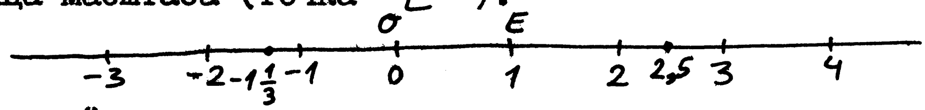
Листок I. Координаты на прямой.

Напоминания. Пусть на прямой выбрана точка O (начало координат) и единица масштаба (точка E).



Тогда всякой точке соответствует число, называемое ее координатой. Наоборот, для любого числа x можно найти точку, координата которой равна x. Вместо "точка с координатой x" мы будем говорить иногда коротко "точка x". При переводе на "язык точек" с "языка чисел" полезна такая таблица

числа	точки
число $x > 0$	точка x лежит справа от O
число x больше числа y	точка x лежит правее точки y
$\lvert x\rvert$	расстояние от точки x до точки O
$\lvert x-y\rvert$	расстояние между x и y

Напомним, что $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

Задачи

I. Чему равен $|-a|$ при $a<0$ – числу a или числу $-a$?

2. а) Известно, что $a \geq b$. Можно ли утверждать, что $|a| \geq |b|$?
б) Известно, что $a \leq b$ и $-a \leq b$. Можно ли утверждать, что $|a| \leq b$?

3. Нарисовать на прямой множества тех точек x , для которых
а) $x > 1$; б) $x - 2 \geq 2x$; в) $|x+1| = x+1$;

г) $|x-2| = |2-x|$; д) $|x+2| + |x+1| = 2$

(разберите случаи $x < -2$, $-2 \leq x \leq -1$, $x > -1$);
е) $|x+1| + |x-1| = 1$.

4. Доказать, что при всех x и y выполнено неравенство $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Указание. Рассмотреть 4 возможности: (а) $x \geq 0, y \geq 0$; (б) $x \geq 0, y < 0$; (в) $x < 0, y \geq 0$; (г) $x < 0$, $y < 0$.)

5. Дано, что $|x+2| \leq 3$, $|x-4| \leq 5$. Доказать, что $|x| \leq 1$.

6. Нарисовать множество тех точек x , для которых: а) $x^2 > 4$
б) из утверждений $x > 1$, $x > 2$, ..., $x > 10$ четное число верных;
в) $(x-1)(x-2)\ldots(x-10) \geq 0$.

7. а) Точки A и B имеют координаты a и b . Найти координату середины отрезка AB .

б) Решить уравнение $|x-a| = |x-b|$ (Надо указать, чему равно множество удовлетворяющих этому равенству значений x в зависимости от a и b.)

8*. Точка C лежит на отрезке AB и делит его в отношении $m:n$ (т.е. $AC/CB = m/n$). Найти координату точки C , если координаты точек A и B равны a и b . Рассмотрите сначала случай $m=1, n=2$.

9*. При каких значениях a уравнение $|x+3| + |x-1| = a$ не имеет решения, имеет одно решение, два решения, бесконечно много решений? (Решение уравнения - число, при подстановке которого вместо переменной получается верное равенство.)

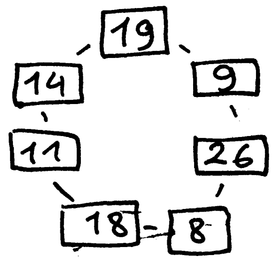
10*. Найти наименьшее значение выражения

$$|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-10|$$

При каком x оно достигается?

11*. На прямом шоссе через равные промежутки стоят 10 домов. Где нужно вырыть колодец, чтобы суммарное расстояние от всех домов до колодца было как можно меньше? А если промежутки между домами различны?

12*. На окружности расположено 7 коробок со спичками (внутри указано число спичек):



За один шаг разрешается переложить спичку из любой коробки в соседнюю. Придумать способ уравнять количества спичек во всех коробках за минимальное число шагов. Доказать, что меньшим числом шагов обойтись нельзя.

Через $[x]$ (целая часть x) обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[2]=2$, $[3\frac{1}{3}]=3$, $[-3\frac{1}{3}]=-4$.

13. Какие значения может принимать выражение $[x]+[-x]$?

14. Нарисовать множество тех x, для которых:

а) $x=[x]$; б) $[x]=[x+\frac{1}{3}]$.

15*. Доказать, что если a, b, c - положительные числа и число c целое, то

$$\left[\frac{a}{bc}\right]=\left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right]$$

П А М Я Т К А

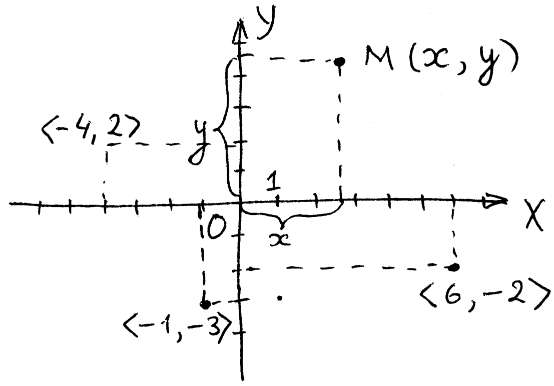
Для записи решений задач следует иметь специальную тетрадь (желательно общую). Задачи принимаются только после того, как их решения будут записаны в тетради. Эту тетрадь, так же как и выдаваемые Вам листки, следует приносить на каждый урок.

Задачи делятся на обязательные и дополнительные. Если Вам не будет сказано особо, обязательными для Вас являются задачи, <u>не</u> помеченные звездочкой (*). Листок считается пройденным, только если сданы все обязательные задачи. Мы советуем Вам завести список номеров всех задач, где отмечать, какие задачи Вы сдали (пункты а), б) и т. д. считаются отдельными задачами).

Желаем успехов!

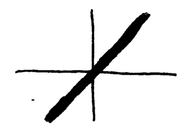
Листок 2. Координаты на плоскости.

Напоминания. Нарисуем на плоскости две перепндикулярные прямые OX и OY и отметим единицу масштаба. Тогда каждой точке M плоскости соответствует пара чисел $\langle x, y\rangle$ называемых ее координатами (см. рисунок), и для любой пары чисел $\langle x, y\rangle$ можно найти точку с такими координатами. Вместо "точка с координатами $\langle x, y\rangle$" мы будем говорить "точка $\langle x, y\rangle$".



Пример. Нарисовать на плоскости множество тех точек $\langle x, y\rangle$, для которых $x = y$.

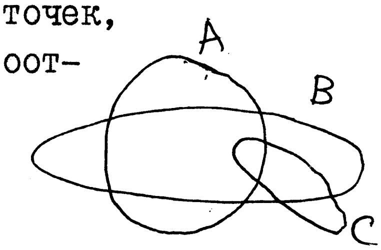
Решение. Точки $\langle x, y\rangle$, для которых $\langle x = y\rangle$, лежат на прямой, делящей угол XOY пополам.



Задачи.

1. Нарисовать множество тех точек $\langle x, y\rangle$, для которых:
а) $x > y$; б) $x = 1$; в) $xy = 0$; г) $x^2 + y^2 = 0$; д) $x + y = 0$; е) $x^2 - y^2 = 0$; ж) $x > y$ и $x > -y$; з) $x > y$ или $x > -y$; и) $|x - 1| < 0{,}1$; к) $|x-1| < 0{,}1$ и $|y-2| < 0{,}2$; л)* $xy < 1$; м)* $[x] = [y]$; н)* $\{x\} = \{y\}$.

2. Множества A, B и C состоят из точек, попадающих внутрь линий на рисунке, обозначенных соответствующими буквами. Можно ли утверждать, что:
а) если $x \in A$ и $x \in B$, то $x \in C$?
б) если $x \in A$ и $x \notin B$, то $x \notin C$?
в) если $x \notin B$, то $x \notin A$ или $x \notin C$?

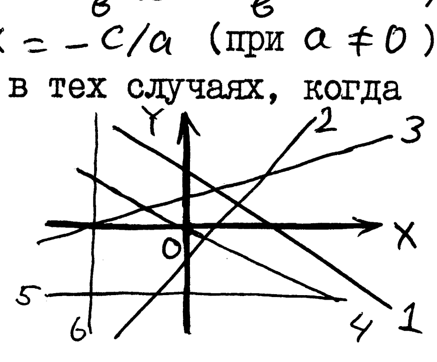


3. Нарисовать те точки $\langle x, y\rangle$, для которых $x = y$, $x^2 = y^2$, $x^3 = y^3$ (три рисунка). Можно ли утверждать, что:
а) если $x = y$, то $x^2 = y^2$? б) если $x^2 = y^2$, то $x = y$? в) если $x^3 = y^3$, то $x = y$? г)* если $x + x^3 = y + y^3$, то $x = y$?

4. Точки $\langle 3, 2\rangle$ и $\langle a, -1\rangle$ расположены на одной прямой, параллельной оси OY. Найти a.

Напоминания. Множество точек $\langle x, y\rangle$, удовлетворяющих условию $y = kx + b$, является прямой. Таким образом может быть задана любая прямая, кроме вертикальных. К этому виду можно преобразовать и уравнение $ax + by + c = 0$, если $b \neq 0$ ($y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$); при $b = 0$ получается вертикальная прямая $x = -c/a$ (при $a \neq 0$). Прямые $y = kx + b$ и $y = k_1 x + b_1$ параллельны в тех случаях, когда $k = k_1$ и $b \neq b_1$.

5. Прямые 1,2,3,4,5,6 заданы уравнениями вида $y = kx + b$. Определить для каждой из них знаки чисел k и b.



Координаты на плоскости (продолжение)

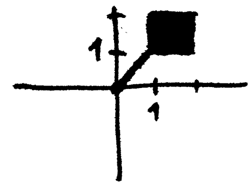
6. Точки $\langle 0,1\rangle$ и $\langle 2,3\rangle$ лежат на прямой $y=kx+b$. Найти k и b.

7. Уравнения $y=2x+3$ и $x=ay+b$ задают одну и ту же прямую. Найти a и b.

8. Нарисовать множества тех точек $\langle x,y\rangle$, для которых: а) $x>2y$; б) $3x<-4y$; в) $2x<2y+4$; г) $2x+3y=5$.

9. Известно, что $x>y$ и $x>3y$. Можно ли утверждать, что $x>2y$? Нарисовать соответствующие множества.

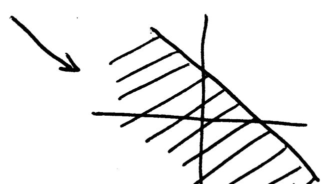
10. а) Точки $\langle 3,a\rangle$ и $\langle b,-5\rangle$ симметричны относительно прямой OX. Найти a и b. б) Тот же вопрос, если они симметричны относительно начала координат.



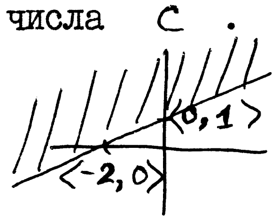
11. Множество A изображено на рисунке. Нарисовать множество тех $\langle x,y\rangle$, для которых
а) $\langle x,-y\rangle\in A$ (Запись: $\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,-y\rangle\in A\}$);
б) $\{\langle x,y\rangle \mid \langle -x,-y\rangle\in A\}$; в) $\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,y+1\rangle\in A\}$;
г)* $\{\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle\in A\}$; д)* $\{\langle x,y\rangle \mid \langle \frac{x}{2},\frac{y}{2}\rangle\in A\}$; е)* $\{\langle x,y\rangle \mid \langle x,x+y\rangle\in A\}$

12.* Точка A с координатами $\langle x,y\rangle$ повернута на 90° против часовой стрелки вокруг начала координат. Найти координаты полученной точки B.

13. Заштриховано множество всех тех $\langle x,y\rangle$, для которых $ax+by+c>0$ Определить знак числа c.



14. Заштриховано множество всех тех $\langle x,y\rangle$, для которых
$$ax+by+1<0$$
Найти a и b.



15. Найти точку пересечения прямых $y=2x+1$ и $x+y=7$.

