Комбинаторика, ч. I. (Подготовительные задачи. Принцип Дирихле.)

Подготовительные задачи.

I. Сколько диагоналей в 1983-угольнике?

2. Каждая из 10 команд сыграла с каждой по одному разу. Сколько всего было игр?

3. Сколько существует чисел от 1 до 1000, которые делятся на 2 или делятся на 3, но не делятся на 6?

4. Сколько существует двузначных чисел, первая цифра которых содержится среди цифр $\{1, 2, 3, 6\}$, а вторая – среди цифр $\{2, 3, 5, 7, 9\}$?

5. Экзаменационный билет содержит вопрос по алгебре, по геометрии и задачу. Вопросов по алгебре – 20, по геометрии – 30, задач – 100. Сколько различных билетов можно составить?

6. Автомобильный номер содержит 3 буквы и 4 цифры. Учитывая, что букв в русском алфавите 33, и разные машины должны иметь разные номера, оценить максимально возможное число автомобилей.

7. Известно, что в множестве A имеется a элементов, в множестве B – b элементов, а в $A \cap B$ – c элементов. Сколько элементов в множествах: (1) $A \cup B$ (2) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$?

8. Сколькими способами можно разменять 15 коп. монетами по 1 и 2 коп.? Монетами по 1, 2, 5 коп.?

Следующее (очевидное) утверждение весьма важно.

<u>Основной принцип комбинаторики</u>. Пусть A и B – два конечных множества, $f: A \to B$ – взаимно однозначная функция. Тогда число элементов в множестве A (обозначается $|A|$) равно числу элементов в множестве B : $|A| = |B|$.

Напомним, что для установления взаимно однозначного соответствия между A и B необходимо: (1) определить функцию $f: A \to B$, т.е. объяснить, чему равно значение $f(x)$ для любого $x \in A$; (2) доказать, что f – вложение, т.е. что если $x, y \in A$, $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$; (3) доказать, что f – наложение, т.е. что для любого $x \in B$ найдется такой $y \in A$, что $f(y) = x$.

Этот принцип полезен при решении предлагаемых ниже задач.

9. Доказать, что число 3-элементных подмножеств 1983-элементного множества равно числу 1980-элементных подмножеств того же множества. (Впоследствии мы найдем это число.)

10. Каких подмножеств больше у множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ – содержащих элемент 1 или не содержащих элемент 1 ?

11* Разобьем все подмножества данного конечного множества A на 2 класса – в класс $Ч$ включим множества с четным числом элементов, в класс $Н$ включим множества с нечетным числом элементов. Доказать, что $Ч$ и $Н$ содержат одинаковое число элементов.

12* На окружности нарисованы 1983 белые точки и одна черная точка. Чего больше: треугольников с белыми вершинами или 4-угольников с 3 белыми и 1 черной вершиной?

13* (Продолжение.) Чего больше – многоугольников, все вершины которых белые, или многоугольников, у которых одна вершина черная, а остальные белые?

Принцип Дирихле.

Основной принцип комбинаторики можно переформулировать так: если $|A| \neq |B|$, то не существует взаимно однозначной функции $f : A \to B$. Следующий принцип конкретизирует это утверждение.

<u>Принцип Дирихле</u>. Если $f : A \to B$ и $|A| > |B|$, то f не является вложением: существуют такие $a_1 \in A$ и $a_2 \in A$, что $a_1 \neq a_2$ и $f(a_1) = f(a_2)$.

1. У человека на голове не более 150000 волос. Доказать, что в Москве (население больше 7 млн.) есть два человека с одинаковым числом волос.

2. (Продолжение.) Доказать, что есть 40 человек с одинаковым числом волос.

3* Футбольный турнир проводится так, что каждая команда играет с каждой по одному разу. Доказать, что в любой момент турнира найдутся команды, сыгравшие равное число матчей.

4* В клетках шахматной доски 100 на 100 написаны целые числа, причем в соседних (имеющих общую сторону) клетках числа отличаются не более чем на 20. Доказать, что на доске имеются 3 одинаковых числа.

