А н а л и з   I 7   в е к а,

или

Математические методы школьной механики

I. Производная, мгновенная скорость, касательная

2. Учимся дифференцировать

3. Зачем нужно дифференцировать?

4. Интегрирование

5. Интеграл в физике

> ...Исчисление бесконечно малых... было почти полностью создано в течение одного столетия, и вот уже около трёх веков постоянного применения не смогли притупить этот ни с чем не сравнимый инструмент.
>
> Н.Бурбаки

Введение

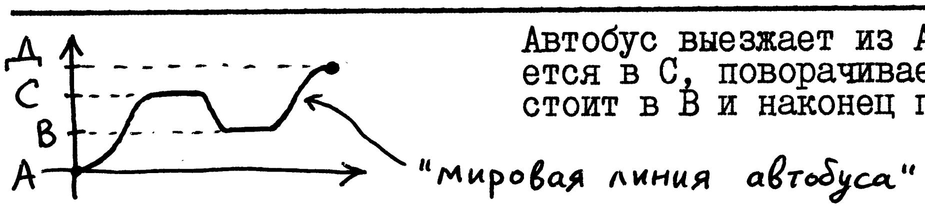
История развития математического анализа ("исчисления бесконечно малых") весьма своеобразна. Его основатели И.Ньютон (1643 - 1727) и Г.Лейбниц (1646 - 1716) жили в 17 - 18 веках, и к 19 веку здание математического анализа было уже весьма обширно. Однако лишь в 19 веке оно было снабжено прочным фундаментом. (Построение этого фундамента прежде всего связано с именем французского математика О.Коши (1789 - 1857).)

Обычно при изучении анализа начинают как раз с этого фундамента (теории действительных чисел, пределов и т.п.). Без него, конечно, не обойтись. Однако мы, следуя истории, начнем с изложения анализа в духе 17 века, отложив заботу о строгости на более позднее время. Если угодно, все нижеследующее можно воспринимать как часть курса физики.

I. Производная, мгновенная скорость, касательная.

А. Мировые линии.

Пусть точка движется по прямой, $x(t)$ - её координата в момент времени t. Это движение удобно изображать, рисуя график функции $t \mapsto x(t)$.



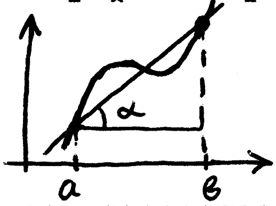
Автобус выезжает из А, останавливается в С, поворачивает обратно, стоит в В и наконец приезжает в Д.

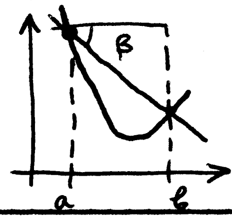
Часто такое изображение удобно.

Б. Средняя скорость.

Пусть точка движется по прямой, $x(t)$ - её координата в момент t. Средней скоростью на отрезке $[a,b]$ называется отношение $(x(b) - x(a)) / (b - a)$

На графике: средняя скорость есть тангенс угла наклона секущей





<u>Равномерное движение со скоростью</u> v – такое движение, что на любом отрезке средняя скорость равна v. Записав $(x(t)-x(0))/(t-0)=v$, получим: $\boxed{x(t)=x(0)+vt}$ Нетрудно проверить, что при движении по этой формуле средняя скорость действительно равна v.

В. Мгновенная скорость.

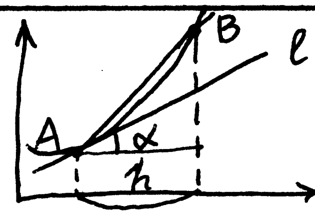
Пусть t – некоторый момент времени. Рассмотрим среднюю скорость на отрезке $[t, t+h]$. Она зависит от h. Будем уменьшать отрезок, приближая h к 0. Если при этом средняя скорость приближается к какому-то числу v, то это v называется <u>мгновенной скоростью в момент</u> t.

$$\boxed{\text{мгновенная скорость в момент } t = \text{предел } \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \text{ при } h\to 0}$$

Пример. Движение происходит по формуле $x(t)=t^2$. Найти мгновенную скорость в момент 1.

Решение. $(x(1+h)-x(1))/h=((1+h)^2-1)/h=2+h$; при малых h это близко к 2. Ответ: 2.

На рисунке: при $h\to 0$ секущая AB приближается к "касательной" ℓ, а её угол наклона – к углу наклона α касательной. Поэтому:



мгновенная скорость = тангенс угла наклона касательной

Г. Производная.

Всё сказанное о функции x можно, разумеется, отнести к произвольной функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Приходим к такому определению:

Пусть f – функция с действительными аргументами и значениями.

> Производной функции f в точке a называется предел $[f(a+h)-f(a)]/h$ при $h\to 0$. Он обозначается $f'(a)$.

Таким образом, можно сказать, что мгновенная скорость есть производная координаты.

Функция $a \mapsto f'(a)$ называется <u>производной функцией</u>.

Д. Формула $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.

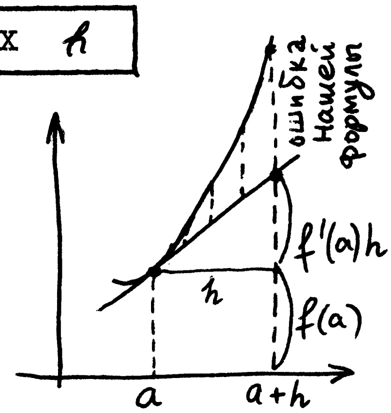
Согласно определению, имеет место приближенное равенство $f'(a) \approx [f(a+h) - f(a)] / h$ (тем более точное, чем меньше h). Другими словами

$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ при малых h

Можно, однако, записать и более простую приближенную формулу: $f(a+h) \approx f(a)$ при малых h . Чем наша формула лучше? Она более точна! В самом деле,

$[f(a+h) - f(a)] / h = f'(a) + (\text{малое});$

$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + (\text{малое}) \cdot h$



Таким образом, погрешность нашей формулы не просто мала при малых h (как для формулы $f(a+h) \approx f(a)$), но мала п о с р а в н е н и ю с h , составляет малую долю h . Это записывается так: $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ где $o(h)$ означает "малое по сравнению с h ". (Сравните с $f(a+h) = f(a) + o(1)$ – здесь ошибка мала по сравнению с 1.)

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt[2]{1.001}$.

Решение. При $f(x) = x^2$ имеем $(1+h)^2 = f(1+h) \approx$ $\approx f(1) + f'(1)h = 1 + 2h$. Поэтому если $(1+h)^2 = 1.001$, то $1 + 2h \approx 1.001$, откуда $h \approx 0.0005$. Ответ. $\sqrt{1.001} \approx 1.0005$

Наша формула может быть принята за определение:

число C – производная функции f в точке a , если $f(a+h) = f(a) + Ch + o(h)$

В самом деле, если это так, то $[f(a+h) - f(a)] = C + o(h)/h$, а $o(h)/h \approx 0$ по определению символа $o(h)$.

2. Учимся дифференцировать

Дифференцирование - нахождение производной. Мы продемонстрируем некоторые приемы дифференцирования на примерах.

А. Пусть f - константа: $f(x)=C$ для всех x. Тогда $[f(a+h)-f(a)]/h=0$ и $f'(a)=0$ для всех a.