16.* Доказать, что если прямые $y=kx+b$ и $y=k_1x+b_1$ не пересекаются, то $k=k_1$ и $b\neq b_1$.

17.* Известно, что $|x+y|\le 1$ и $|x-2y|\le 2$. Какие значения может принимать x?

18.* а) Прямая $y=\frac{7}{15}x+\frac{1}{3}$ проходит через целочисленные точки $\langle 10,5\rangle$ и $\langle -20,-9\rangle$ (целочисленные точки – точки, обе координаты которых целые). Есть ли на ней другие целочисленные точки?

б) Прямая $y=kx+b$ проходит через 2 целочисленные точки. Может ли на ней не быть других целочисленных точек?

в) Существует ли прямая, не проходящая ни через одну целочисленную точку?

г) Существует ли прямая, проходящая ровно через одну целочисленную точку?

19.* В двух баках хранятся два раствора с разным процентным содержанием кислоты. Из этих растворов составлен I л 96%-го раствора и 0,5 л 40%-го раствора, причем на это было израсходовано I4/I5 л раствора из I-го бака и I7/30 л раствора из 2-го бака. Найти процентное содержание кислоты в обоих баках.

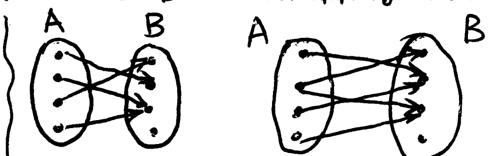
Листок 3. Функции и графики.

Напоминание. Пусть имеются множества A и B и каждому элементу множества A сопоставлен (ровно один) элемент множества B. В таком случае говорят, что задана функция, отображающая множество A в множество B. Если f – функция, отображающая A в B, то пишут так: $f: A \to B$.

Если функция f сопоставляет элементу $a \in A$ элемент $b \in B$, то b называется значением f на a и обозначается $f(a)$. Пишут и так:
$f: a \mapsto b$ (f переводит a в b)

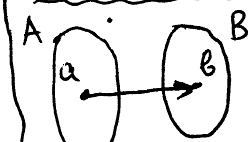
Пример. Функция f, "возведение в квадрат" ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) сопоставляет каждому числу его квадрат: $f(x) = x^2$, $f: x \mapsto x^2$.

В этом листке мы будем рассматривать числовые функции – функции, у которых A и B суть некоторые множества действительных чисел. Такие функции изображаются с помощью графиков. Графиком числовой функции называется множество всех тех точек $\langle x, y \rangle$ у которых $y = f(x)$.



Функция Не-функция

ТЕРМИНОЛОГИЯ



$f: A \to B$

$f: a \mapsto b$

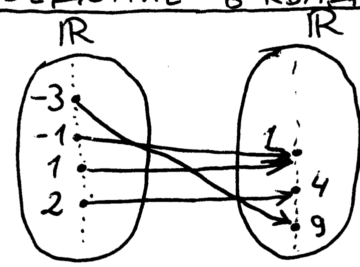
$b = f(a)$

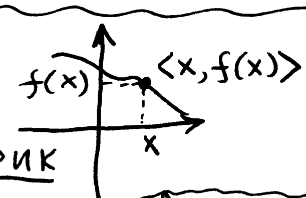
b – образ a

b – значение f на a

f переводит a в b

ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ

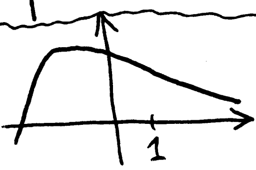




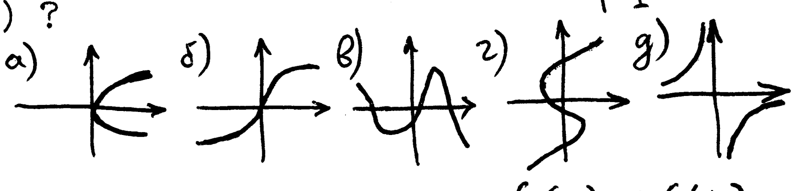
ГРАФИК

Задачи.

1. График функции f изображен на рисунке. Что больше: $f(2)$ или $f(3)$?



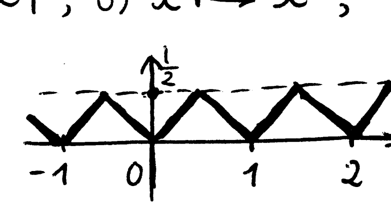
2. Какие из изображенных множеств являются графиками?



3. Функция f называется возрастающей, если $f(x) < f(y)$ при любых x и y, для которых $x < y$. Какие из функций, графики которых изображены на рисунках к задаче 2, являются таковыми?

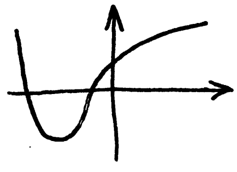
4. Построить графики функций: а) $x \mapsto |x|$; б) $x \mapsto x^2$; в) $x \mapsto [x]$; г) $x \mapsto \{x\}$.

5*. Написать формулу (содержащую знаки $\{\ \}$ (дробная часть), $|\ \ |$ (модуль) и арифметические знаки), задающую функцию, график которой изображен на рисунке.



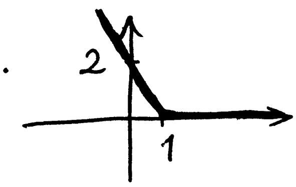
6*. Обозначим через $min(a,b)$ и $max(a,b)$ наименьшее и наибольшее из чисел a и b. Написать формулы для $min(a,b)$ и $max(a,b)$, содержащие знак модуля и знаки арифметических действий.

7. График функции f изображен на рисунке:

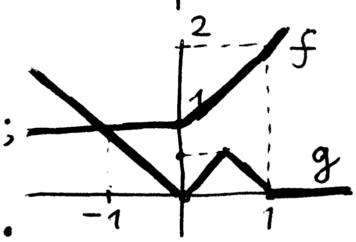


Скопировать этот рисунок в 9 – I2 экземплярах и нарисовать на этих же рисунках графики функций:
а) $x \mapsto f(x)+1$; б) $x \mapsto f(x-1)$; в) $x \mapsto f(x+1)$; г) $x \mapsto f(2x)$; д) $x \mapsto 2f(x)$; е) $x \mapsto |f(x)|$; ж) $x \mapsto f(|x|)$; з) $x \mapsto -f(x)$; и) $x \mapsto f(-x)$; к)* $x \mapsto 1/f(x)$; л)* $x \mapsto (f(x))^2$; м)* $x \mapsto f(x)+x$.

8*. Построить график функции g, если: а) $g(x)=f(2x+1)$; б) $g(x)=f(|x|+1)+1$; в) $g(x)=f(f(x))$, а график f таков:



9*. Даны графики функций f и g :



Нарисовать графики функций: а) $x \mapsto f(x)+g(x)$; б) $x \mapsto f(x)-g(x)$; в) $x \mapsto f(x)\cdot g(x)$; г) $x \mapsto 1/f(x)$; д) $x \mapsto f(g(x))$; е) $x \mapsto g(f(x))$.

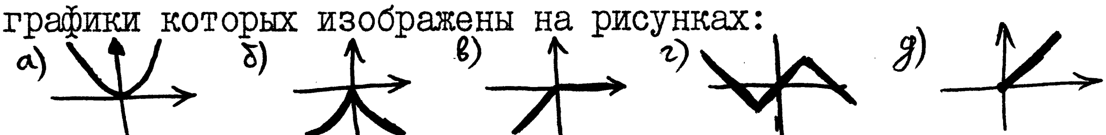
I0. а) Построить на одном чертеже графики функций $x \mapsto x^2$ и $x \mapsto x+2$. Найти их точки пересечения. б) Сколько решений имеет уравнение $x^2=x+2$?

II*. Сколько решений имеет уравнение $x^3=10-x$?

Функция f , определенная на множестве M , называется <u>чётной</u>, если выполнены такие условия: (I) если $x \in M$, то $-x \in M$; (2) для всех $x \in M$ выполнено равенство $f(x)=f(-x)$;

Заменяя (2) на (2′): для всех $x \in M$ выполнено $f(-x)=-f(x)$, получаем определение <u>нечётной</u> функции.

I2. Являются ли четными или нечетными функции, графики которых изображены на рисунках:



I3. Являются ли четными или нечетными функции: а) $x \mapsto |x|$; б) $x \mapsto x+x^3$; в) $x \mapsto (|x|+2)^3-27|x|$; г) $x \mapsto x+|x|$; д)* $x \mapsto |x+1|+|x-1|$.

I4. а) Доказать, что функция f является четной тогда и только тогда, когда OY является осью симметрии ее графика. (Нужно доказать: (I) если f четна, то график f симметричен; (2) если график f симметричен, то f четна.)

б) Доказать, что функция f является нечетной тогда и только тогда, когда O является центром симметрии графика f .

I5.а) Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ четна, функция $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ нечетна, $f(1)+g(1)=5$, $f(-1)+g(-1)=3$. Найти $f(1)$ и $g(1)$.

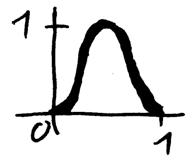
б)* Пусть $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – любая функция. Доказать, что можно найти такую четную функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и такую нечетную функцию $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ чтобы при всех $x \in \mathbb{R}$ выполнялось равенство $h(x)=f(x)+g(x)$.

Функции и графики - 3

16*. Существует ли функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, одновременно являющаяся возрастающей и четной?

17. Построить графики функций: а) $x \mapsto x^2+1$; б) $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$; в) $x \mapsto 3/(x^2+1)$; г) $x \mapsto 3x^2-1$; д) $x \mapsto \frac{1}{3x^2-1}$; е) $x \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$; ж)* $x \mapsto |x-1| + |x+1|$; з) $x \mapsto -(|x|+2)^2$; и) $x \mapsto |2x+1|+1$.

18*. График функции $f: [0,1] \to [0,1]$ изображен на рисунке. Нарисовать графики функций



а) $g: x \mapsto f(f(x))$;

б) $h: x \mapsto f(f(f(x)))$

в) Сколько решений имеет система уравнений: $y = f(x)$, $z = f(y)$, $f(z) = \frac{1}{2}$

(Решением называется тройка чисел $\langle x, y, z \rangle$, удовлетворяющая всем уравнениям системы.)

19*. Придумать такую функцию f, чтобы для всех $x \in \mathbb{R}$ было выполнено равенство $f(x+1) = f(x) + 2$

Существуют ли две различных функции с таким свойством?

20*. Функция $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что при всех $x, y \in [0,1]$ выполнено неравенство $|f(y) - f(x)| \leq (y-x)^2$.

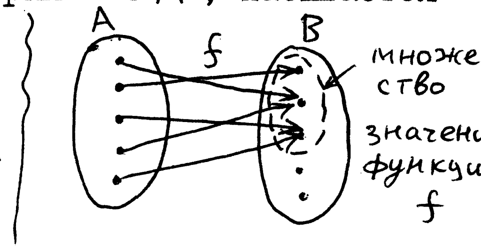
Доказать, что $f(0) = f(1)$ и, более того, f – постоянная функция (всюду равная одному и тому же числу).

21*. Придумать такую функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, чтобы при любом $a \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = a$ имело бы бесконечно много решений.

22*. Известно, что график функции f – прямая, $-1 \leq f(0) \leq 1$, $3 \leq f(2) < 5$. Чему может быть равно: а) $f(4)$; б) $f(-2)$?

Листок 4. Функции.

Напоминание. Пусть $f: A \to B$. Тогда множество A называется областью определения функции f, а множество всех $y \in B$, которые являются значениями функции f на некоторых $x \in A$, называется множеством значений функции f.

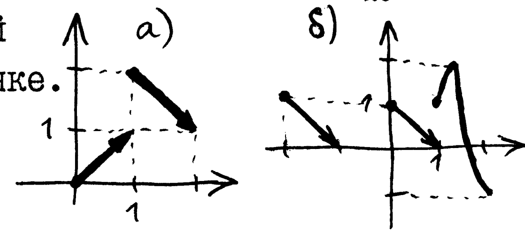


Задачи.

1. Определить множество значений функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если: а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = |x| + 1$; в) $f(x) = |x+1|$.

