1/U(\varphi)=\overline{U(\varphi)}$.

6. Доказать, что при целом n выполнено равенство $U(n\varphi)=[U(\varphi)]^n$.

7. Используя формулы $(a+b)^2=\ldots$, $(a+b)^3=\ldots$ и предыдущую задачу, выразить $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$, $\cos 3\varphi$, $\sin 3\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

8.* Вычислить суммы $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi$ и $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi$. (Указание. Использовать функцию U и формулу суммы геометрической прогрессии.)

9.* Вычислить суммы $\cos\varphi+2\cos 2\varphi+\ldots+n\cos n\varphi$ и $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+n\sin n\varphi$.

10. Пусть φ – произвольное число. Рассмотрим преобразование f комплексной плоскости, являющееся умножением на $U(\varphi)$: $f(z)=z\cdot U(\varphi)$. Что это за преобразование?

11.* Пусть w – произвольное комплексное число. Доказать, что преобразование умножения на w ($z\longmapsto wz$) есть преобразование подобия, являющееся композицией поворота и гомотетии. Найти угол поворота и коэффициент гомотетии.

12.* **Доказать, что** $\cos\varphi+\cos\left(\varphi+\frac{360}{n}\right)+\cos\left(\varphi+2\cdot\frac{360}{n}\right)+\ldots+\cos\left(\varphi+(n-1)\frac{360}{n}\right)=0$ $(n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ \varphi\in\mathbb{R})$.

2. Разные задачи.

13.* Доказать, что если числа a, b, c являются вершинами равностороннего треугольника, то $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$. Верно ли обратное?

14. Какие значения может принимать аргумент числа z, если $|z-2i|<1$?

15.* Найти множество тех z, для которых (1) $|(z-1)/(z+1)|=1$; (2) $|(z-1)/(z+1)|=2$.

16.* На плоскости даны точки a и b. Где находятся те z, для которых число $(z-a)/(z-b)$ (1) действительное; (2) чисто мнимое?

17.* Доказать, что уравнение вида $z\bar{z}+az+\bar{a}\bar{z}+c=0$, где $a\in\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{R}$, задает пустое множество, точку или окружность. Как определить, что именно? Всякую ли окружность можно так задать?

3. Корни из единицы.

18. Найти все z, для которых $z^n=1$. (Их n.) Они называются корнями n-ой степени из 1.

19. Найти все z, для которых $z^n=a$ (a – заданное комплексное число).

20.* Если z – корень n-ой степени из 1, то z^k – также корень n-ой степени из 1 (при любом k). Если среди z^k при всех $k\in\mathbb{Z}$ встречаются все корни n-ой степени из 1, то z называют <u>первообразным</u> корнем. Сколько существует первообразных корней n-ой степени, если (1) $n=6$; (2) $n=100$?

21.* Доказать, что сумма всех корней n-ой степени из 1 равна 0 (при $n>1$).

22.* Дан правильный многоугольник $A_1\ldots A_n$. Доказать, что сумма $|XA_1|^2+|XA_2|^2+\ldots+|XA_n|^2$ зависит лишь от расстояния от точки X до центра описанной около многоугольника окружности.

23.* Имеется конечное множество $S\subset\mathbb{C}$, для которого выполнено такое свойство: произведение двух элементов из S принадлежит S. Известно, что $0\notin S$. Доказать, что: (1) $1\in S$; (2) если $x\in S$ то $1/x\in S$; (3) $|x|=1$ для всех $x\in S$; (4) всякий элемент $x\in S$ является корнем некоторой степени из 1; (5) S состоит из всех корней степени n из 1, где n – число элементов в S.

24.* Найти произведение всех корней степени n из 1.

25.* Число x является корнем из 1 степеней a и b. Доказать, что оно является корнем из 1 степени НОД (a, b). В частности, ни

одно число (кроме 1) не может одновременно быть корнем из I степеней a и b, если a и b взаимно просты.

26.* Существует ли число z с $|z|=1$, не являющееся корнем из I (ни для какой степени)?

27.** Является ли число $3/5 + 4/5\, i$ корнем из I ?

28.** Какие числа вида $a+bi$, где a и b рациональны, являются корнями из I ? (Ответ: $1, -1, i, -i$.)

4. Инверсия.

Инверсией с центром O и радиусом r называется преобразование, переводящее каждую отличную от O точку X в такую точку X', лежащую на луче OX, что $|OX|\cdot|OX'| = r^2$.

29. Какие точки неподвижны при инверсии? Чему равно $f\circ f$, если f – инверсия?

30. Доказать, что если f – инверсия, а точки A и B не лежат на прямой, проходящей через центр инверсии, то около четырехугольника с вершинами A, B, $f(A)$, $f(B)$ можно описать окружность.

31.* Доказать, что при инверсии прямые, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности, проходящие через центр инверсии; наоборот, окружности, проходящие через центр, переходят в прямые, не проходящие через центр.

32.* Доказать, что окружности, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности, не проходящие через центр инверсии.

33.* Куда переходит число z при инверсии с центром 0 и радиусом 1?

34.* Нарисовать множество $\{z \mid Re(1/z) = 1/2\}$.

35.* Доказать, что при преобразовании $z \mapsto 1/z$ прямые и окружности переходят в прямые и окружности (хотя окружности монут перейти в прямые, а прямые – в окружности).

36.* Доказать, что любое дробно-линейное преобразование (преобразование вида $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad-bc \neq 0$) является композицией нескольких преобразований, каждое из которых есть либо сдвиг ($z \mapsto z+c$), либо гомотетия ($z \mapsto kx$, $k \in \mathbb{R}$), либо поворот вокруг начала координат, либо преобразование $z \mapsto 1/z$. Что будет при $ad-bc=0$?

37.* Доказать, что при дробно-линейном преобразовании прямые и окружности переходят в прямые и окружности.

38.* Доказать, что при инверсии сохраняются углы между окружностями и прямыми: если окружности (или окружность и прямая, или две прямые) пересекались под углом α, то их образы тоже пересекаются под углом α (Угол измеряется как угол между касательными.)

39.* Доказать, что любое дробно-линейное преобразование сохраняет углы между прямыми и окружностями.

40.* Построить дробно-линейное преобразование, переводящее верхнюю полуплоскость $\{z \mid Im\, z > 0\}$ в единичный круг $\{z \mid |z| < 1\}$.