Б. Пусть $f(x)=x$. Тогда $[f(a+h)-f(a)]/h=1$ и $f'(a)=1$ для любого a.

В. Пусть $f(x)=x^2$ (Мы уже дифференцировали эту функцию в точке 1.) Имеем: $[f(a+h)-f(a)]/h=[(a+h)^2-a^2]/h=$ $=2a+h\to 2a$ (при $h\to 0$). Поэтому $f'(a)=2a$.

Другой способ: $f(a+h)=(a+h)^2=\underbrace{a^2}_{f(a)}+\underbrace{(2a)}_{f'(a)}\cdot h+\underbrace{h^2}_{o(h)}$

Г. Пусть $f(x)=x^3$.

(I способ) $f(a+h)=(a+h)(a+h)(a+h)=\underbrace{a^3}_{f(a)}+\underbrace{3a^2}_{f'(a)}h+\underbrace{(\text{нечто})h^2}_{o(h)}$

Ответ: $f'(a)=3a^2$

(2 способ) Мы пользуемся тождеством $(y-x)(y^2+xy+x^2)=y^3-x^3$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^3-a^3}{(a+h)-a}=a^2+a(a+h)+(a+h)^2\to 3a^2.$$

(3 способ) Знак приближенного равенства означает, что мы пренебрегаем членами, имеющими величину $o(h)$ (малыми по сравнению с h). $f(a+h)=(a+h)^2(a+h)\approx(a^2+2ah)(a+h)\approx$ $a^3+2a^2h+a^2h+2ah^2\approx a^3+3a^2h$. Поэтому $f'(a)=3a^2$.

Д. Функция $f(x)=x^n$.

(I способ) $f(a+h)=(a+h)\dots(a+h)=\underbrace{a^n}_{f(a)}+\underbrace{na^{n-1}}_{f'(a)}h+\underbrace{(\text{нечто})h^2}_{o(h)}$.

Ответ: $f'(a)=na^{n-1}$.

(2 способ) Применим тождество $(y^n-x^n)/(y-x)=x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+y^{n-1}$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^n-a^n}{(a+h)-a}=(a+h)^{n-1}+(a+h)^{n-2}a+\dots+a^{n-1}\to na^{n-1}.$$

(3 способ) Докажем, что если $f(x)=x^n$, то $f'(a)=na^{n-1}$ индукцией по n (т.е. сначала для $n=1$, потом для $n=2$ и т.д.) Пусть для $n=k-1$ это уже доказано. Пусть $f(x)=x^k$ Тогда $f(a+h)=(a+h)^k=(a+h)^{k-1}(a+h)\approx[a^{k-1}+(k-1)a^{k-2}h](a+h)\approx$ $a^k+(k-1+1)a^{k-1}h$, что и требовалось.

Покажем, как дифференцировать функции, полученные из других с помощью сложения и умножения на число.

Е. Умножение на число. Пусть $f(x)=Cg(x)$ при всех x. (C - некоторое число). Тогда $f(a+h)=Cg(a+h)\approx$ $\approx C(g(a)+g'(a)h)=\underbrace{Cg(a)}_{f(a)}+\underbrace{Cg'(a)}_{f'(a)}h$. Отсюда $f'(a)=Cg'(a)$.

Другой способ: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = C\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \to C\cdot g'(a)$.

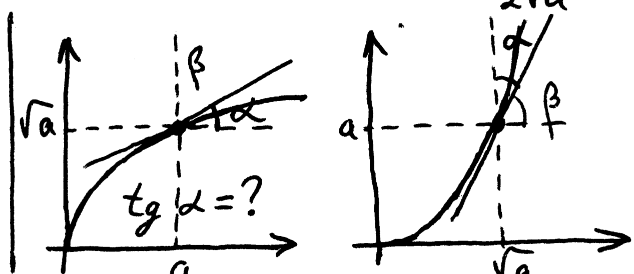
Ж. Сумма. Пусть $f(x)=g(x)+k(x)$. Тогда $f(a+h) =$
$= g(a+h)+k(a+h) \approx \underbrace{g(a)+k(a)}_{f(a)} + \underbrace{(g'(a)+k'(a))}_{f'(a)}h$
Отсюда $f'(a)=g'(a)+k'(a)$.

Теперь мы знаем достаточно, чтобы продифференцировать любой многочлен: согласно Ж, достаточно продифференцировать отдельно каждое слагаемое с помощью Д и Е.

З. Пример. Пусть $f(x)=x^3+2x^2+2x+1$ Найдем .
Дифференцируя функции $x\mapsto x^3$, $x\mapsto x^2$, $x\mapsto x$, $x\mapsto 1$ и складывая их производные с соответствующими коэффициентами, находим: $f'(a)=3a^2+2\cdot 2a+2\cdot 1+0=3a^2+4a+2$.

И. Пусть $f(x)=1/x$. Найдем $f'(a)$.
(I способ, "физический"). Если $f(x)=x^n$, то $f'(x)=nx^{n-1}$; подставляя (незаконно!) $n=-1$, имеем $f'(a)=(-1)\cdot a^{-2}=-1/a^2$.
(2 способ) $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a(a+h)}\to-\frac{1}{a^2}$

К. Какие еще функции мы знаем? По существу только одну: извлечение корня. Пусть $f(x)=\sqrt{x}$. Найдем $f'(a)$.
(I способ) $[f(a+h)-f(a)]/h=[\sqrt{a+h}-\sqrt{a}]/h=$
$\frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h\cdot(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}=\frac{(a+h)-a}{h}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}\to\frac{1}{2\sqrt{a}}$.
(2 способ, "физический") Мы доказали, что если $f(x)=x^n$, то $f'(a)=na^{n-1}$. Подставим (незаконно!) n = I/2.
(3 способ) Пусть $\sqrt{a+h}\approx\sqrt{a}+Ch$; возводя в квадрат, имеем: $a+h\approx a+2C\sqrt{a}\,h$, откуда $2C\sqrt{a}=1$, $C=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.
(4 способ)



Посмотрим на рисунок с графиком корня с другой стороны бумаги и увидим график функции $t\mapsto t^2$, про которую мы всё знаем: $\operatorname{tg}\beta=2\sqrt{a}$ (производная $t\mapsto t^2$ в $\sqrt{a}$ равна $2\sqrt{a}$), $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Приведем теперь несколько более сложных правил для отыскания производной.

Л. Производная произведения. Пусть $f(x)=g(x)\cdot k(x)$.
Тогда $f'(a)=g'(a)k(a)+g(a)k'(a)$. В самом деле, $f(a+h)=$
$g(a+h)k(a+h)\approx[g(a)+g'(a)h]\cdot[k(a)+k'(a)h]\approx g(a)k(a)+[g'(a)k(a)+g(a)k'(a)]h$
(член с h^2, как всегда выбрасываем: он мал по сравнению с h).

С помощью этого правила можно заново найти производную функции $g(x)=1/x$. В самом деле, пусть $k(x)=x$; тогда $f(x)=g(x)\cdot k(x)=1$. Применяя правило, получаем, что

$$0=f'(a)=g'(a)k(a)+g(a)k'(a)=g'(a)\cdot a+\frac{1}{a}\cdot 1,$$

откуда $g'(a)=-1/a^2$.