5* 65 конфет разделили между 12 школьниками. Доказать, что по крайней мере 2 из них получили конфет поровну (возможно, 0).

6* Код марсианского языка сопоставляет с каждой из 40 букв марсианского алфавита последовательность из точек и тире. Доказать, что хотя бы одна буква закодирована последовательностью из 5 или более значков.

7.* Имеется 20 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что нельзя, отложив в сторону некоторые из гирь (возможно, ни одной), разделить оставшиеся на 2 кучи равного веса. Доказать, что общий вес гирь превосходит I тонну.

8.* Доказать, что существует число вида III...III000...000, делящееся на I983. Доказать, что существует число вида III...II, делящееся на I983.

9.* Доказать, что из $n+1$ числа, меньшего $2n$, всегда можно выбрать 2, одно из которых делится на другое. (Указание. Можно требовать, чтобы частное было степенью числа 2.)

I0.* В ряд выписаны 2^n натуральных чисел. Известно, что если выписать все простые множители всех этих чисел, то среди них будет не более n различных. Доказать, что можно выбрать несколько стоящих подряд чисел так, чтобы их произведение было точным квадратом.

II.** Последовательность состоит из $mn+1$ действительного числа. Доказать, что можно зачеркнуть некоторые члены так, что останется либо возрастающая последовательность из $m+1$ числа, либо убывающая последовательность из $n+1$ числа.

I2. Двое играют в такую игру. Первый задумывает число от I до I000. Второй отгадывает это число, задавая любые вопросы, требующие ответа "да" или "нет". Придумать способ, гарантирующий отгадывание задуманного числа за I0 вопросов. Доказать, что не существует способа, гарантирующего отгадывание задуманного числа за 9 вопросов.

Комбинаторика, ч. 2 (Основные формулы. Подсчеты.)

Размещения с повторениями.

I. Докажите, что следующие множества:

(I) всех пятизначных чисел, составленных из цифр I, 2;
(2) всех подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$;
(3) всех функций из $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ в $\{1, 2\}$;
(4) всех способов освещения коммунальной кухни, где у каждой из 5 соседок – своя лампочка;
(5) всех делителей числа $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$;
(6) всех слагаемых, получающихся при раскрытии скобок в выражении $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)(i+j)$;

– имеют одинаковое число элементов. Найдите это число.

2. Докажите, что

если имеется набор из n различных символов, то можно составить n^k последовательностей длины k из этих символов

3. Сколько подмножеств имеет n-элементное множество?

4. Сколько существует функций $f: A \to B$, если $|A| = m$, $|B| = n$ (Напомним: $|X|$ – число элементов в X.)

Перестановки.

5. Сколькими способами можно построить группу из 7 человек в колонну по одному?

6. Докажите, что

существует ровно $n!$ последовательностей из чисел $1, 2, \ldots, n$

(Через $n!$ обозначают произведение $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$; считают, что $0! = 1$.)

7. Сколько существует функций $f: A \to B$, являющихся взаимно однозначными, если $|A| = m$, $|B| = n$?

8. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы они не били друг друга?

Размещения без повторений.

9. Сколько существует 4-значных чисел без повторяющихся цифр (таковы, например, 0123 и 9801)?

10. Пусть имеется m символов. Число последовательностей из них длины n, все элементы которых различны, обозначают A_m^n.

Доказать, что $\boxed{A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} \text{ при } m \geq n \text{ и } A_m^n = 0 \text{ при } m < n.}$

II. Сколько существует вложений $f: A \to B$, если $|A| = p$, $|B| = q$?

I2. Рояль имеет 88 клавиш. Сколько бывает последовательностей из 6 нот? из 6 нот, в которых ни одна нота не встречается дважды?

Сочетания

I3. Сколько существует четырехзначных чисел $a_1 a_2 a_3 a_4$, у которых $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$? (Указание. Из каждого такого числа можно получить 4! = 24 числа без повторяющихся цифр.)

I4. Число n -элементных подмножеств m-элементного множества обозначается C_m^n . Доказать, что

$$\boxed{C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{1}{n!} A_m^n}$$

(В иностранной литературе пишут $\binom{m}{n}$ вместо C_m^n .)