(Чтобы доказать, что множество значений функции f равно некоторому X, нужно доказать два утверждения: (1) все значения функции f принадлежат X; (2) любой элемент X является значением функции.)

2. Найти области определения и значений функций, графики которых изображены на рисунке.



3. Найти область значений функций:

а) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{при } x \in [-3, 2] \\ \text{не определено иначе} \end{cases}$

б) $g(x) = [x]$; в) $h(x) = \{x\}$.

4. Построить функции: а) с областью определения $]-1, 1[$ и областью значений $[0, 2[$; б)* с областью определения $[-1, 1]$ и областью значений $]-1, 1[$; в)* с областью определения $]-1, 1[$ и областью значений $[-1, 1]$; г)* с областью определения $]0, 1[$ и областью значений $\mathbb{R}$.

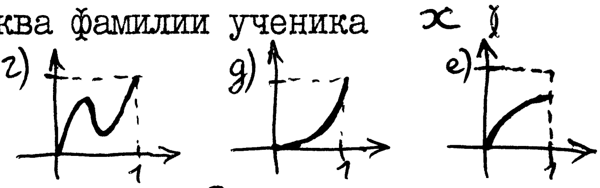
Определения. Функция $f: A \to B$ называется: а) наложением, если область значений ее совпадает с B; б) вложением, если различным элементам A соответствуют различные элементы B: из $x \neq y$ следует $f(x) \neq f(y)$; в) взаимно однозначным соответствием между A и B если она одновременно является и вложением, и наложением.

5. Какие из приведенных ниже функций являются наложениями, вложениями и взаимно однозначными соответствиями?

а) A = множество учеников 7б класса, B = множество всех букв русского алфавита, $f: x \mapsto$ (первая буква фамилии ученика x)

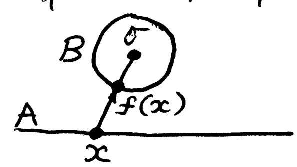
б) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$, $f: x \mapsto [x]$

в) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$, $f: x \mapsto x$

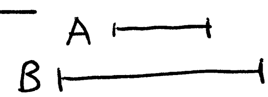


В пунктах г – е $A = [0, 1]$, $B = [0, 1]$.

ж) A = прямая, B = окружность, $f(x)$ = точка пересечения луча Ox с окружностью.

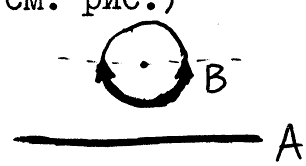


6. Придумать взаимно однозначное соответствие $f: A \to B$, если: а) A, B – отрезки (см. рис.)



б) $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$;

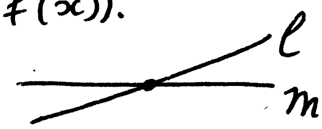
в)* A – прямая, B – полуокружность (без концов), г)* $A =]0, 1[$, $B = \mathbb{R}$



д)* $A =]0, 1]$, $B = [0, 1]$; е) A = множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, B = множество четных натуральных чисел; ж)* $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$; з)* $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$

Листок Д. I. Функции (дополнительные задачи).

Обозначения. Пусть $f: A \to B$, $g: B \to C$. Функция (=отображение) $x \mapsto g(f(x))$ называется <u>композицией</u> функций f и g и обозначается $g \circ f$. Таким образом, $g \circ f(x) = g(f(x))$.



I. Прямые ℓ и m образуют угол в 7^0. Обозначим через f отображение осевой симметрии относительно ℓ, а через g – относительно m. Найти $g \circ f$ и $f \circ g$.

2. Пусть A и B – две точки, f и g – центральные симметрии относительно A и B. Найти $f \circ g$ и $g \circ f$.

3. Точка O называется <u>центром симметрии</u> множества M (состоящего из точек плоскости), если при центральной симметрии относительно O множество M переходит в себя. Доказать, что если множество M имеет более одного центра симметрии, то оно имеет бесконечно много центров симметрии.

4. Рассмотрим 8 отображений плоскости в себя, задаваемых (в координатах) формулами $\langle x, y\rangle \mapsto \langle \pm x, \pm y\rangle$ (4 варианта) и $\langle x,y\rangle \mapsto \langle \pm y, \pm x\rangle$ (4 варианта). Убедиться, что композиция любых двух отображений этого списка снова входит в список, и составить таблицу умножения (из 8 строк и 8 столбцов).

5. Взаимно однозначное отображение (=функция) $f: A \to A$, где A – конечное множество, называется <u>перестановкой</u> множества A. Обычно в качестве A берут множество $\{1, 2, \ldots, k\}$ и перестановку записывают в виде таблицы из двух строк; например,
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ или, короче, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ обозначает перестановку, переводящую I в 3, 3 в I, а 2 и 4 – в себя. Найти $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Найти перестановку f множества $\{1,2,3,4\}$, для которой
$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

7. Доказать, что для любой перестановки f найдется такое n, что $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ раз}} = e$ (через e обозначена <u>тождественная</u> перестановка, оставляющая все числа на месте). Наименьшее такое n называется <u>порядком</u> перестановки f.

8. Существуют ли перестановки множества $\{1,2,3,4,5\}$, имеющие порядок: а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 7?

9. Найти число перестановок множества из k элементов.

10. <u>Транспозицией</u> называется перестановка, меняющая два числа местами и оставляющая все остальные числа на месте. Доказать, что если композиция n транспозиций равна e, то число n четно.

11. Доказать, что всякая перестановка представляется в виде композиции транспозиций.

Листок Д. I. Функции (дополнительные задачи) – 2

I2. Согласно задаче II, всякая перестановка f может быть представлена в виде произведения (=композиции) некоторого числа транспозиций. Таких представлений может быть, конечно, много. Доказать, что либо во всех них четное число транспозиций (тогда f называется <u>четной</u> перестановкой), либо во всех них нечетное число транспозиций (тогда f называется <u>нечетной</u> перестановкой). Доказать, что произведение двух четных или двух нечетных перестановок четно, а произведение четной и нечетной перестановок нечетно.

Учет решенных задач ______________________
(фамилия, имя)

номера	I	2	3	4	5	6	7	8а	8б	8в	8г	8д	9	I0	II	I2
записаны																
приняты когда																
кем																

Свободное место в концах листков мы будем использовать для задач олимпиадного характера. Быть может, Вы захотите попробовать свои силы на их решении.

Замостить треугольник отрезками. (Это означает, что нужно указать такое множество отрезков, чтобы каждая точка треугольника лежала ровно на одном из них.) Решить ту же задачу для круга.

На сколько частей делят плоскость 20 прямых, любые две из которых пересекаются и никакие три из которых не имеют общей точки?

Из каждой вершины треугольника проведен отрезок, соединяющий ее с некоторой внутренней точкой противоположной стороны. Доказать, что середины этих отрезков не могут лежать на одной прямой.

Плоскость раскрашена в два цвета. Возможно ли, чтобы любая пара точек, находящихся друг от друга на расстоянии I см, была закрашена: а) одинаково; б) по-разному?

Точки А и В находятся на плоскости на расстоянии 5,3 см. Блоха может прыгнуть в любом направлении, но ровно на I см. Может ли она из А допрыгнуть в В ?

Нарисовать какой-нибудь многоугольник и точку внутри него так, чтобы ни одна сторона не была видна из этой точки полностью.

Один выпуклый четырехугольник помещен внутри другого. Может ли сумма диагоналей внутреннего быть больше суммы диагоналей внешнего?

Разделить угол в I9 градусов на I9 равных частей с помощью циркуля и линейки.

Можно ли замостить доску I0 на I0 прямоугольниками I на 4 ?

На плоскости нарисован выпуклый I982-угольник, разбитый на I98I треугольник. Доказать, что можно провести прямую так, чтобы отсечь ровно один из этих треугольников.

Несколько окружностей разбивают плоскость на части. Нужно покрасить некоторые части белой краской, а остальные – черной, причем так, чтобы любые соседние (имеющие общую границу) части были покрашены по-разному. Докажите, что это всегда возможно.

Квадратный трехчлен: график и простейшие свойства

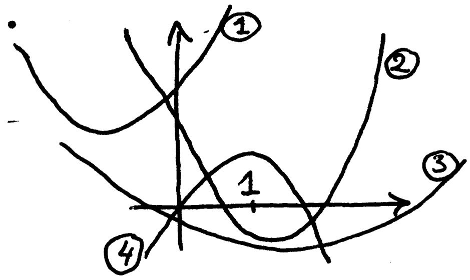
Напоминаем, что графиком функции f называется множество точек плоскости с такими координатами $\langle x, y\rangle$, что $y = f(x)$.

1. Постройте графики функций $x \mapsto (x-5)^2$, $x \mapsto x^2-5$, $x \mapsto 5x^2$.

2. Найдите a, b и c, если график функции $x \mapsto ax^2+bx+c$ получается сдвигом графика функции $x \mapsto x^2$ на 3 единицы вправо и на 5 единиц вниз.

3. Рассмотрим функцию "растяжение вдоль оси x в 2 раза", переводящую точку $\langle u, v\rangle$ в точку $\langle 2u, v\rangle$. Применим её ко всем точкам графика функции $x \mapsto x^2$. График какого квадратного трехчлена получится?

4. Преобразованием гомотетии с коэффициентом k называется отображение (=функция) $\langle u, v\rangle \mapsto \langle ku, kv\rangle$. Найдите преобразование гомотетии, переводящее график $x \mapsto x^2$ в график $x \mapsto ax^2$.



5. Определите знаки a, b и c для квадратных трехчленов вида ax^2+bx+c, графики которых изображены на рисунке.

6.* Определите знак числа $a+b+c$ для квадратных трехчленов из предыдущей задачи.

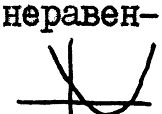
7. Нарисуйте график $x \mapsto x^2-2x$. При каких a уравнение $x^2-2x=a$ имеет решение?

8. При каких c система уравнений $y=x^2$, $y=x+c$ имеет единственное решение? Нарисуйте графики $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x+c$ при этих c.

9. Нарисуйте (на одном рисунке) множества точек $\{\langle x,y\rangle \mid y=x^2\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid x=y^2\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid y=\sqrt{x}\}$

10. Нарисуйте графики функций $x \mapsto 0.001x^2$ и $x \mapsto 1000x+1$. Сколько точек пересечения они имеют?

11.* Найдите такое c, что при всех $x>c$ выполнено неравенство $0.001x^2-1000x-1000>1000000$.



12. Нарисуйте множества $\{\langle x,y\rangle \mid y=ax^2+b|x|+c\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid y=|ax^2+bx+c|\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid |y|=ax^2+b|x|+c\}$, $\{\langle x,y\rangle \mid |y|=|ax^2+b|x|+c|\}$ если график функции $x \mapsto ax^2+bx+c$ изображен на рисунке.

13.* Докажите, что если квадратный трехчлен ax^2+bx+c принимает целые значения при всех целых значениях x, то $2a$, $a+b$ и c – целые числа. Докажите, что верно и обратное: если $2a$, $a+b$ и c – целые числа, то во всех целых точках значения функции – целые.

14. Какая прямая является осью симметрии графика $x \mapsto x^2+px+q$? Каково наименьшее значение функции $x \mapsto x^2+px+q$?

15.* Найти x, при котором выражение $(x-a_1)^2+\ldots+(x-a_n)^2$ принимает наименьшее значение.

Квадратный трехчлен: график и простейшие свойства (продолжение)

I6. В равнобедренный треугольник с основанием $2a$ и высотой h вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на основании, а две другие – на боковых сторонах. Какую наибольшую площадь может иметь этот прямоугольник?

I7.* Назовем уклонением квадратного трехчлена на отрезке $[a, b]$ наибольшее значение его модуля на этом отрезке. Найти квадратный трехчлен, старший коэффициент которого равен I, имеющий наименьшее возможное уклонение (I) на отрезке $[-1, 1]$ (2) на отрезке $[1, 2]$

I8.* Доказать, что квадратный трехчлен со старшим коэффициентом I не может принимать в трех целых точках значения, лежащие в интервале $]0, 1[$.