М. Производная функции $1/g$. Пусть $f(x)=1/g(x)$.
(I способ) Если $f(x)=1/g(x)$, то $f(x)g(x)=1$. Согласно правилу дифференцирования произведения, $0=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$, откуда $f'(a)=-f(a)g'(a)/g(a)=-g'(a)/(g(a))^2$.
(2 способ) Пусть $f(x)=1/g(x)$. Тогда

$$f(a+h)=1/g(a+h)\approx 1/(g(a)+g'(a)h)$$

Производную для функции $t\mapsto 1/t$ мы знаем; используя это, можно написать: $\frac{1}{c+q}\approx\frac{1}{c}+(-\frac{1}{c^2})q$ при малых q; при $c=g(a)$ и $q=g'(a)h$ (что действительно мало!) имеем

$$f(a+h)\approx(1/g(a))+(-1/(g(a))^2)\cdot g'(a)h=$$
$$=f(a)+[-g'(a)/(g(a))^2]h.$$

Отсюда $f'(a)=-g'(a)/(g(a))^2$.

Н. Производная частного. Если $f(x)=g(x)/k(x)$, то

$$f'(a)=\frac{k(a)g'(a)-k'(a)g(a)}{(k(a))^2}.$$

Эта формула получается комбинацией двух предыдущих: представим $f(x)$ как $g(x)\cdot[1/k(x)]$

О. Производная композиции. Пусть $f=g\circ k$, то есть $f(x)=g(k(x))$ Тогда $f(a+h)=g(k(a+h))\approx g(k(a)+k'(a)h)$. Воспользуемся формулой $g(c+q)\approx g(c)+g'(c)\cdot q$ при $c=k(a)$, $q=k'(a)h$. Получим

$$f(a+h)=\ldots\approx g(k(a))+g'(k(a))\cdot k'(a)h.$$

Отсюда $f'(a)=g'(k(a))\cdot k'(a)$.

П. Пример. Пусть $f(x)=\sqrt{x^3+5}$. Тогда $f(x)=g(k(x))$, где $k(x)=x^3+5$, $g(t)=\sqrt{t}$. По формуле для производной композиции

$$f'(a)=g'(k(a))\cdot k'(a)=\frac{1}{2\sqrt{k(a)}}\cdot k'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a^3+5}}\cdot(3a^2).$$

Последовательно применяя наши правила, можно продифференцировать практически любую функцию, заданную формулой.

3. Зачем нужно дифференцировать?

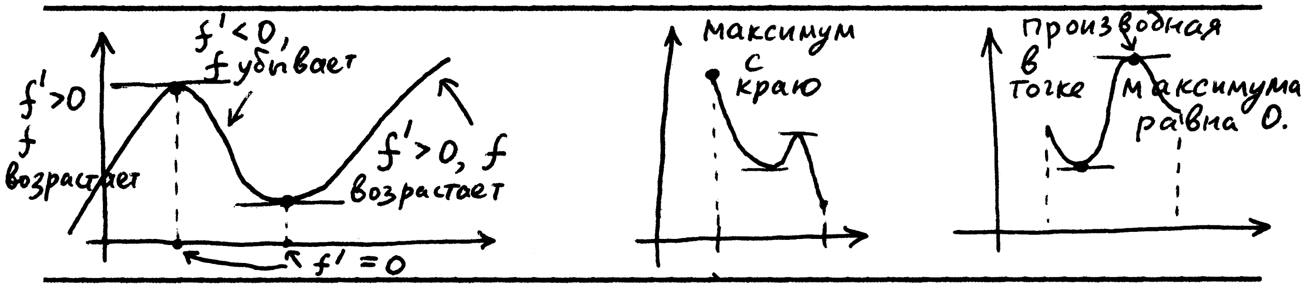
А. Основные правила.

Производную можно использовать для отыскания максимумов и минимумов, а также для диагностики возрастания и убывания функций. Это делается с помощью следующих правил:

Правило I. Функция f возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда её производная в каждой точке этого отрезка неотрицательна (соответственно неположительна). (Напомним: возрастание функции f означает, что из $x < y$ следует $f(x) \leq f(y)$.)

Правило 2. Если f' положительна (отрицательна) на отрезке $[a, b]$, то функция f строго возрастает (соответственно убывает) на нем (т.е. из $x < y$ следует $f(x) < f(y)$).

Правило 3. Пусть функция f на отрезке $[a, b]$ принимает наибольшее значение в точке $c \in [a, b]$: $f(c) \geq f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда либо $f'(c) = 0$, либо c – один из концов отрезка. (Аналогично для наименьшего значения.)

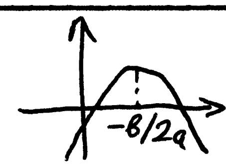


Поскольку мы сейчас изображаем из себя физиков, то правила I – 3 сформулированы не точно, и их истинный смысл можно понять лишь наблюдая за тем, как опытные люди их применяют. Поэтому приведем несколько примеров.

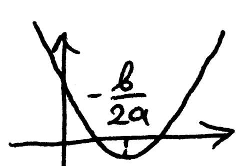
Б. Исследование квадратного трехчлена.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда $f'(x) = 2ax + b$. Видно, что $f'(x) = 0$ при $x = -\frac{b}{2a}$; если $a > 0$, то f' в этой точке меняет знак с – (слева) на + (справа), если $a < 0$, то наоборот. Согласно нашим правилам, получаем:

при $a < 0$: f строго возрастает на $]-\infty, -b/2a[$
строго убывает на $]-b/2a, +\infty[$
в $-b/2a$ – максимум



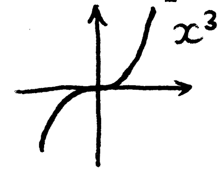
при $a > 0$: f строго убывает на $]-\infty, -b/2a[$
строго возрастает на $]-b/2a, +\infty[$
в $-b/2a$ – минимум



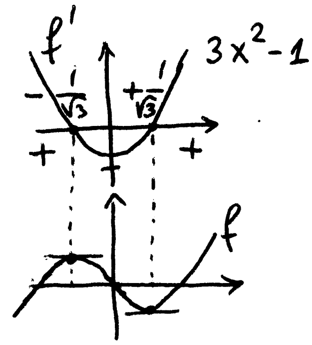
Это полностью согласуется с результатами, которые можно получить обычным способом (выделяя полный квадрат).

В. Многочлены третьей степени.

Проанализируем с помощью наших правил функцию $f(x)=x^3$. Её производная в точке x равна $3x^2$ т.е. всюду неотрицательна и равна 0 в точке 0. Следовательно, функция f возрастающая. Будет ли она строго возрастающей? Правило 2 применить нельзя, так как $f'(0)=0$. Но тем не менее это так. Чтобы убедиться в этом, применим правило 2 отдельно к промежуткам $]-\infty, 0]$ и $[0,+\infty[$; наша функция строго возрастает на обоих промежутках, а значит, и всюду.



Еще один пример исследования многочлена 3-ей степени: $f(x)=x^3-x$. Дифференцируем: $f'(x)=3x^2-1$. Таким образом, на $]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}]$ и $[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty[$ наша функция (f) возрастает, а на $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ – убывает.



Пусть нам теперь нужно найти наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке $[-1,2]$. Согласно правилу 3, их нужно искать среди концов отрезка и точек, где $f'=0$. Так как $f(-1)=0$, $f(-1/\sqrt{3})=2/3\sqrt{3}$, $f(1/\sqrt{3})=-2/3\sqrt{3}$ и $f(2)=7$, находим, что наибольшее значение равно 7 (в точке 2), а наименьшее равно $-2/3\sqrt{3}$ (в точке $1/\sqrt{3}$).