Следующие две задачи можно решать либо используя исходное определение для C_m^n , либо доказанную формулу.

I5.* Доказать, что $C_m^n = C_m^{m-n}$.

I6.* Доказать, что $C_{m+1}^{n+1} = C_m^n + C_m^{n+1}$.

I7.* Доказать, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

I8. Сколько существует последовательностей из p нулей и q единиц?

I9. Сколько решений в натуральных числах (включая 0) имеет система неравенств и уравнений

$$0 \leq x_1 \leq 1, \ldots, \quad 0 \leq x_{10} \leq 1, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 4$$

Подсчеты.

I. Сколько существует 4-значных чисел, не все цифры которых различны?

2. Среди 7 человек есть Петров и Сидоров. Сколькими способами можно построить этих 7 человек в колонну, если нужно, чтобы Петров был впереди Сидорова?

3. (Продолжение.) ...Петров и Сидоров были рядом (в любом порядке)?

4. Сколько существует шестизначных чисел, не содержащих цифр 0 и 8 ?

5.* Сколько существует шестизначных чисел, содержащих 0 и не содержащих 8 ?

6. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$?

7.* Найти сумму всех пятизначных чисел, составленных из различных нечетных цифр (таковы, например, 13579 и 91537).

8. Сколько делителей имеет число $2^{10}\cdot 3^{15}\cdot 5^{20}$?

9.* Сколько существует различных 6-гранных игральных костей? (Две кости считаются различными, если их нельзя перепутать, как ни переворачивай их.)

10.* В каждую клетку таблицы 10 на 10 требуется вписать 1 или – 1 так, чтобы произведения всех чисел в каждом столбце и в каждой строке равнялись 1. Сколькими способами можно заполнить таблицу?

11.* Сколько существует 5-значных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, в которых цифра 3 идет сразу после цифры 2?

12.* (Продолжение) ...в которых цифра 3 идет после цифры 5, но до цифры 1?

13.* (Продолжение.) ...в которых цифра 5 не стоит на 5 месте?

14.** (Продолжение.) ...в которых ни одна цифра не стоит на своём месте (т.е. не равна своему порядковому номеру)?

15.* Сколько существует подмножеств множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, содержащих (1) ровно 2 четных числа; (2) не менее двух четных чисел?

16.* Сколькими способами можно рассадить n человек за круглым столом (способы рассадки, отличающиеся поворотом, считаем одинаковыми)?

17.* Сколько существует 10-значных чисел, в которые цифры 1,2,3,...,7,8 входят по разу, а цифра 9 – дважды?

18.* Имеется 9 различных ящиков, 5 одинаковых белых шаров и 5 одинаковых черных шаров. Сколькими способами можно разместить шары в ящиках так, чтобы не было пустых ящиков?

19.* Доказать, что число последовательностей из n нулей и единиц, не содержащих двух нулей подряд, равно $n+1$ -му числу Фибоначчи a_{n+1} . (Последовательность Фибоначчи определяется так: $a_0=1$, $a_1=1$, каждый следующий член равен сумме двух предыдущих.)

20.* Пусть $|A|=m$, $|B|=n$, $S_{m,n}$ – число функций $f: A\to B$, являющихся наложениями. Доказать, что $S_{m,n}$ делится на $n!$.

Комбинаторика, ч. 3 (Треугольник Паскаля. Бином Ньютона.)

Треугольник Паскаля.

Напомним: C_m^n есть число n-элементных подмножеств m-элементного множества.

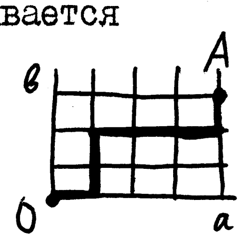
$$
\begin{array}{ccccc}
 & & C_0^0 & & \\
 & C_1^0 & & C_1^1 & \\
C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

1. Доказать, что $C_m^n = C_m^{m-n}$.

2. Доказать, что $C_{m+1}^{n+1} = C_m^n + C_m^{n+1}$.