Квадратный трехчлен и квадратные уравнения

Напомним, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$ имеет два корня, если $D = b^2 - 4ac > 0$, один корень, если $D = 0$ и не имеет корней, если $D < 0$. Корни можно найти по формуле

$$x_{12} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$$

I. (Теорема, обратная к теореме Виета) Пусть a, b – любые числа, $p = -(a+b)$, $q = ab$. Доказать, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни a и b и не имеет других корней.

2. (Теорема Виета) Пусть квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни a и b. Доказать, что $p = -(a+b)$, $q = ab$. (Указание. Можно воспользоваться формулой корней квадратного уравнения, но можно и "поделить на $x - a$", т.е. записать $x^2 + px + q = (x-a)(x+(p+a)) + q + a(p+a)$ и затем подставить $x = a$ и $x = b$.)

3. Придумать квадратное уравнение с корнями (I) I и 2; (2) 0 и 3.

4. Верны ли такие утверждения: (I) если корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ различны и рациональны, то p и q рациональны; (2) если корни квадратного уравнения различны и иррациональны, то p и q иррациональны.

5. Известно, что $x + y = a$, $xy = b$. Выразить через a и b (I) $x^2 + y^2$ (2) $x^3 + y^3$ (3) $x^4 + y^2$ (4) $1/x^2 + 1/y^2$

6.* Даны попарно различные числа x_1, x_2 и x_3 и число a. Построить квадратичную функцию f, для которой $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = a$.

7.* Доказать, что через любые три точки плоскости, никакие две из которых не лежат на одной вертикальной прямой, можно провести график квадратного трехчлена. (Указание. Трижды воспользуйтесь предыдущей задачей).

8.* (Продолжение) Докажите, что такой график единствен.

9.* Доказать тождество: $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1$.

(Указание. Эту задачу можно решить устно, используя задачу 8.)

Квадратный трехчлен и квадратные уравнения (продолжение)

I0. Нарисуйте на плоскости множество тех точек $\langle p, q\rangle$, для которых уравнение $x^2+px+q=0$ (I) не имеет корней; (2) имеет один корень; (2) имеет 2 корня.

II.* Нарисуйте на плоскости множество тех точек $\langle p, q\rangle$, при которых уравнение $x^2+px+q=0$ (I) имеет корень 0; (2) имеет один положительный и один отрицательный корень; (3) имеет хотя бы один положительный корень.

I2. Нарисуйте на плоскости множество тех точек $\langle a, b\rangle$, при которых уравнение $ax^2+bx+1=0$ имеет ровно один корень.

I3.* Уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет корней и $a+b+c<0$ Найти знак числа c.

I4.** Где может лежать вершина (точка плоскости, соответствующая минимальному значению) квадратного трехчлена x^2+px+q, если один его корень не превосходит I, а другой меньше или равен 2 ?

I5.** Придумать способ, позволяющий, не решая уравнений $x^2+px+q=0$ и $x^2+mx+n=0$, ответить на вопрос: верно ли, что оба уравнения имеют по 2 корня, причем между корнями каждого из них имеется корень другого?

I6. Числа x и y – корни уравнения $t^2+pt+q=0$. Составить уравнение, корнями которого являются (I) x^2, y^2 (2) $x/y, y/x$. (Коэффициенты нового уравнения должны быть выражены через p и q.)

I7.* Та же задача, но корнями нового уравнения являются $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ (известно заранее, что $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$).

I8.* Рассмотрим всевозможные квадратные трехчлены вида $f(x)= x^2+px+q$, для которых $f(1)=3$, $f(3)<1$. Найти множество всех возможных значений таких трехчленов в точке $x=-1$.

I9. При отрезании квадрата со стороной I от прямоугольника, меньшая сторона которого равна I, образуется прямоугольник, подобный исходному, т.е. имеющий то же отношение сторон. Найти стороны исходного прямоугольника. (Он называется прямоугольником "золотого сечения".)

20.** Сколько решений в целых числах имеет уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{666}$?

2I.* Доказать, что если $x+y\in\mathbb{Q}$ и $xy\in\mathbb{Q}$, то $x^n+y^n\in\mathbb{Q}$.

22.* Один из корней квадратного уравнения с рациональными коэффициентами равен $1+\sqrt{2}$. Найти второй корень.

23.* Может ли квадратное уравнение с рациональными коэффициентами иметь корень $\sqrt{2}+\sqrt{3}$?

24.* Тот же вопрос для $\sqrt[3]{2}$.

25.* При каких a справедливо такое утверждение: для всех x из интервала $]-1, 1[$ выполнено неравенство $x^2+ax+\frac{1}{4}>0$?

Листок 5. Действительные числа: сложение.

Мы сформулируем сейчас несколько основных свойств (аксиом) действительных чисел и операций над ними, принимаемых без доказательства. Все остальные свойства мы будем доказывать, исходя из них.

Аксиомы сложения. Для любых двух чисел x и y определена их сумма, обозначаемая $x+y$. Для каждого числа x определено противоположное число, обозначаемое $-x$. Среди чисел имеется число ноль, обозначаемое 0. Выполнены такие свойства: для всех x, y и z

CI. $x+y=y+x$ (коммутативность)

C2. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (ассоциативность)

C3. $x+0=x$

C4. $x+(-x)=0$

Из этих аксиом можно вывести много разных следствий (теорем).

Пример. Теорема. $((a+b)+c)+d=a+(b+(c+d))$

Доказательство. $((a+b)+c)+d=(a+b)+(c+d)=a+(b+(c+d))$

Первое равенство следует из C2, если $x=a+b$, $y=c$, $z=d$, второе – если $x=a$, $y=b$, $z=c+d$.

Задачи.

I. $0+x=x$

2. $a+(b+c)=b+(a+c)$

3. (Правило сокращения.) Если $a+b=a+c$, то $b=c$.

4. Если $a+x=b$, то $x=(-a)+b$

5. Если $x+y=0$, то $x=-y$

6. $-(-x)=x$

7. $-(x+y)=(-x)+(-y)$

Обозначения. По аксиоме C2 можно писать $x+y+z$, не указывая порядка; по теореме из примера можно писать $x+y+z+u$, также не указывая порядка действий. Аналогично можно писать $a+b+c+d+e$ и т.д. Выражение $a+b-c+d-e$ означает $a+b+(-c)+d+(-e)$ и т.п. Из аксиом можно вывести такое

Правило раскрытия скобок. При раскрытии скобки, перед которой стоит знак $-$, знаки внутри скобки меняются на противоположные.

8. Обосновать правило раскрытия скобок в таком примере: $a-(b-c)=a-b+$

9. Вычислить I–(2–(3–(4–(5–(6–...–(I980–(I98I–I982))...)))))

IO*. Определим новую операцию $\oplus$, положив $a\oplus b=\dfrac{a+b}{1+ab}$

Выполнены ли свойства CI и C2 для такого "сложения"? Выполнено ли свойство $(a\oplus b)\oplus(c\oplus d)=((d\oplus a)\oplus c)\oplus b$?

II*. Придумать другие множества с операцией, обладающие свойствами CI – C4. Например, можно рассматривать числа, не равные нулю и считать "суммой" произведение. Что тогда нужно считать "противоположным" и "нулем", чтобы свойства CI – C4 были выполнены?

I2*. Петя утверждает, что вывел из свойств CI – C4 такое: если $x+x=0$, то $x=0$. Докажите, что его "вывод" содержит ошибку.

Листок 6. Действительные числа: умножение.

Аксиомы умножения. Для любых чисел x , y определено их произведение, обозначаемое xy . Для каждого числа x , не равного 0, определено обратное число, обозначаемое $\frac{1}{x}$. Среди чисел имеется число единица, обозначаемое I. При любых x , y и z

У1. $x \cdot y = y \cdot x$ (коммутативность)

У2. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (ассоциативность)

У3. $x \cdot 1 = x$

У4. Если $x \neq 0$, то $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

У5. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (дистрибутивность)

У6. $1 \neq 0,\ 1+1 \neq 0,\ 1+1+1 \neq 0, \ldots$

У7. $0 \cdot x = 0$

Задачи.

1. $((a \cdot b) c) \cdot d = a \cdot (b \cdot (c \cdot d))$

2. (Правило сокращения на ненулевое число) Если $x \cdot y = x \cdot z$ и $x \neq 0$, то $y = z$.

3. Если $x \cdot y = 0$, то $x = 0$ или $y = 0$.

4. Если $x \cdot y = 1$, то $\frac{1}{y} = x$.

5. Если $y = \frac{1}{x}$, то $x = \frac{1}{y}$.

6. $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

7. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

8. $a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$

Обозначения. Число $a \cdot \frac{1}{b}$ обозначается $\frac{a}{b}$. Это обозначение имеет смысл при $b \neq 0$. Если $a \neq 0$, то $ax = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$.

Правила действий с дробями (задачи 9 - 16)

9. (Равенство) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

10. (Сокращение) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, если $c \neq 0$.

11. (Сложение дробей с одним знаменателем) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

12. (Сложение дробей с разными знаменателями) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

13. (Вычитание) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

14. (Умножение) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

15. (Деление) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

16. (Равенство нулю) Пусть $b \neq 0$. Тогда $\frac{a}{b} = 0$ в том и только том случае, когда $a = 0$.

17*. Вывести У7 из аксиом У1 - У6 и аксиом С1 - С4.

18. Доказать, что если $x + x + x = 0$, то $x = 0$. (Указание. См. У6.)

Листок 7. Действительные числа: порядок.

Всякое действительное число, не равное нулю, либо положительно, либо отрицательно. Никакое число не может быть положительным и отрицательным одновременно. Ноль не является ни положительным, ни отрицательным. Выполняются такие свойства:

П1. Если x положительно, то $-x$ отрицательно. Если x отрицательно, то $-x$ положительно.

П2. Если x и y положительны, то $x+y$ и $x\cdot y$ положительны.

П3. Число 1 положительно.

Задачи.

1. Если x отрицательно, а y положительно, то $x\cdot y$ отрицательно. (Указание. См. свойство П1 .) Если x и y отрицательны, то $x\cdot y$ положительно.

2. Число x^2 не может быть отрицательным.

3. При всех x и y число x^2+y^2+1 положительно.

4. При всех x число x^2+2x+2 положительно.

5. Докажите, что если $(x-y)^2+(2x+y-3)^2=0$,то $x=1$, $y=1$.

6.* Вывести П3 из П1 и П2.

7.* Числа a , b , c , d , e , f не равны нулю. Доказать, что среди чисел ab , ac , bd , $-ce$, $-df$, $-ef$ есть хотя бы одно положительное и хотя бы одно отрицательное.

Определения. Число a больше b ($a>b$), если $a-b$ положительно. Число a меньше b ($a<b$), если $a-b$ отрицательно. Очевидно, всегда выполнено одно из трех: $a<b$, $a=b$, $a>b$; $a<b$ тогда и только тогда, когда $b>a$, $a>0$ тогда и только тогда, когда a положительно, $a<0$ тогда и только тогда, когда a отрицательно. Обозначения: $a\geqslant b$ означает " $a>b$ или $a=b$", $a\leq b$ означает " $a<b$ или $a=b$".

8. Если $a<b$, $b<c$, то $a<c$.

9. Если $a<b$, c – любое число, то $a+c<b+c$.

10. Если $a<b$, $c>0$ то $ac<bc$.

11. Если $a<b$, $c<0$ то $ac>bc$.

12. Если $a<b$, $c<d$, то $a+c<b+d$.

13. Если $a>0$, то $\frac{1}{a}>0$; если $a<0$, то $\frac{1}{a}<0$.

14. Если $a>b>0$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

15. Если $a<b$, $c<d$, то $a-d<b-c$

16. Если $a>b>0$, $c>d>0$ то $ac>bd$.

17. Если $x>0$, $y>0$, n – натуральное число, большее 0, то свойства $x>y$ и $x^n>y^n$ равносильны.

18. Известно, что $x^3=2$, $y^7=5$, $x,y>0$ Что больше: x или y ?

19. Если $x^{1983}>0$, то $x>0$.