Г. Применения производной к отысканию максимумов, минимумов и доказательству неравенств.

Пример I. Какое наибольшее значение может принимать xy, если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y=C$?

Решение. Нужно найти максимум функции $f: x\mapsto x(C-x)$ на отрезке $[0,C]$. Дифференцируя, находим, что $f'(x)=C-2x$ и функция возрастает на $[0,C/2]$ и убывает на $[C/2,C]$ Максимум – в $C/2$, он равен $C^2/4$.

Впрочем, здесь мы имеем дело с квадратным трехчленом, так что дифференцирования можно было избежать. Эта задача по существу состоит в доказательстве неравенства $xy\leq\frac{1}{4}(x+y)^2$, извлекая корень, получаем $\sqrt{xy}\leq(x+y)/2$ (неравенство о среднем арифметическом и геометрическом).

Пример 2. Какое наименьшее значение может иметь $x+y$, если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $xy=1$?

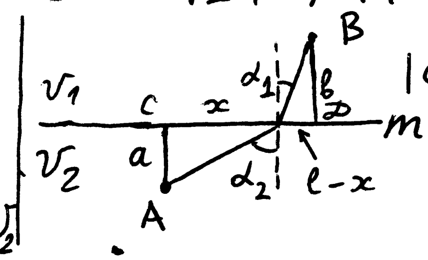
Решение. Здесь речь идет о минимуме функции $f: x\mapsto x+\frac{1}{x}$ при $x>0$. Дифференцируя ($f'(x)=1-1/x^2$), убеждаемся, что на $]0, 1]$ она убывает, а на $[1, +\infty[$ возрастает. Следовательно, минимум достигается в 1 и равен 2.

Мы доказали неравенство $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ (при $x > 0$); впрочем, оно следует из неравенства о среднем арифметическом и геометрическом.

Пример 3. Какое наименьшее значение принимает $x + y$, если $x^2 \cdot y = 1$, $x, y \geqslant 0$?

Решение. Дифференцируя функцию $f: x \mapsto x + \frac{1}{x^2}$, находим, что $f'(x) = 1 - 2/x^3$, минимум – в точке $\sqrt[3]{2}$ и равен $\sqrt[3]{2} + 1/\sqrt[3]{4}$. Эту задачу, впрочем, тоже можно свести к неравенству о среднем арифметическом и геометрическом с помощью искусственного приёма: условие $x^2 y = 1$ перепишем как $(x/2)(x/2)y = 1/4$; так как $\sqrt[3]{(x/2)(x/2)y} \leqslant (x/2 + x/2 + y)/3$, то $x/2 + x/2 + y \geqslant 3/\sqrt[3]{4}$ (что равно $\sqrt[3]{2} + 1/\sqrt[3]{4}$, как легко проверить).

Пример 4 (закон Снеллиуса) Найти самый быстрый путь из A в B, если скорость сверху от прямой m равна v_1, а снизу – v_2



Решение. Введя обозначения, указанные на рисунке, запишем время: $t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_2 + \sqrt{b^2 + (l - x)^2}/v_1$

Чтобы найти оптимальный путь, приравняем производную функции t нулю (правило 3):

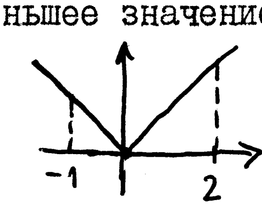
$$0 = t'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{1}{v_2} + \frac{-2(l - x)}{2\sqrt{b^2 + (l - x)^2}} \cdot \frac{1}{v_1}$$

Так как $x/\sqrt{a^2 + x^2} = \sin \alpha_2$, а $(l - x)/\sqrt{b^2 + (l - x)^2} = \sin \alpha_1$, получаем равенство, называемое "законом Снеллиуса", определяющее быстрейший путь: $\boxed{\sin \alpha_1 / v_1 = \sin \alpha_2 / v_2}$

(Снеллиус открыл его при изучении преломления света, который движется по быстрейшему пути.)

Д. Опасности.

Найдем минимум функции $f: x \mapsto |x|$ на отрезке $[-1, 2]$. Для этого продифференцируем её: при $x \geqslant 0$ имеем $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, при $x \leqslant 0$ имеем $f(x) = -x$, $f'(x) = -1$. Поэтому производная в нуль не обращается и для отыскания минимума нужно сравнить значения на концах отрезка: $f(-1) = 1$, $f(2) = 2$. Ответ: наименьшее значение равно 1 и достигается в точке -1.



Этот ответ, конечно, нелеп: на самом деле минимум в точке 0 и равен 0. В чем же дело?

Дело в том, что наша функция в точке 0 не имеет производной! Выражение $[f(0+h)-f(0)]/h$ равно + I при $h>0$ и - I при $h<0$ и предела при $h\to 0$ нет!

Мораль: при отыскании максимумов и минимумов нужно исследовать не только концы и точки, где производная равна 0, но и точки, в которых производной нет!

4. Интегрирование

Мы научились, зная зависимость координаты от времени, определять скорость. Теперь поставим обратную задачу. Пусть мы знаем скорость в любой момент времени; как определить координату?

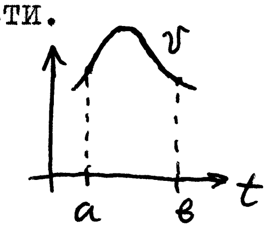
Эта постановка задачи нуждается в небольшом уточнении. Зная только скорость, мы не можем определить координату: движение могло начаться в любой точке. Можно определить лишь изменение координаты за какой-то промежуток времени. Это мы и постараемся сделать.

А. Равномерное и равноускоренное движения.
Пусть скорость постоянна и равна v. Нетрудно догадаться, что в этом случае изменение координаты за время t равно vt: $x(t)=x(0)+vt$. Дифференцируя функцию, заданную этой формулой, мы убеждаемся в том, что скорость действительно равна v. Так как $x(0)$ может быть произвольным, можно записать ответ в виде $x(t)=vt+C$, где C - произвольная константа.

Пусть теперь скорость не постоянна, а меняется пропорционально времени: $v(t)=at$. Как найти $x(t)$? Чему равно $x(t)$, если $x'(t)=at$? Вспомним, что при $x(t)=t^2$ мы имели $x'(t)=2t$. Чтобы получить at вместо $2t$, надо умножить t^2 на $a/2$. Получаем $x(t)=\frac{at^2}{2}$ или (вспоминая, что движение может начаться в любом месте) $x(t)=at^2/2+C$.

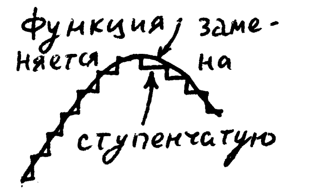
В этом примере нам повезло - мы вспомнили функцию, имеющую подходящую производную. А что делать, если это не удалось? Или если зависимость v от t задана не формулой, а, например, графиком?

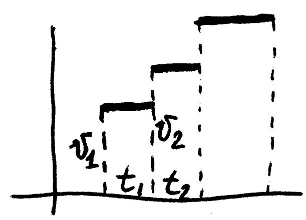
Б. Перемещение - площадь под графиком скорости.