3. Доказать, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

4. Вычислите числовые значения и заполните треугольник вплоть до 6-ой строки. (При правильном подходе вычисления должны занять не более одной минуты.) Эта таблица называется треугольником Паскаля.



5. Город состоит из прямоугольных кварталов, разделенных улицами. Сколько существует кратчайших путей из точки 0 в (a, b)-ый перекресток A ?

6. Используя результат предыдущей задачи, дайте новое доказательство формулы $C_{m+1}^{n+1} = C_m^n + C_m^{n+1}$.

7. Доказать, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots \pm C_n^n = 0$.

8. Пусть $T(m,n)$ определено при $m, n \in \mathbb{N}$, $0 \le n \le m$ причем выполнены свойства $T(m,0) = T(m,m) = 1$ и $T(m+1,n+1) = T(m,n+1) + T(m,n)$. Доказать, что $T(m,n) = C_m^n$

9. Пользуясь предыдущей задачей, дать новое доказательство формулы $C_m^n = m!/(n!\,(m-n)!)$

10.* Сколькими способами можно представить число 100 в виде суммы 3 натуральных слагаемых (порядок существен: 50 + 25 + + 25 и 25 + 50 + 25 - разные представления)? (Указание. Представьте себе 100 белых камушков, положенных в ряд. Сколькими способами можно положить среди них 2 черных камушка? Представьте себе 102 белых камушка, из которых 2 покрашены черной краской.)

11.* Доказать, что число решений в натуральных числах уравнения $x_1 + \ldots + x_k = l$ равно C_{k+l-1}^{k-1} (напоминаем: 0 мы считаем натуральным числом!).

12.* Необходимо купить 15 пирожных 5 сортов. Сколькими способами это можно сделать?

13.* Найти число решений в натуральных числах неравенства $x_1 + \ldots + x_k \le l$.

14.* Для проведения субботника 40 учеников класса нужно разбить на 3 группы: 15 чел. в кабинет № 15, 17 - в № 34 и 8 для натирания пола в учительской. Сколькими способами это можно сделать?

I5.* (Продолжение.) Тот же вопрос, если в каждой группе нужно назначить ответственного.

I6.* Найти коэффициент при $x^{15}y^{17}z^8$ в $(x+y+z)^{40}$.

I7.* 700 родичей Пиро (см. А.Франс, Остров пингвинов, кн. 6, гл. 3) на 4I-ый день решили избрать из своего числа комиссию по борьбе за оправдание Пиро. При этом (для однозначности голосования) в комиссии должно быть нечетное число членов. Сколькими способами это можно сделать?

I8.* Сколько разных слов можно получить, переставляя буквы в слове "математика"?

I9.** Троллейбусный билет иногда называют "счастливым", если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех. Сколько счастливых билетов в одной серии (от 000000 до 999999) ?

Бином Ньютона

I. Докажите формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$$

Запишите её частные случаи, соответствующие $n = 2, 3, 4$.

2. Дайте новое доказательство равенства

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

3. Дайте новое доказательство равенства

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots \pm C_n^n = 0.$$

4. Найти сумму $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n$

5. Написать формулу для $(a-b)^n$, аналогичную формуле бинома Ньютона.

6. При каких n и k выполнено неравенство $C_n^k < C_n^{k+1}$?

7.* Доказать, что если p простое и $k \neq 1, k \neq p$ то C_p^k делится на p.

8.* Доказать, что $(a+b)^p$ дает при делении на p тот же остаток, что и $a^p + b^p$.

9.* Доказать, что $C_{n+m}^k = C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k \cdot C_m^0$.

I0.* Доказать, что $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

II.* Доказать, что $C_n^m + C_{n-1}^{m-1} + \ldots + C_{n-k}^{m-k} + \ldots + C_{n-m}^0 = C_{n+1}^m$

I2.* Доказать, что $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots = a_n$

где a_n - n-ое число Фибоначчи (см. ч. 2, "Подсчеты", № I9).

I3.* (Аналог формулы бинома для многих слагаемых) Доказать, что в разложение $(a_1 + \ldots + a_k)^n$ член $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k}$ с $m_1 + \ldots + m_k = n$ входит с коэффициентом $n!/(m_1!\, m_2! \ldots m_k!)$.