20. Верны ли такие утверждения: а) $\frac{a}{b}\geqslant 0 \Rightarrow ab\geqslant 0$; б) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b} \Rightarrow a<b$; в) $a^2\leq b^2 \Rightarrow |a|\leq|b|$?

Листок 8. Действительные числа: доказательство неравенств.

Доказать, что при всех значениях переменных:

I. $a(a-b) \geqslant b(a-b)$. 2. $a^2 - ab + b^2 \geqslant ab$.

3. если $x > 0$, то $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. 4. если $a+b=1, a,b>0$, то $ab \leqslant \frac{1}{4}$.

5. если $0 \leqslant a \leqslant 1, b \geqslant 1$, то $a + b \geqslant 1 + ab$

6.* $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab + ac + bc$. 7.* если $a+b+c=1$, то $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

8. Доказать, что при любом $x > 0$ выполнено $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ а) при $n = 2$; б) при $n = 3$; в)* при любом натуральном n.

9.* Найти такое k, чтобы а) $(1,001)^k \geqslant 1983$ (Указание. См. задачу 8.); б) $(0.999)^n \leqslant 1/1983$.

I0. $[a]+[b] \leqslant [a+b]$ (напомним, $[x]$ – целая часть x).

II.* Доказать, что если $a \geqslant 1$, $b+c < a+1$, $c \geqslant b$, то $a > b$.

I2. (Неравенство Коши.) (А) Если $a, b > 0$, $ab = 1$, то $a+b \geqslant 2$. (Б)* Если $a, b, c > 0$, $abc = 1$, то $a+b+c \geqslant 3$. (Указание. Переставляя a, b, c можно считать, что $a \leqslant 1$, $b \geqslant 1$. Затем воспользуйтесь (А) и задачей 5.)

I3. Известно, что процент психов среди математиков больше, чем среди нематематиков. Доказать, что процент математиков среди психов больше, чем среди нормальных людей.

I4. Города A и B расположены на реке, $AB = l$. Катер, собственная скорость которого равна v, вышел из A вдоль по течению, дошел до B, повернул назад и вернулся в A. Доказать, что время, затраченное им, больше, чем $\frac{2l}{v}$ (время, необходимое, если течения нет)).

I5. Едет колонна автобусов. Автобус считается переполненным, если в нем едет более 50 пассажиров. Докажите, что процент пассажиров, едущих в переполненных автобусах, не маньше процента переполненных автобусов.

I6. Докажите, что площадь прямоугольника не больше площади квадрата с тем же периметром.

I7.* В трех сосудах налито по I л смеси кислоты с водой. Процентное содержание кислоты в них равно 20%, 40% и 70%. Какое наибольшее количество 50%-го раствора можно составить, смешивая их?

I8.* Найти такое n, чтобы $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > 1983$

I9.* Доказать, что при всех n $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 1$ (Указание. $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$)

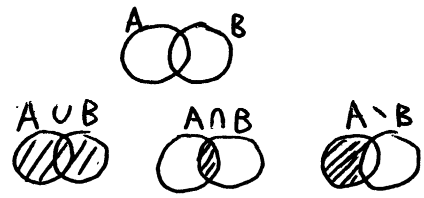
20. Известно, что сумма нескольких чисел равна I. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,00I ?

2I. Придумать десять чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ так, чтобы $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{10}$, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = 1$ и чтобы x_4 было как можно больше. (Докажите, что Ваш способ – наилучший!)

22. Доказать, что функция $x \longmapsto \frac{1+x}{1+2x}$, рассматриваемая на множестве $[0, +\infty[$ – убывающая.

Логика, множества, функции

Обозначения. Через $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ обозначаются объединение, пересечение и разность множеств A и B . $A \subset B$ означает, что любой элемент множества A является элементом множества B . $A = B$ означает, что $A \subset B$ и $B \subset A$.



1°. Какие из следующих утверждений верны для любых A , B , C ? (I) $(A \setminus C) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$; (2) если $A = B \cup C$, то $A \setminus B = C$; (3) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$; (4) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

2°. Пусть A – множество треугольников, стороны которых удовлетворяют соотношению $c^2 = a^2 + b^2$; B – множество треугольников, у которых угол, противолежащий стороне c , прямой. Верно ли, что $A \subset B$? Верно ли, что $B \subset A$? Какое из этих утверждений называется теоремой Пифагора?

3°. Известно, что всякий рекурсивный ординал конструктивен. Можно ли заключить из этого (не зная ничего более об ординалах), что всякий неконструктивный ординал нерекурсивен? что всякий нерекурсивный ординал неконструктивен?

4°. Контрольная называется легкой, если в каждом варианте каждую задачу решил хотя бы один ученик. Контрольная называется простой, если в каждом варианте есть ученик, который решил все задачи. Может ли легкая контрольная быть не простой? Может ли простая контрольная быть не легкой?

5. Предположим, что: (а) среди людей, имеющих телевизоры, не все являются малярами; (б) люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров. Следует ли отсюда, что (в) не все владельце телевизоров каждый день купаются в бассейне?

6°. Последовательность чисел a_1 , a_2 , ... называется <u>ограниченной</u>, если существует такое число C , что $|a_i| \leq C$ при всех i . Дать определение неограниченной последовательности, не употребляя слово "не".

7. Обозначим через $|X|$ число элементов множества X .

(а)° Найти $|A \cap B|$, если $|A| = 5$, $|B| = 7$, $|A \cup B| = 10$.

(б)* Найти $|A \cup B \cup C|$, если $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$, $|A \cap B| = p$, $|B \cap C| = q$, $|A \cap C| = r$, $|A \cap B \cap C| = t$.

8. Найти выражение (если такое есть), содержащее буквы A и B и знаки $\cup$, $\cap$, $\setminus$, чтобы при $A = \{0,1,2\}$ и $B = \{0,1,3\}$ оно было равно: (I) $\{2\}$; (2) $\{0,1\}$; (3) $\{2,3\}$; (4) $\{1,3\}$.

9.** Дано 10 множеств. Подсчитаем число k различных множеств, которые можно получить из этих 10 многократным применением операций $\cup$, $\cap$ и $\setminus$ (в любом порядке и количестве). В зависимости от выбора исходных множеств число k может принимать разные значения. Указать все возможные значения k .

Напомним, что функция $f: A \to B$ называется вложением, если $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$, и наложением, если для любого $y \in B$ существует $x \in A$, при котором $f(x) = y$. Функция, являющаяся одновременно вложением и наложением, называется взаимно однозначной.

Пусть $f: A \to B$, $A_1 \subset A$. Назовем образом множества A_1 множество всех элементов вида $f(x)$ при всех $x \in A_1$. Пусть $f: A \to B$, $B_1 \subset B$. Назовем прообразом множества B_1 множество всех тех $x \in A$, для которых $f(x) \in B_1$.

I0. Какие из следующих утверждений верны, если $f: A \to B$, $A_1, A_2 \subset A$, $B_1, B_2 \subset B$?

(I) образ $(A_1 \cap A_2)$ = образ $A_1 \cap$ образ A_2;
(2) образ $(A_1 \cup A_2)$ = образ $A_1 \cup$ образ A_2;
(3) прообраз $(B_1 \cap B_2)$ = прообраз $B_1 \cap$ прообраз B_2;
(4) прообраз $(B_1 \cup B_2)$ = прообраз $B_1 \cup$ прообраз B_2;
(5) если f – вложение, то прообраз (образа A_1) = A_1;
(6) если f – наложение, то прообраз (образа A_1) = A_1.

Композицией функций $f: A \to B$ и $g: B \to C$ называется функция $g \circ f: x \mapsto g(f(x))$

II.° Найти композицию $g \circ f$, если: (I) $f: x \mapsto 2x - 3$, $g: x \mapsto 1/(x-1)$; (2) $g: x \mapsto 2x - 3$, $f: x \mapsto 1/(x-1)$; (3) $f: x \mapsto 1/(x-a)$, $g: x \mapsto 1/(x-b)$

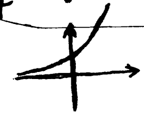
I2. Функии вида $x \mapsto ax + b$ называются линейными, вида $x \mapsto ax^2 + bx + c$ – квадратичными, вида $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$ – дробно-линейными. Верно ли, что (I) композиция двух линейных функций линейна; (2) двух квадратичных функций – квадратична; (3) двух дробно-линейных функций – дробно-линейна?

I3. Пусть $g(x) = ax + b$ и $f(x) = 2x + 1$. При каких a и b функции f и g коммутируют, то есть $f \circ g = g \circ f$?

I4. Тот же вопрос, что в I3, если $f(x) = x^2$, $g(x) = ax + b$.

Если $f: A \to B$ – взаимно однозначная функция, то имеется единственная обратная функция $g: B \to A$, для которой $g(f(x)) = x$ при всех $x \in A$ и $f(g(y)) = y$ при всех $y \in B$. Она обозначается f^{-1}.

I5. (а)° Пусть $A = \mathbb{R}$, $B = \{x \mid x > 0\}$, график f изображен на рисунке. Построить график f^{-1}.



(б) Пусть $f: A \to B$, $g: B \to A$, $g(f(x)) = x$ при всех $x \in A$. Можно ли утверждать, что f взаимно однозначна и $g = f^{-1}$?

I6.** Найти I0 различных дробно-линейных функций f, для которых $f(f(x)) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$, кроме конечного числа.

№ I7.* Если функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ взаимно однозначна и $f \neq id$ (через id обозначается тождественная функция, для которой $id(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{N}$), то найдется такое n, что $f(n) < n$.

I8.* Пусть $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ – взаимно однозначная функция. Доказать, что для любых рациональных p и q, для которых $p < q$, найдется такое рациональное $x \in]p,q[$, что $f(x) > 1983$

19.** Доказать, что любая функция $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ может быть представлена в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, где f_1, f_2 и f_3 – взаимно однозначные функции из $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{Q}$.

20.** Существует ли взаимно однозначная функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, для которой $f(2x+1) = 3f(x)+1$ при всех $x \in \mathbb{N}$?

21. Пусть A, B – числовые множества. Говорят, что функция $f: A \to B$ строго возрастает, если $f(x') > f(x)$ при $x' > x$. Существует ли взаимно однозначная строго возрастающая функция $f: A \to B$, если: (а)* $A = \mathbb{R}$, $B = [0,1]$; (б)* $A = \mathbb{Q}$, $B =]0,1[\cap \mathbb{Q}$; (в)** $A = \mathbb{Q}$, B = множество всех чисел, разлагающихся в конечную десятичную дробь, т.е. чисел вида $m/10^k$, где $m \in \mathbb{Z}$.

22.** На плоскости нарисовано бесконечное число точек; некоторые пары точек соединены линиями. Доказать, что либо существует бесконечное множество точек, любые два элемента которого соединены линией, либо существует бесконечное множество точек, никакие два элемента которого не соединены линией.

23.** Все конечные последовательности 0 и I разбиты на 2 класса. Доказать, что любую бесконечную последовательность 0 и I можно разрезать на такие куски, что все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежат одному классу.

24.* Доказать, что из II любых бесконечных десятичных дробей можно выбрать две такие, которые совпадают в бесконечном числе разрядов.

25.* Пусть X – конечное множество, $f: X \to X$. Доказать, что существует такое n, что $f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n раз) имеет неподвижную точку (такую точку x, что $f \circ f \circ \ldots \circ f(x) = x$).

26.* Если f – взаимно однозначное отображение конечного множества, то найдется такое n, что $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n} = id$

27.* Найти все: а) линейные б) возрастающие функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых $f \circ f(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

28.** Найти все дробно-линейные функции f (т.е. функции вида $x \longmapsto (ax+b)/(cx+d)$), для которых $f(f(x)) = x$ для всех x, кроме конечного числа.

29.** Придумать два бесконечных множества натуральных чисел A и B так, чтобы любое натуральное число представлялось единственным образом в виде суммы $a+b$, где $a \in A$, $b \in B$.

30.** Доказать, что всякое отображение $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, для которого $f(x+y) = f(x) + f(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{Q}$ имеет вид $x \longmapsto ax$ при некотором $a \in \mathbb{Q}$.