Пусть нам задан график зависимости скорости от времени. Нас интересует, какой путь прошло тело (точнее, насколько изменилась его координата) с момента $t=a$ до $t=b$.

Чтобы определить это, будем считать, что скорость меняется не непрерывно, а скачками – но очень малыми: сначала в течение t_1 она равнялась v_1, затем в течение t_2 она равнялась v_2, ..., в течение t_n она равнялась v_n. Тем самым задача сводится к случаю равномерного движения: надо найти путь за каждый из отрезков времени и сложить их. Получится $v_1 t_1 + \ldots + v_n t_n$.

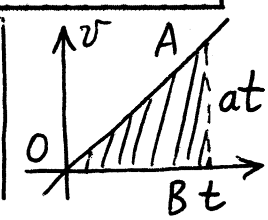




Памятуя, что площадь прямоугольника со сторонами v_i и t_i равна $v_i \cdot t_i$, получаем, что пройденное расстояние равно площади под графиком скорости. Поскольку ступеньки можно выбрать сколь угодно малыми, это справедливо не только для ступенчатого изменения скорости, но и в общем случае.

Пройденный путь от $t=a$ до $t=b$ равен площади фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком скорости и вертикальными прямыми $t=a$ и $t=b$

Для случая равноускоренного движения $v(t)=at$ и путь, пройденный к моменту t, равен площади треугольника OAB, т.е. $\frac{t \cdot at}{2} = at^2/2$. Получаем тот же ответ, что и раньше.

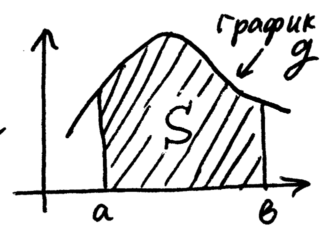


В. Интеграл.

Все, что мы говорили о координате и скорости, можно сказать о любой функции и её производной.

Будем называть площадь фигуры, изображенной на рисунке, <u>интегралом функции</u> g <u>по отрезку</u> $[a, b]$ и обозначать её $\int_a^b g$

$$S = \int_a^b g$$

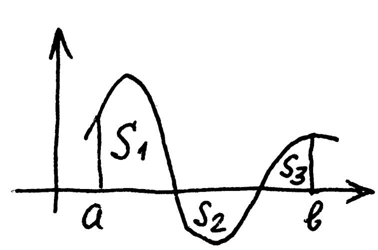


Тогда утверждение предыдущего пункта можно записать так:

$$\boxed{f(b) - f(a) = \int_a^b f'}$$

Эта (важнейшая) формула называется формулой Ньютона – Лейбница.

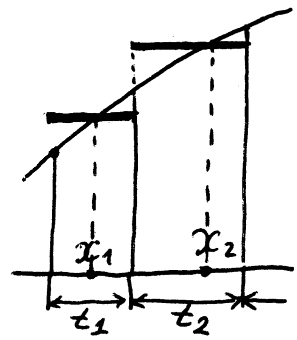
Мы неявно предполагали, что функция g положительна. Если g принимает значения разных знаков, то интеграл нужно определить как сумму площадей с соответствующими знаками: $\int_a^b = S_1 + S_3 - S_2$ (см. рис.)



При таком определении интеграла формула Ньютона – Лейбница останется верной.

Г. Как найти интеграл?

Мы свели отыскание пути к нахождению площади под графиком скорости. Но как найти эту площадь? Можно вырезать нужную нам фигуру из (как можно более однородного) листа бумаги и взвесить её. Можно также воспользоваться уже известным нам приёмом. Желая найти $\int_a^b f$, разобьём отрезок от a до b на много маленьких отрезков длиной $t_1, \ldots, t_n$, в каждом из них выберем по точке x_i и будем считать, что на i-ом отрезке функция f постоянна и равна $f(x_i)$. Мы приходим к равенству



$$\boxed{\int_a^b f \approx \sum f(x_i)\cdot t_i}$$

которое можно сделать сколь угодно точным, уменьшая отрезки разбиения. Его правая часть называется <u>интегральной суммой</u> для стоящего слева интеграла.

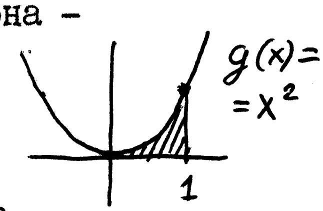
Пример. Снова вернемся к равноускоренному движению. Пусть $g(t) = at$. Надо вычислить $\int_0^t g$. Разбивая $[0,t]$ на n равных частей $[0, t/n], [t/n, 2t/n], \ldots$ и беря в качестве x_i левый конец соответствующего отрезка, получаем, что

$$\sum f(x_i)\cdot t_i = \left(a\frac{0}{n}t + a\cdot\frac{1}{n}t + \ldots\right)\cdot t/n =$$
$$= (at^2/n^2)(0+1+\ldots+(n-1)) = (at^2/n^2)(n(n-1)/2) = \frac{at^2}{2}(1 - 1/n).$$

При больших n эта сумма примерно равна числу $at^2/2$, которое и есть точное значение интеграла.

Д. Отыскание площадей с помощью формулы Ньютона – Лейбница.

Мы можем с пользой применить формулу Ньютона – Лейбница и "в обратную сторону".



Пример. Найти заштрихованную на рисунке площадь под параболой, т.е. $\int_0^1 g$, где $g(x) = x^2$.

Решение. Так как $g = f'$ при $f: x \mapsto \frac{x^3}{3}$, то по формуле Ньютона – Лейбница $\int_0^1 g = \int_0^1 f' = f(1) - f(0) = 1/3$.

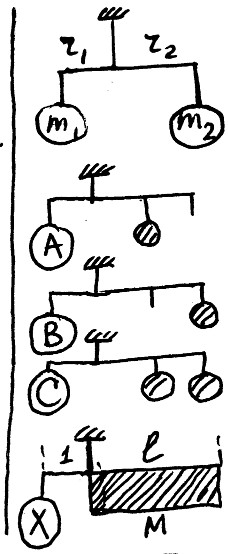
Таким образом, для нахождения площади под графиком функции g достаточно отыскать ее "первообразную", т.е. такую функцию f, что $f' = g$, и затем применить формулу Ньютона – Лейбница.

Это, в частности, легко сделать для любого многочлена: если $g(t) = a_n t^n + \ldots + a_0$, то $f(t) = a_n\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1} + \ldots + a_0 t$. Так находится площадь под графиком многочлена.

5. Интеграл в физике.

Мы приведем 3 примера применения интеграла в физике.

А. Рычаг.

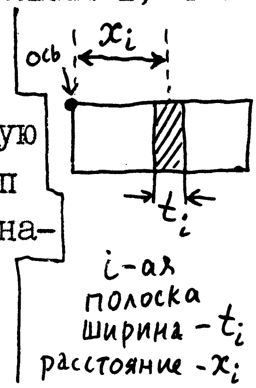


Напомним два физических принципа, относящихся к рычагу.

I (Равенство моментов) Для равновесия рычага на рисунке необходимо, чтобы $m_1 r_1 = m_2 r_2$.

2 (Аддитивность) Чтобы уравновесить два груза одновременно, нужно взять гирю, равную сумме гирь, необходимых, чтобы уравновесить каждый из них: $C = A + B$.