I4.* Доказать, что произведение любых n подряд идущих натуральных чисел делится на $n!$.

Комбинаторика, ч. 4 (Разные задачи.)

I.* Рассмотрим все расстановки произвольного количества слонов на шахматной доске, при которых они не бьют друг друга. Доказать, что число таких расстановок есть точный квадрат.

2.* В марсианском языке 2 буквы и любые 2 слова одинаковой длины отличаются по крайней мере в 3 местах. Доказать, что количество слов длины n в марсианском языке не превосходит $2^n/(n+1)$.

3.* Каково наибольшее число частей, на которое могут разбить плоскость n прямых?

4.** В $2n$ -элементном множестве выбрано несколько подмножеств, причем так, что ни одно из выбранных подмножеств не вложено в другое. Доказать, что общее число выбранных множеств не превосходит C_{2n}^n

5.* Найти сумму $0\cdot C_n^0 + 1C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$.

6.* Найти сумму $C_n^0 + (1/2)C_n^1 + (1/3)C_n^2 + \ldots + (1/n+1)C_n^n$.

7.* Найти суммы $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$, $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots$,

8.* В этой задаче мы рассматриваем представления натуральных чисел в виде суммы натуральных слагаемых, не обращая внимания на порядок слагаемых. (Напомним, что мы считаем 0 натуральным числом.) Доказать, что количество представлений числа $n \geq 1$ в виде суммы $m \geq 1$ слагаемых равно количеству представлений числа n в виде суммы слагаемых, каждое из которых принимает значения от I до m.

9.** Доказать, что число способов **уплаты** n копеек монетами в I, 2 и 3 коп. равно ближайшему целому числу к $(n+3)^2/12$

IO.** Сколькими способами можно разложить I000000 на 3 множителя, если считать разложения, отличающиеся порядком слагаемых, (I) одинаковыми; (2) разными ?

II.** (Расположение четных и нечетных чисел в треугольнике Паскаля.) Доказать, что: (I) n -ая строка целиком состоит из нечетных чисел тогда и только тогда, когда $n+1$ есть степень 2: (2) все внутренние числа n-ой строки четны тогда и только тогда, когда n есть степень 2; (3) количество нечетных чисел в любой строке есть степень 2. (n -ой строкой называется строка $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$.)

I2.* Функция Эйлера φ определяется так: для любого натурального n значение $\varphi(n)$ равно количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . Найти $\varphi(p)$, $\varphi(p^2)$, $\varphi(pq)$, если p и q - простые числа.

13.** (Продолжение.) Доказать, что если $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$, где $p_1, \dots, p_m$ – различные простые числа, то

$$\varphi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2)\dots(1 - 1/p_m).$$

14.* На окружности выбрано 20 точек. Сколькими различными способами можно попарно соединить эти точки 10 хордами, не пересекающимися внутри окружности?

15.** (Продолжение.) Тот же вопрос, если дано $2n$ точек и n хорд.

16.** Сколько существует последовательностей из n нулей и n единиц, у которых любой начальный отрезок содержит не меньше единиц, чем нулей?

17.** Круг разделен на p равных секторов (p – простое). Имеется n красок. Сколькими способами можно раскрасить круг, если каждый сектор можно выкрасить в любой цвет и раскраски, отличающиеся поворотом круга, считаются одинаковыми?

18.** (Продолжение.) Доказать, что $n^p - n$ делится на p.

19.** Дайте другое доказательство утверждения предыдущей задачи, используя задачу 8 из Бинома Ньютона (Комбинаторика, ч. 3).

20.** Доказать, что число наложений m-элементного множества на n-элементное (при $m \geq n$) равно $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)^m C_n^k$

21.** Доказать, что число последовательностей из чисел 1, 2, ..., n, в котором ни одно число не стоит на своем месте (т.е. i-ый член не равен i ни при каком i), равно

$$n!\,(1/2! - 1/3! + 1/4! - \dots \pm 1/n!)$$

(Как мы увидим, это близко к $n!/e$, где $e \approx 2.71828\dots$)