Равномощность множеств.

Определение. Множества A и B <u>равномощны</u>, если существует взаимно однозначная функция $f: A \to B$. Множество A <u>счетно</u>, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$.

1°. Доказать равномощность интервала $]0,1[$ и прямой $\mathbb{R}$.

2°. Доказать равномощность интервала $]0,1[$ и отрезка $[0,1]$. (Если эта задача окажется трудной, см. ниже задачу № 9)

3°. Доказать счетность множества $\mathbb{Z}$ целых чисел и множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

4°. Доказать счетность множества всех конечных последовательностей натуральных чисел.

5. Доказать равномощность множества A_{01} всех бесконечных последовательностей 0 и 1 и множества A_{0123} всех последовательностей из 0,1,2,3.

Как говорят, отношение "быть равномощными" является <u>отношением эквивалентности</u>. Это означает, что оно <u>рефлексивно</u> (каждое множество равномощно самому себе), <u>симметрично</u> (если A равномощно B, то B равномощно A) и <u>транзитивно</u> (если A равномощно B, B равномощно C, то A равномощно C).

6. (а)° Объединение двух счетных множеств счетно. (б)° Объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ счетного числа счетных множеств A_i счетно.

7°. Бесконечное подмножество счетного множества счетно.

8°. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

9°. Доказать, что если A бесконечно, а B конечно или счетно, то $A \cup B$ равномощно A. (Указание. Использовать 8.)

10°. Доказать, что множества $[0,1]$ и $[0,1] \cup [2,3]$ равномощны.

11. Доказать, что если A и B счетны, то множество $A \times B$, состоящее из всех пар $\langle a, b \rangle$ с $a \in A$, $b \in B$, счетно.

12. Доказать, что множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно.

13*. Имеется некоторое множество непересекающихся интервалов, вложенных в отрезок $[0,1]$. Доказать, что оно конечно или счетно.

Счетные множества являются "наименьшими" среди бесконечных множеств. Следующая задача показывает, что далеко не все бесконечные множества счетны.

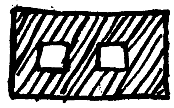
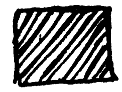
14*. Доказать, что множество A_{01} всех бесконечных последовательностей 0 и 1 несчетно. (<u>Указание</u>. (Желающие решать задачу сами не должны его читать!) Пусть это множество счетно и мы занумеровали все последовательности 0 и 1: первая, вторая,... Как теперь построить последовательность, которую мы пропустили? Постройте последовательность, которая отличается от i-ой на i-ом месте.)

Множества, равномощные множеству всех бесконечных последовательностей 0 и I, называются множествами мощности континуума.

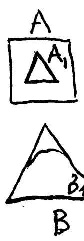
I5.* Доказать, что множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$ имеет мощность континуума.

I6.* Доказать, что множество $A_{01} \times A_{01}$ имеет мощность континуума.

I7.* Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей 0,I,2 имеет мощность континуума.

I8.* Доказать, что множества  и  равномощны.

При решении задач I7 и I8, так же как и в некоторых следующих задачах, может оказаться полезной такая



Теорема (Кантор, Бернштейн) Пусть A и B – два множества. Если A равномощно некоторому подмножеству B_I множества B, а B равномощно некоторому подмножеству A_I множества A, то множества A и B равномощны.

Эта теорема довольно трудная. Ей разрешается пользоваться без доказательства. См. также задачу 26.

I9.** Доказать, что $[0, 1]$ имеет мощность континуума. (Принять без доказательства, что каждое действительное число от 0 до I однозначно задается бесконечной десятичной дробью, не имеющей 9 в периоде.)

20.** Доказать, что квадрат (внутренность $\cup$ граница) имеет мощность континуума.

2I.* Доказать, что если X и Y имеют мощность континуума, то множества $X \cup Y$ и $X \times Y$ имеют мощность континуума.

22.* Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуума.

23.**Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел имеет мощность континуума.

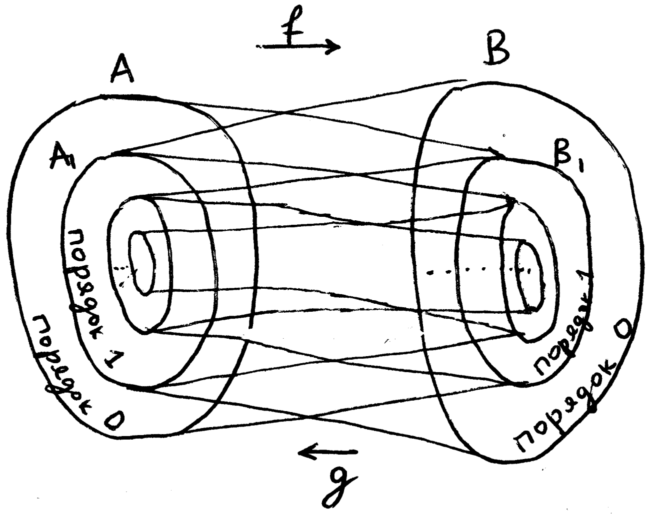
24.**Доказать, что если квадрат представлен в виде объединения двух множеств X и Y, то хотя бы одно из них имеет мощность континуума.

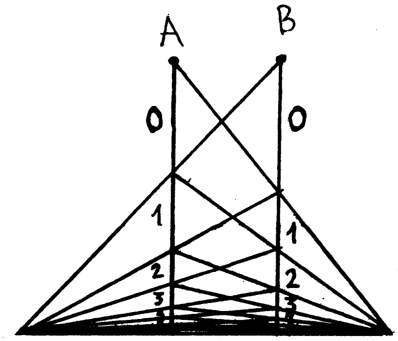
Следующая теорема показывает, что для любого множества A можно построить множество "большей" мощности (смысл слова "больше" мы пока не уточняем).

25.**Теорема Кантора. Докажите, что множество A и множество $\mathcal{P}(A)$ всех подмножеств множества A не равномощны, каково бы ни было множество A . (Указание. Пусть f – вложение A в $\mathcal{P}(A)$; покажите, что f – не наложение, рассмотрев множество $\{x \mid x \notin f(x)\}$.)

Частным случаем этой теоремы является утверждение задачи I4. (Почему

26.** Докажите теорему Кантора – Бернштейна. Указание. Пусть $f: A \to B_1 \subset B$ и $g: B \to A_1 \subset A$ – взаимно однозначные функции. Пусть $x \in A$. Определим последовательность $x_0, x_1, \ldots$ положив $x_0 = x$, $x_1 =$ прообраз x_0 при отображении g, $x_2 =$ прообраз x_1 при отображении f, $x_3 =$ прообраз x_2 при отображении g и т.д. Если построение оборвется на n-ом шаге, то есть если x_{n+1} построить не удастся, будем называть n порядком элемента x. Если построение будет продолжаться неограниченно долго, то назовем x элементом бесконечного порядка. Пусть $A_{чет}$, $A_{неч}$ и $A_{бес}$ – множества элементов четного, нечетного и бесконечного порядков (соответственно) в A, а $B_{чет}$, $B_{неч}$ и $B_{бес}$ – аналогичным образом определенные подмножества в B. Докажите, что f устанавливает взаимно однозначное соответствие между $A_{чет}$ и $B_{неч}$, g – между $B_{чет}$ и $A_{неч}$, и любая из функций f и g – между $A_{бес}$ и $B_{бес}$. Выведите отсюда утверждение теоремы Кантора – Бернштейна.





27.** Назовем <u>восьмеркой</u> объединение двух касающихся (внешним образом) окружностей. Пусть на плоскости задано множество восьмерок, никакие две из которых не пересекаются. Доказать, что это множество конечно или счетно.

28.** Имеется счетное множество A и некоторое семейство подмножеств этого множества. Может ли оно быть несчетным, если:

(а) любые два элемента семейства имеют конечное пересечение;

(б) для любых двух элементов X, Y семейства $X \subset Y$ или $Y \subset X$;

(в) для любых двух элементов X, Y семейства множество $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ конечно ?

29.** Доказать, что множество всех функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ несчетно и не имеет мощности континуума.

Целые числа

I. Делимость.

Напоминания. (Буквы a, b... обозначают целые числа.) Говорят, что a <u>делится на</u> b, если существует такое c, что $a = b \cdot c$. Вместо " a делится на b " говорят также " a <u>кратно</u> b ", " b <u>делит</u> a ", " b – <u>делитель</u> a ". Пишут так: $a \vdots b$ (читается: a делится на b) и $a \not\vdots\, b$ (a не делится на b).

Верны ли такие утверждения (задачи I – 2):

I. (а) Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $a+b \vdots c$ и $a-b \vdots c$. (б) Если $a \not\vdots\, c$ и $b \not\vdots\, c$, то $a+b \not\vdots\, c$. (в) Если $a \not\vdots\, c$ и $b \vdots c$, то $a+b \not\vdots\, c$. (г) Если $ab \vdots c$, то $a \vdots c$ или $b \vdots c$.

2. (а) Если $a \vdots$ I5, $b \vdots$ 2I, то $ab \vdots$ 3I5 (=I5·2I). (б) если $a \vdots$ I5, $a \vdots$ 2I, то $a \vdots$ 3I5.

Докажите (задачи 3 – 6), что

3. Если $a^2 \vdots (a+b)$, то $b^2 \vdots (a+b)$ (Указание. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.)

4. При любом n число $n(n+1)$ четно (=делится на 2).

5. При любых a и b число a^3+b^3 делится на $a+b$.

6*. При любых n число $7^{2n} - 4^{2n}$ делится на 33.

7*. Число a четно и не делится на 4. Доказать, что количество четных делителей числа a равно количеству нечетных делителей числа a (Указание: установить взаимно-однозначное соответствие между чётными и нечётными делителями

2. Остатки.

Напоминания. Пусть a, b – любые (целые) числа, $b > 0$. Число a можно разделить с остатком на b, то есть представить в виде $a = k \cdot b + r$, где $0 \le r < b$. Такое представление единственно. Здесь k называется <u>неполным частным</u>, r – <u>остатком</u>.

Пример. Числа 25 и –5 дают при делении на 6 остаток I.

I. Нарисовать все числа от – 20 до 20, дающие остаток 2 при делении на 7.

2. Найти остаток от деления числа (– I50) на I9.

3. При делении I00 на a получили остаток 6. [redacted] a? (Дать обоснованный ответ.) (Чему может быть равно

4. Доказать, что (остатки от деления a и b на c равны) $\Leftrightarrow (a - b \vdots c)$

5. Доказать, что числа n и $100n$ дают одинаковые остатки при делении на II.

6. (а) Число a дает при делении на 5 остаток 2, число b – остаток 4. Какие остатки дают (при делении на 5) числа $a+b$ и $a \cdot b$ (ответ и обоснование)?

(б) Заполнить таблицы, указывающие остатки от деления на 5 чисел $a+b$ и $a \cdot b$ (остатки от деления a и b указаны по горизонтали и вертикали).

$b \backslash a$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Целые числа – 2

Остатки (продолжение)

(в) Какие остатки могут давать точные квадраты при делении на 5 ? (г)* Доказать, что a^5 и a дают одинаковые остатки при делении на 5. (д) Пользуясь таблицей, докажите, что если $ab \vdots 5$, то $a \vdots 5$ или $b \vdots 5$.

Задача 6 показывает, что для нахождения остатков от деления $a+b$ и $a \cdot b$ на 5 не нужно знать сами a и b : достаточно знать их остатки. (Разумеется, 5 можно заменить на любое число.)

7. Доказать, что любое натуральное число дает такой же остаток при делении на 9, как и сумма его цифр. Вывести отсюда признаки делимости на 9 и на 3.

8. Найти остаток от деления $3n^2+8n+5$ на n при n = I, 2, 3, 4,...

9. Найти остаток (а) от деления 3^{100} на 7; (б) от деления 8^{100} на 7.

I0. Было 7 кусков бумаги. Некоторые из них разрезали на 7 кусков. После этого некоторые из получившихся кусков снова разрезали на 7 кусков и так сделали несколько раз. Могло ли получиться I983 куска?