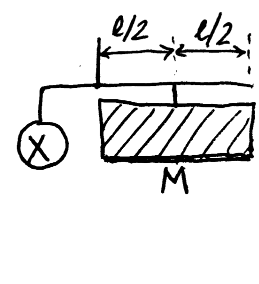
Пусть теперь к рычагу привешен однородный прямоугольник массы M со стороной ℓ (вторая сторона, как мы увидим, не играет роли). Какой груз надо подвесить к другому плечу рычага на расстоянии I, чтобы его уравновесить?



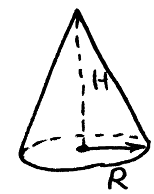
Для решения этой задачи разобьём прямоугольник на полоски шириной $t_1, \dots, t_n$, уравновесим каждую из них (принцип I) и сложим полученные веса (принцип 2). Расстояние от оси рычага до i-ой полоски обозначим x_i. (Разумеется, оно определено лишь с точностью до t_i, т.к. можно по-разному выбирать точку прикрепления i-ой полоски. Но мы считаем t_i очень малым, так что это все равно.) Масса i-ой полоски равна $(t_i/\ell)M$, расстояние от оси x_i. Чтобы её уравновесить, необходим (на расстоянии I) груз $x_i t_i M/\ell$, а общий груз должен быть равен $(M/\ell)\sum x_i t_i$

Сумма $\sum x_i t_i$ представляет собой интегральную сумму для интеграла от функции $f(x) = x$ по отрезку $[0, \ell]$. Поэтому при мелком разбиении она равна $\int_0^\ell f = \ell^2/2$

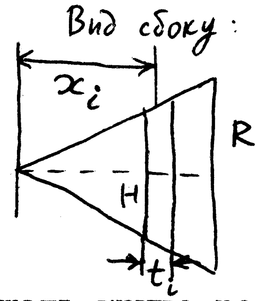
Получаем ответ: нужен груз в $(M/\ell)\cdot \ell^2/2 = M\ell/2$. Как часто бывает в физике, получив простой ответ, можно отыскать и его простое объяснение. В самом деле, представим себе, что наш прямоугольник не прикреплен к рычагу, а подвешен на ниточке за середину. Тогда груз массы M прикреплен на расстоянии $\ell/2$ и для его уравновешивания нужна гиря массы $M\ell/2$ (подвешенная на расстоянии I).



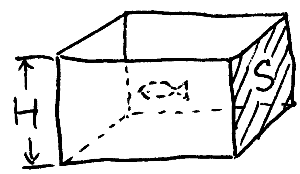
Б. Объем конуса.



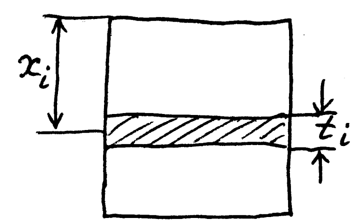
Конус имеет высоту H и радиус основания R
Нужно найти его объем.
Разобьём конус на части плоскостями, параллельными основанию. Найдем объем каждой части и сложим их. Пусть t_i - толщина i-ой части, а x_i - её расстояние от вершины конуса. (Оно, **конечно**, определено не однозначно, а **с точностью** до но мы считаем части тонкими!) Каждая часть представляет собой почти цилиндр высотой t_i и с основанием радиуса $\frac{x_i}{H}R$. Объем цилиндра равен произведению площади основания и высоты. Площадь круга радиуса r равна πr^2 , поэтому объем i-ой части равен $\pi(x_i/H \cdot R)^2 t_i$, а общий объем $(\pi R^2/H^2)(\sum x_i^2 t_i)$
Сумма $\sum x_i^2 t_i$ есть интегральная сумма для интеграла функции $f: x \mapsto x^2$ по отрезку $[0, H]$, поэтому она равна (при "бесконечно малой" толщине слоёв) числу $\int_0^H f = H^3/3$
Получаем, что объем равен $\pi R^2 \cdot (H/3)$ (т.е. I/3 произведения площади его основания на высоту).



В. Сила давления.



Прямоугольный (параллелепипедальный?) бассейн высоты H заполнен водой. Найти силу давления на его боковую стенку площади S . Напомним, что на глубине h давление воды равно $\rho g h$. (Здесь ρ плотность воды, g - ускорение свободного падения.) Для нахождения силы разобьём боковую стенку на полоски шириной $t_1, \ldots, t_n$; пусть x_i - расстояние от верха до -ой полоски (определенное, как всегда, с точностью до t_i).
Сила давления на i -ую полоску равна произведению ($\rho g x_i$) на её площадь, которая равна $(t_i/H)S$
Поэтому общая сила давления равна



$$\sum \rho g x_i (t_i/H) S = (\rho g S/H) \sum t_i x_i$$

Заменяя, как обычно, интегральную сумму $\sum t_i x_i$ на интеграл от функции $f(x) = x$ по отрезку $[0, H]$ (который равен $H^2/2$) получаем ответ: $\rho g HS/2$

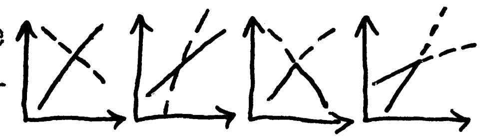
Таким образом, сила такова, как если бы вся площадь стенки находилась бы на глубине $H/2$.

Множество подобных рассуждений Вас ожидает в физике.

Задачи по анализу

I. Производная, мгновенная скорость, касательная.

I.I. На рисунках показаны мировые линии двух автомобилей. Какие дорожно-транспортные происшествия изображены?



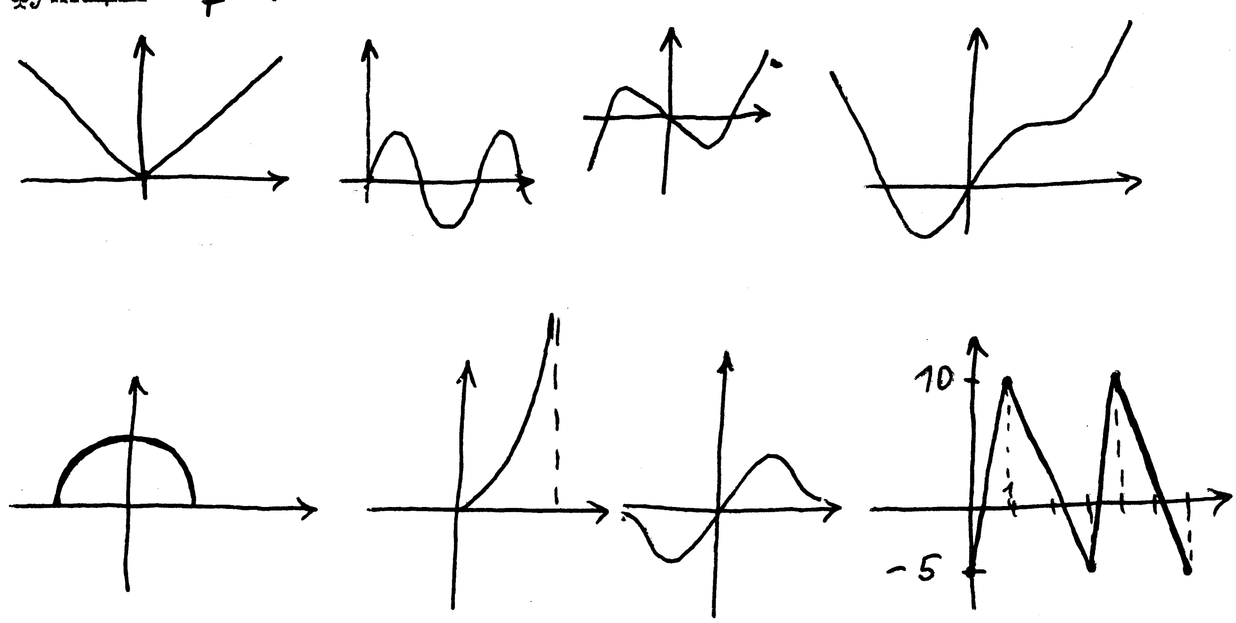
I.2. Из Нью-Йорка в Гавр в I2 ч. ежедневно отправляется пароход и через 7 дней прибывает в Гавр. Сколько пароходов встретит на своем пути пароход, отправляющийся в I8 часов (того же времени) из Гавра в Нью-Йорк?

I.3.* Тело движется по прямой и за каждую секунду проходит I метр. Можно ли утверждать, что оно движется равномерно?

I.4. При движении по формуле $x(t) = t^2$ найти мгновенную скорость в любой момент времени t .

I.5. (Продолжение.) Дать другое решение предыдущей задачи, использующее то, что касательная к параболе имеет с ней одну общую точку.

I.6. Нарисовать графики функции f' для следующих функций f :



I.7. Найти производную функцию f' , если $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

I.8. Для каких функций формула $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ точна?

I.9. Найти приближенно $\sqrt{4.001}$

2. Учимся дифференцировать.

2.1. Найти производную функции $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$.

2.2. Найти производную функции $x \mapsto 1/x^2$.

2.3. Найти производную функции $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

2.4. Известно, что $f(x) = g(x+1)$.*) Чему равно $f'(a)$?

2.5. Известно, что $f(x) = g(2x)$.*) Чему равно $f'(a)$?

2.6. Известно, что $f(x) = g(-x)$.*) Чему равно $f'(a)$?

2.7. Функция f четна ($f(x) = f(-x)$). Как связаны $f'(a)$ и $f'(-a)$? чему равно $f'(0)$?

2.8. Тот же вопрос для нечетной функции ($f(-x) = -f(x)$).

2.9. Верно ли, что если f' нечетна, то f четна?

Найти производную функции f, если $f(x)$ равно *)

2.10. $3-2x$. 2.11. $(x+2)^3$. 2.12.* $x\sqrt[4]{x^3}$.

2.13.* $(x^2+1)(\sqrt{x}+1)$. 2.14.* $(x+1)^{100}$ 2.15.* $(2x+1)^{100}$

2.16.* $\sqrt{2-3x}$. 2.17.* $\sqrt{1-x^2}$. 2.18.* $[g(x)]^n$, где g — функция, производная которой известна.

3. Зачем нужно дифференцировать?

3.1. Доказать, что если функция f строго возрастает на $[a,b]$ и $[b,c]$, то она строго возрастает на $[a,c]$.

3.2. Найти промежутки возрастания и убывания для функции $x \mapsto x^3 - 3x^2$ и ее наибольшее и наименьшее значения на $[-1, 2]$.

3.3.* Нарисовать на плоскости множество тех $\langle p, q \rangle$, при которых функция $x \mapsto x^3 + px^2 + qx$ возрастает на всём $\mathbb{R}$.

3.4. Найти наибольшее значение xy, если $2x+3y=1;\ x,y \geqslant 0$.

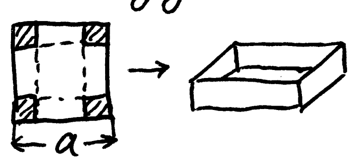
3.5. Найти наибольшее значение xy^2, если $2x+3y=1;\ x,y \geqslant 0$.

3.6. Найти число корней уравнения $x^3 - x - a = 0$ (в зависимости от a).

3.7. Найти максимум и минимум функции $x \mapsto x^2 - 3|x| + 2$ на отрезке $[-2, 1]$

3.8. Доказать, что уравнение касательной к окружности единичного радиуса с центром в начале координат, проходящей через точку $\langle x_0, y_0 \rangle$, имеет вид $xx_0 + yy_0 = 1$.

3.9. Каков максимальный объем коробки, которую можно сложить из квадратного листа $a \times a$ (см. рис.)?

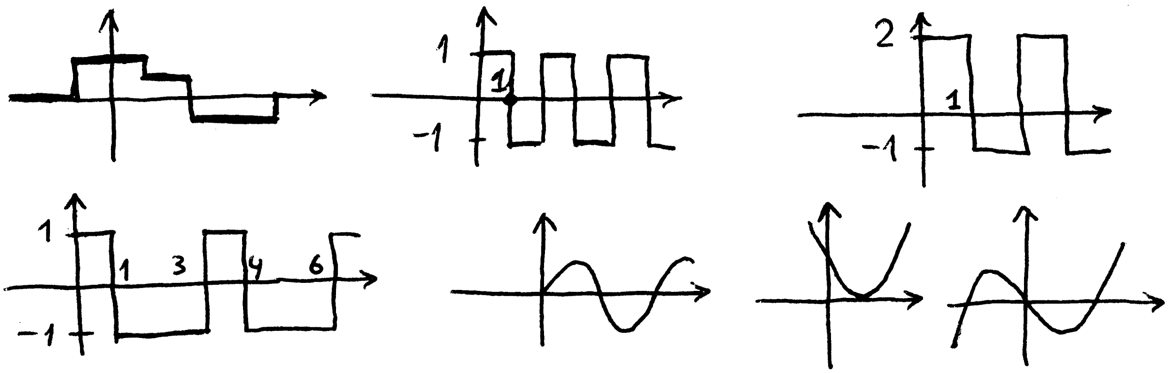


---

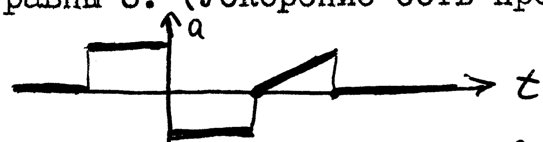
*) при всех x

4. Интеграл.

4.1. Построить по графику зависимости скорости от времени график зависимости координаты от времени:



4.2. Построить по графику ускорения графики зависимости скорости и координаты от времени. При $t=0$ скорость и координата равны 0. (Ускорение есть производная скорости: $a(t)=v'(t)$.)



4.3. Функция f нечетна : $f(-x)=-f(x)$. Чему равен $\int_{-a}^{a} f$?

4.4. Пусть g – некоторая функция. Определим f так: $f(a)=\int_0^a g$. Чему равно f' ?

4.5.* Функция f имеет период 1 : $f(x+1)=f(x)$ при всех x . Доказать, что число $\int_a^{a+1} f$ не зависит от выбора a .

4.6. Найти $\int_a^b f$, если $f(x)=x^2+x$.

4.7. Найти $\int_a^b f$, если $f(x)=\sqrt{x}$.

4.8.* Найти $\int_a^b f$, если $f(x)=x\sqrt{x}$.

4.9. Найти $\int_0^1 f$, если $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

(Указание. Площадь круга радиуса r равна πr^2 .)

4.10. Известно, что $f(x)=Cg(x)$. Чему равно $\int_a^b f$? (Ответ требуется выразить через интеграл от функции g .)