II. Какой остаток дает число n^2+3n+5 при делении на $n+1$ при n = 0, I, 2, 3,...?

I2. Доказать, что из любых 8 целых чисел можно выбрать 2 таких, что их разность делится на 7.

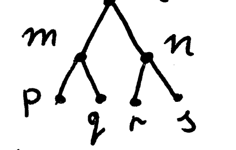
I3. (а) Верно ли, что из любых I00 чисел можно выбрать I5 таких, что разность любых двух из выбранных делится на 7 ? (б) Тот же вопрос для I6 чисел вместо I5. (в) Верно ли, что из I00 чисел всегда можно выбрать 2 таких, у которых сумма делится на 7 ?

I4. Может ли число делиться на 8, а при делении на I2 давать остаток I0 ?

I5.* Даны I982 числа. Доказать, что можно выбрать несколько из них так, чтобы сумма выбранных делилась на I982.

3. Простые числа.

Напоминания. Положительное число p называется простым, если у него нет делителей, кроме ± 1 и $\pm p$ и $p \neq 1$ (Таким образом, I не считается простым числом.) Число, не являющееся простым и не равное I, называется составным. Всякое положительное число можно разложить в произведение простых: если a не простое, то a имеет делитель m , т.е. $a = m \cdot n$; можно считать $m, n > 0$; если



m и n уже простые, то все доказано, если нет, то разложим их дальше и т.д. (Процесс кончится, так как числа уменьшаются!) Как мы докажем впоследствии (п. 6), разложение на простые множители однозначно (любые два разложения одного и того же числа отличаются лишь порядком сомножителей).

I. Найти все простые p, при которых $p+1$ – простое.

2. Петя придумал новую теорему: при всех $n \geqslant 0$ число n^2+n+41 простое. Верна ли его теорема?

3. (а) Найти все простые p, для которых $p+2$ и $p+4$ тоже простые. (б)* Найти все простые p, для которых $p+2$ – простое.

4. Найти все простые p, для которых $p+1$ – точный квадрат.

5. Докажите, что четырехзначное число, не имеющее (одно- и) двузначных делителей, кроме ± 1, простое.

6. (а) Докажите, что числа I00!+2, I00!+3,..., I00!+I00 составные. (I00! = I·2·...·I00). (б) Докажите, что для всякого N имеется N подряд идущих составных чисел.

7*. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 есть простое число или I.

8. (а) Постройте число, которое дает остаток I при делении на любое из чисел от 2 до I00. (б) (Евклид) Докажите, что простых чисел бесконечно много. (Указание. Пусть все простые числа меньше N. Рассмотрите число, дающее остаток I при делении на все числа от 2 до N и получите противоречие.)

4. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа.

Пусть a, b – целые числа. Число d называется общим делителем чисел a и b, если $a \vdots d$, $b \vdots d$. Наибольшее из таких d обозначается НОД(a, b) и называется наибольшим общим делителем чисел a и b. (Если $a = b = 0$, то все числа являются общими делителями a и b и НОД(a, b) не определен.) Числа a и b называются взаимно простыми, если НОД(a, b) = I (т.е. если у a и b нет общих делителей, кроме ± 1).

I. Докажите, что если НОД(a, b) = d, то числа a/d и b/d целые и взаимно просты.

2. Чему равен НОД(a, b), если $a \vdots b$?

3. На числовую ось нанесите точки x, для которых НОД$(x, 12)=2$.

4. Какое наибольшее количество одинаковых букетов можно составить из (а) 24 белых и 40 красных георгинов; (б) m белых и n красных георгинов?

5. Докажите, что (а) числа n и $n+1$; (б) числа $n+1$ и $2n+3$ взаимно просты. (Указание. $2n+3 = 2(n+1)+1$.)

6. Доказать, что НОД(a, b) = НОД($a - b$, b).

7. Доказать, что если $1982a = 1983b + 1$, то a и b взаимно просты.

8* Доказать, что любые два числа в последовательности $2 + 1, 2^2 + 1, 2^4 + 1, 2^8 + 1, 2^{16} + 1, \ldots$ взаимно просты. (Указание. $(2^8 - 1) = (2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)$.)

5. Алгоритм Евклида.

Основная лемма. Пусть $a, b > 0$, a дает при делении на b остаток r. Тогда НОД(a, b) = НОД(b, r).

Набросок доказательства. Достаточно доказать, что любой общий делитель пары (a, b) является общим делителем пары (b, r) и наоборот. В самом деле, если $a = bq + r$, $a \vdots d$, $b \vdots d$, то $r = a - bq \vdots d$. Обратно, если $r \vdots d$, $b \vdots d$, то $a = bq + r \vdots d$.

Алгоритм Евклида. Будем называть преобразованием Евклида переход от пары (a, b) с $a > b > 0$ к паре (b, r), где r - остаток от деления a на b. Согласно Основной лемме, преобразование Евклида не меняет наибольшего общего делителя. Поэтому при поисках НОД(a, b) можно использовать преобразование Евклида и искать НОД получившейся пары.

Пример. $(42,30) \longrightarrow (30,12)$ (остаток от деления 42 на 30 равен 12)
$(30,12) \longrightarrow (12,6)$ (остаток от деления 30 на 12 равен 6)
$(12,6) \longrightarrow (6,0)$ (остаток от деления 12 на 6 равен 0)

Поэтому НОД(42,30) = НОД(30,12) = НОД(12,6) = НОД(6,0) = 6.

1. Найти НОД(525,231).

2. Над прямоугольником со сторонами a и b, $a > b$, разрешается делать такую операцию: отрезать квадрат со стороной b. (а) На какие квадраты будет разрезан прямоугольник $141 \cdot 324$ в результате многократного применения этой операции? (б) Доказать, что любой прямоугольник с целыми сторонами будет в конце концов разрезан на квадраты, и найти сторону наименьшего из них. (в)* Верно ли, что любой прямоугольник (не обязательно с целыми сторонами) будет в конце концов разрезан на квадраты?

3. Имеются две большие бочки с водой и две банки на 210 г и 370 г воды. Разрешается наполнять банку в одной бочке и выливать в другую. Используя результаты применения алгоритма Евклида ($(370, 210) \to (210,160) \to (160,50) \to (50,10)$), придумать способ перелить из первой бочки во вторую 160 г, 50г, 10 г. Можно ли с помощью наших банок перелить 75 г ?

4. Блоха прыгает по прямой, совершая короткие прыжки (21 см) и длинные (37 см). Используя алгоритм Евклида, найдите способы, позволяющие блохе сдвинуться на 16 см, 5 см и 1 см.

5. При дележе добычи два фальшивомонетчика, печатавшие бумажки по 2I руб. и 37 руб., решили, что один из них должен другому I руб. Как им рассчитаться, если у обоих есть только напечатанные ими деньги ?

6. Теоретические следствия алгоритма Евклида. Основная теорема арифметики.

I. Пусть $a, b > 0$, d – общий делитель чисел a и b. (а) Докажите, что все числа, получающиеся при применении алгоритма Евклида к паре (a , b), делятся на d . (б) Докажите, что НОД(a , b) делится на d . Из доказанного вытекает такая

Теорема I. Наибольший общий делитель делится на любой другой общий делитель.

2. Пусть $a, b > 0$. Назовем число c хорошим, если можно найти такие целые x и y , что $c = xa + yb$. Таким образом, c хорошее, если

- ковшами в a литров и b литров можно перелить из одной бочки в другую c литров;
- блоха, делающая прыжки в a метров и b метров, может сдвинуться на c метров;
- человек, имеющий только купюры в a рублей и b рублей, может уплатить c рублей другому, у которого имеются такие же купюры.

Докажите, что (I) Числа a и b хорошие; (2) все числа, встречающиеся при применении алгоритма Евклида к (a , b), хорошие; (3) НОД(a , b) – хорошее; (4) все числа, кратные НОД(a , b) – хорошие; (5) всякое хорошее число кратно НОД(a , b). Таким образом, верна

Теорема 2. (Существуют x и y , для которых $c = xa + yb$) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (c кратно НОД(a , b)).

Следствие. Если a и b взаимно просты, то существуют x и y , для которых $xa + yb = 1$

3. Докажите, что если $ab \vdots c$ и a взаимно просто с c , то $b \vdots c$, используя следствие из теоремы 2. (Указание. $b = b \cdot 1$; представьте I в виде суммы, пользуясь взаимной простотой a и c .)

4. Докажите, пользуясь утверждением задачи 3, что (а) если $ab \vdots p$ p – простое, то $a \vdots p$ или $b \vdots p$. (б) если $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \vdots p$ p – простое, то $a_i \vdots p$ при некотором i .

5. Докажите единственность разложения на простые множители: если $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_m$, то списки $p_1 \ldots p_n$ и $q_1, \ldots, q_m$ состоят из одних и тех же чисел в одинаковом количестве и отличаются лишь порядком. (Указание. Если это не так, то после сокращения всего общего в $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_m$ мы придем к противоречию с утверждением задачи 4.)

Утверждение о существовании и единственности разложения на множители называется "Основной теоремой арифметики". Оно используется в задачах 6 - 9.

6. Доказать, используя утверждение задачи 5, что если $a \vdots b$, $a \vdots c$, b и c взаимно просты, то $a \vdots bc$.

7*. Известно, что $x^m = y^n$, НОД(m, n) = I. Докажите, что существует такое z, что $x = z^n$, $y = z^m$.

8*. Докажите, что произведение наибольшего общего делителя чисел a и b и наименьшего (положительного) общего кратного этих же чисел равно $|ab|$.

9*. Докажите, что (а) если p - простое число, то не существует таких (целых) m и n, что $(m/n)^2 = p$; (б) если a - целое число, не являющееся точным квадратом, то не существует таких m и n, что $(m/n)^2 = a$.

7*. Идеалы.

В этом разделе даются другие доказательства теорем I, 2.

Определение. Множество $I \subset \mathbb{Z}$ называется идеалом, если выполнены такие свойства: (И1) $x, y \in I \Rightarrow x+y,\ x-y \in I$

(И2) $x \in I$, n - любое целое число $\Rightarrow nx \in I$.

Примеры идеалов: $\{0\}$, $\mathbb{Z}$, множество четных чисел.

I. Докажите, что если I и J - идеалы, то $I \cap J$ и $I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$ - идеалы.

2. Докажите, что для любого идеала I найдется такое число c, что I = (множество всех кратных числа c). Такое c называется образующей идеала I.

3. Пусть $I = \{x \mid x \vdots a \text{ и } x \vdots b\}$. Докажите, что I - идеал. Пусть c - его образующая. Докажите, что (I) c - общее кратное a и b; (2) если c' - любое общее кратное a и b, то c' кратно c. Таким образом, $|c|$ есть наименьшее общее кратное. Мы получаем также, что

Любое общее кратное двух чисел делится на их наименьшее общее кратное.

4. Пусть $I = \{xa + yb \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Докажите, что I - идеал. Пусть d - его образующая. Докажите, что (I) d - общий делитель a и b; (2) если d' - любой общий делитель a и b то $d \vdots d'$. (Таким образом, мы получаем, что $|d|$ = НОД(a, b). Выведите отсюда утверждения теорем I и 2 раздела 6.

5. Пусть $ab \vdots c$ и a взаимно просто с c. Докажите, что $b \vdots c$, рассмотрев идеал $\{x \mid xb \vdots c\}$, установив, что он содержит a и c и что его образующая равна I. (Тем самым получено новое решение задачи 3 раздела 6.)

8. Решение уравнений в целых числах.

I. Пользуясь утверждением задачи 3 раздела 6, найдите все целочисленные точки (точки, обе координаты которых целые) на прямой $ax = by$, если (а) $НОД(a,b) = 1$; (б) $НОД(a,b) = d$.

2. Докажите, что если $c \not\vdots НОД(a,b)$, то на прямой $ax+by=c$ нет целочисленных точек, а если $c \vdots НОД(a,b)$, то они есть.

Задача 2 позволяет определить, имеет ли уравнение $ax+by=c$ целочисленные решения. Следующая задача показывает, как их найти. Можно считать, что НОД(a, b) = I (если нет, сократим все члены уравнения на НОД(a, b)).