4.11. Известно, что $f(x)=g(x+1)$. Чему равно $\int_a^b f$?

4.12. Известно, что $f(x)=g(-x)$. Чему равно $\int_a^b f$?

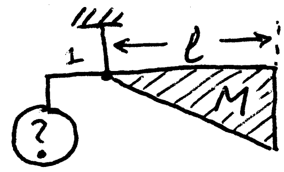
4.13. Известно, что $f(x)=g(2x)$. Чему равно $\int_a^b f$?

4.14. Известно, что $f(x)=g(x)+h(x)$. Чему равно $\int_a^b f$?

4.15.* Существует ли такая функция f , что $\int_a^b f = b-2a$ при всех a и b ?

4.16. Как надо определить $\int_a^b f$ при $b<a$, если мы хотим, чтобы равенство $\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$ было верно всегда?

5. Интеграл в физике.

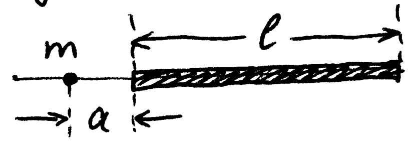


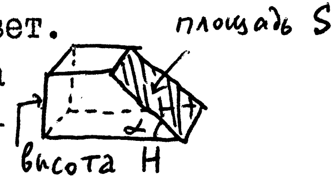
5.I. Какая гиря нужна, чтобы уравновесить однородный прямоугольный треугольник массы M с катетом l ?

5.2. Найти объем шара радиуса r .

5.3. Найти площадь поверхности шара радиуса r . (Указание. Если покрыть шар слоем краски толщиной h , то получится шар радиуса $r+h$.)

5.4.* Закон всемирного тяготения утверждает, что массы m_1 и m_2 , находящиеся на расстоянии r , притягиваются друг к другу с силой $\gamma m_1 m_2 / r^2$ (γ – "гравитационная постоянная"). Найти силу притяжения однородного стержня массы M длиной l и маленького шара массы m , находящегося на расстоянии a от конца стержня. Что получается при $a=0$? Объясните бессмысленный ответ.





5.5. Найти силу давления, действующую на наклонную стенку сосуда (см. рисунок), заполненного водой.

5.6.* Воздушный шар сначала 20 секунд поднимается со скоростью 2 м/с, а затем, выпустив часть газа, спускается с такой же скоростью. Над землей дует ветер, скорость которого пропорциональна высоте и равна 0.5 м/с на высоте I м. На каком расстоянии от точки старта приземлится шар?

Анализ: еще несколько задач

I.* Альпинист вчера поднялся на вершину, а сегодня спустился. Доказать, что есть точка, в которой он был дважды в одно и то же время суток.

2.* Из города А в город Б ведут две дороги. Из А в Б по этим дорогам выехали две машины, связанные веревкой в 20 м, и приехали в Б, не порвав веревки. Доказать, что два круглых воза радиусом II м, едущих по этим дорогам навстречу друг другу, не смогут разъехаться.

3.* Улитка ползла в одном направлении 6 минут. За это время её наблюдали несколько человек, каждый наблюдал минуту и за эту минуту она проползла не более I м. Ни в один момент она не оставалась без наблюдения. Могла ли она проползти больше 6 м? Больше I2 м?

4.* Эскалатор движется со скоростью u. Нарисовать на плоскости те пары (v_1, v_2), при которых человек, бегущий по эскалатору со скоростью v_1, насчитает больше ступенек, чем бегущий со скоростью v_2. (Не забудьте рассмотреть различные знаки у v_1 и v_2.)

5.* Доказать, что абсцисса точки пересечения двух касательных к параболе (графику квадратного трехчлена) равна полусумме абсцисс точек касания.

6.** Система $x = y^2 + C_1$, $y = x^2 + C_2$ имеет единственное решение (x_0, y_0). Доказать, что $x_0 y_0 = 1/4$.

7.* Найти производную функции $x \longmapsto (\sqrt{x^3 + x}\,) / (2x+1)^{10}$.

8.* Найти точку параболы $y = x^2$, ближайшую к точке $(-1, 2)$.

9.* Найти $f'(x)$, если $f(x)$ – длина кривой с уравнением (I) $y = |x|$ (2) $y = x + |x|$ между точками с абсциссами -1 и x.

I0.* Найти уравнение касательной к кривой $x^2 + y^4 = 2$ в точке $(1, 1)$.

II.** Найти уравнение касательной к кривой $x^3 + x + y^3 + y = 1$ в точке $(1, 0)$.

I2.* Найти расстояние от каждой из точек $(0, 4)$ и $(0, 6)$ до параболы $y = x^2/10$.

I3.* Автомобиль движется с ускорением, не превышающим a по модулю. Какое наибольшее расстояние он может проехать за время t, если в конце пути он должен остановиться?

14.** Функция f такова, что при всех x и h погрешность $\alpha(x,h)$ в формуле $f(x+h)\approx f(x)+f'(x)h$ (т.е. разность её левой и правой частей) не превосходит Ch^3, где C – константа. Доказать, что f – линейная функция, т.е. при некоторых a и b равенство $f(x)=ax+b$ верно при всех x.

15.* Выпуклое множество M на плоскости имеет площадь S и периметр l. Доказать, что площадь множества всех точек, удаленных от M не более чем на r, равна $a+br+cr^2$, где a, b и c – константы, не зависящие от r. Найти a, b, c.

16.* Функция $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ удовлетворяет условиям $f'(x)=f(x)$, $f(0)=1$. Найти a_i.

17.* (Продолжение.) Вычислить $f(1)$ с точностью 10%.

18.** (Продолжение.) Доказать, что $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ при всех x и y.

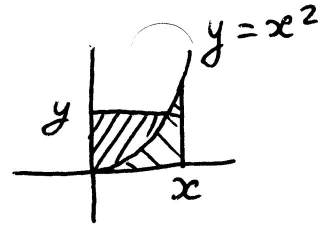
19.* Найти длину кривой $y=x^{3/2}$ между точками с абсциссами 0 и 1.

20.* Доказать, что интегралы от функции $f: x\mapsto 1/x$ по отрезкам $[a,b]$ и $[ca,cb]$ равны.

21.* Доказать неравенство:

$xy\leq(x^3/3)+\frac{2}{3}y^{3/2}$ при $x,y\geq 2$

(Указание. См. рисунок.) Когда это неравенство превращается в равенство?



22.* Функция f – убывающая. Доказать, что при $0\leq\alpha\leq 1$ выполнено неравенство $\int_0^\alpha f\leq\alpha\int_0^1 f$

23.* Доказать, что если $f(a)=f(b)=0$, то

$$\int_a^b |f|\leq[(a-b)^2/4]\cdot\max\{|f'(x)|\mid x\in[a,b]\}$$

24.** Доказать, что если $g(x)=f(x-1/x)$, то интегралы $\int_0^\infty g$ и $\int_0^\infty f$ равны.

25.** Если функции f и g либо обе возрастают, либо обе убывают, то $\int_0^1(f\cdot g)\geq(\int_0^1 f)\cdot(\int_0^1 g)$

26.** Функция f такова, что множество $\{\langle x,y\rangle \mid y>f(x)\}$ выпукло (f' монотонно возрастает). Доказать, что

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)\leq\int_a^b f\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\qquad(a<b)$$