3. Пусть НОД(a, b) = I. Тогда уравнение $ax+by=c$ имеет бесконечно много целочисленных решений; если x_0, y_0 - одно из них, то все другие можно найти по формулам $x = x_0 + bt$, $y = y_0 - at$ (Докажите.)

4. Найти все решения уравнения $21x - 37y = 1$ (Указание. См. предыдущую задачу и задачи 3 - 5 из раздела 5.)

5. Найти все решения уравнения $21x - 37y = 1982$

6*. Найти все решения уравнений: (а) $105x + 42y = 56$; (б) $-70x + 408y = 34$.

7*. Имеются контейнеры весом I30 кг и I60 кг. Нужно полностью загрузить ими грузовик грузоподъемностью в 3 тонны. Как это можно сделать (указать все решения)?

8*. Найти общую формулу для чисел, дающих остаток 7 при делении на I5 и остаток I2 при делении на 25.

9*. Отметим на числовой прямой точки, дающии при делении на I2 остаток 5, синим карандашом, а точки, дающии при делении на I8 остаток I3 - красным. Каково будет наменьшее расстояние между красной и синей точками?

9*. Разные задачи.

I. Докажите, что если числа a, b, c не имеют (не равного ± 1) общего делителя (т.е. числа, на которое все они делятся), то существуют такие x, y, z, что $xa + yb + zc = 1$.

2. Доказать, что НОД($2^m - 1$, $2^n - 1$) = $2^{НОД(m,n)} - 1$.

3. (Китайская теорема об остатках.) Пусть $a_1, \dots, a_n$ - попарно взаимно простые положительные числа, $0 \le r_1 < a_1, \dots, 0 \le r_n < a_n$. Доказать, что существует число A, дающее при делении на a_1 остаток r_1, при делении на a_2 остаток r_2 и т.д.

4. Пусть применение алгоритма Евклида к паре (a, b) с $a > b$ продолжается n шагов (последним считается тот, в котором остаток равен нулю). Доказать, что a не меньше n-го члена последовательности Фибоначчи 2,3,5,8,I3... (каждый член равен сумме двух предыдущих).

5. Имеется 35 целых чисел. Разрешается одновременно прибавить к любым 23 из них по I. Доказать, что, повторяя эту операцию, можно сделать все числа равными.

6. (Малая теорема Ферма.) Пусть p - простое число, $a \not\vdots\, p$. Доказать, что $a^{p-1} - 1 \;\vdots\; p$

7. Назовем положительное целое число хорошим, если оно есть сум а двух точных квадратов. (Например, $5 = 2^2+1^2$ и $9 = 3^2+0^2$ - хорошие, а 7 - нет.) Докажите, что (а) произведение двух хороших чисел - хорошее; (б) простые числа, дающие остаток 3 при делении на 4 - не хорошие; (в) простые числа, дающие остаток I при делении на 4 - хорошие.

8. Найти все "пифагоровы тройки", то есть все тройки целых чисел x, y и z , для которых $x^2 + y^2 = z^2$.

9. Доказать, что произведение любых n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.

IO. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел, дающих остаток (а) 3 ; (б) I при делении на 4.

Целые числа: еще несколько задач.

1 — I. В треугольнике каждое число равно сумме трех стоящих над ним. Доказать, что в каждой строке, начиная с третьей, есть четное число.

I
I I I
I 2 3 2 I
I 3 6 7 6 3 I

1/3 — 2. а) Доказать, что при всяком целом К число $K^7 - K$ делится на 7.
б) Доказать, что при всяком целом К и простом р число $K^p - K$ делится на р

2 — 3. Доказать, что число I + I/2 + I/3 +...+ I/К не является целым ни при каком натуральном К.

1 — 4. Доказать, что если Р – простое число, большее 3, то число P^2 дает при делении на 24 остаток I.

4 — 5. Доказать, что если $A_I, \dots, A_P$ – целые числа, то произведение всех дробей вида $(A_K - A_M)/(K-M)$ – целое число. (В произведение входят дроби при всех К,М, при которых $I \leq M < K \leq P$.)

2 — 6. Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел в сумме с единицей всегда дает точный квадрат.

3 — 7. Имеется IOI целое положительное число, все они не больше 200. Доказать, что среди них можно выбрать два числа, одно из которых делится на второе.

3 — 8. Шахматист играет не менее одной партии в день и не более двенадцати в неделю. Доказать, что можно найти несколько таких дней, **идущих подряд**, за которые он сыграет ровно 20 партий.

3 — 9. Доказать, что $t_1 + \dots + t_n = [\frac{n}{1}] + \dots + [\frac{n}{n}]$ где t_i – число делителей целого числа i , а $[A]$ – целая часть A .

3 — IO. Обозначим через (А) ближайшее к А целое число (если их два, то берем большее). Доказать, что если N – натуральное число, то

$$N = (\tfrac{N}{2}) + (\tfrac{N}{4}) + (\tfrac{N}{8}) + \dots$$

(сумма продолжается, пока не кончатся ненулевые слагаемые).

II. Найти четырехзначное число вида $\overline{AABB}$, являющееся точным квадратом.

1/3 — I2. Найти все пары целых чисел x , y , для которых:
а) $xy = x + y$; б) $1/x + 1/y = 1/14$

2 — I3. Числа А и В целые, причем $A^2+B^2 \vdots 2I$. Доказать, что $A^2 + B^2 \vdots 44I$ $(= 2I^2)$.

2 — I4. Числа p и q простые. Сколько существует натуральных чисел от 1 до pq , взаимно простых с pq ?

3 — I5. Доказать, что $n! \not\vdots\, 2^n$ при $n > 2$.

2 — I6. Доказать, что существует число вида III...III, делящееся на I983.

2 — I7. Пронумеруем подряд все простые числа, начиная с числа 5 (считая его первым). Доказать, что каждое число будет больше своего утроенного номера.

3 — I8. Доказать, что любое рациональное число между 0 и I можно представить как сумму обратных величин различных целых чисел.

2 I9. Числа P и 2P + I – простые, P больше 3. Доказать, что число 3P + I – составное.

1 20. Доказать, что уравнение AX + BУ = AB не имеет решений в целых положительных числах, если A и B – взаимно простые целые положительные числа.

3 2I. Доказать, что среди I6 последовательных натуральных чисел всегда есть число, взаимно простое с остальными, а среди I7 – не всегда.

1 22. Доказать, что если между цифрами числа I33I вставить по равному количеству нулей, то получится точный куб.

2 23. Доказать, что выражения 2X + 3У и 9X + 5У делятся на I7 при одних и тех же целых числах X и У.

1 24. Найти все натуральные числа K, при которых число $2^K + I$ делится на 3.

1 25. Доказать, что если A и B – положительные целые числа, то число членов последовательности A, 2A, 3A,..., BA , делящихся на B, равно НОД(A,B).

1 26. Доказать, что при любом натуральном K число $5^K + 2 \cdot 3^{K-I} + I$ делится на 8.

5 27. По кругу написано 2^K целых чисел. С ними многократно проделывают такую операцию: между каждыми двумя числами пишут их сумму, а исходные числа стирают. Доказать, что через некоторое время останутся только четные числа. (Рассмотрите сначала малые значения к .)

I	3 4	7	I6 I8
2 3	6 7	9 II	22 24
4		I3	

к=2
Пример к задаче 27

4 28. В ряд выписаны 2^K натуральных чисел. Известно, что если выписать все простые множители этих чисел, то среди них будет не более K различных. Доказать, что из данного ряда можно выбрать несколько стоящих подряд чисел так, чтобы их произведение было точным квадратом.

2 29. При каких K число (K – I)! не делится на K ?

3 30. Пусть a , b , c , d – такие целые числа, что система уравнений $ax + by = p$, $cx + dy = q$ при всех p и q имеет целочисленные решения. Доказать, что $|ad - bc| = 1$.

1 3I. Разобьем числа I,2,3,4,5 любым способом на две группы. Доказать, что в одной из двух групп всегда можно найти два числа, разность которых будет совпадать с одним из чисел той же группы.

1 32. Сумма цифр натурального числа не меняется при умножении числа на 5. Доказать, что число делится на 9.

1 33. Число III...III (A единиц) делится на число III...III (B единиц). Доказать, что A делится на B.

Корень.

Мы принимаем такую аксиому:

(КI) Для всякого натурального $n>0$ и всякого неотрицательного a существует неотрицательное x, для которого $x^n = a$.

I*. Докажите, что (КI) не следует из других известных Вам аксиом действительных чисел.

2. Докажите, что при любом натуральном $n>0$ и неотрицательном a число x, для которого $x \geqslant 0$ и $x^n = a$, единственно.

3. Докажите, что если натуральное число n нечетно, то при любом (в том числе отрицательном) a существует и единственно x, для которого $x^n = a$.

Обозначение. Через $\sqrt[n]{a}$ обозначается: а) при нечетном n и любом a – то единственное x, для которого $x^n = a$ (см. задачу 3) б) при четном n и неотрицательном a – то единственное x, для которого $x \geqslant 0$ и $x^n = a$ (см. задачу 2). Например, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[2]{4} = 2$ (но не -2!), $\sqrt[2]{-4}$ не определено.

4. Доказать, что при любых $a, b \geqslant 0$ и любых натуральных $m, n > 0$ справедливы равенства $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$.

5. В чем ошибка: $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

6. Построить график функции $x \longmapsto \sqrt{x^2} + \sqrt[3]{x^3}$.

7. Преобразуйте $1/(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ к виду $a\sqrt{b} + c\sqrt{d} + \ldots$, где $a, b, c, d, \ldots \in \mathbb{Q}$. (Указание. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \ldots$)

8*. Та же задача для $1/(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$,

9. Найдите сумму $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1982}+\sqrt{1983}}$.

I0. Упростить: $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[6]{81}$. II*. Упростить: $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

I2*. Упростить: $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}$

I3. Доказать иррациональность $\sqrt[3]{2}$ I4. То же для $\sqrt{6}$

I5. То же для $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

I6. То же для $\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$ (1983 корня)

I7**. Пусть x – корень уравнения $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ с целыми коэффициентами $a_{n-1}, \ldots, a_0$, причем x рационален. Доказать, что x – целое число. Вывести отсюда утверждения I3, I4.

I8*. Вывести из I7, что если $a, n \in \mathbb{N}$ и $\sqrt[n]{a}$ рационально, то $\sqrt[n]{a}$ – целое.

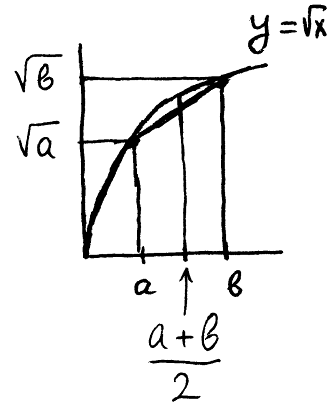
I9*. Доказать, что $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ иррационально.

20** (Обобщение задачи I9). Доказать, что если $p_1, \ldots, p_n$ – различные простые числа, а $q_1, \ldots, q_n$ – рациональные числа, не все из которых равны 0, то $q_1\sqrt{p_1} + \ldots + q_n\sqrt{p_n}$ иррационально.

2I**. Доказать, что если $x, y, z, \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \in \mathbb{Q}$, то $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z} \in \mathbb{Q}$

22. Доказать, что при любом $n \geq 1$ функция $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ строго возрастает: если $x < y$, то $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.

23. Доказать, что если $m > n$, $x > 1$, то $\sqrt[m]{x} < \sqrt[n]{x}$.



24. Что больше $\sqrt{5}$ или $\sqrt[3]{11}$?

25*. Что больше: $\sqrt{3}+\sqrt{11}$ или $\sqrt{5}+\sqrt{8}$?

26. Доказать, что $\sqrt{(a+b)/2} \le (\sqrt{a}+\sqrt{b})/2$

Указать на рисунке разность правой и левой частей.

27. Доказать, что

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(1/a+1/b)} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

(Эти величины называются гармоническим, геометрическим, арифметическим и квадратичным средними чисел a и b .)

28**. Неравенство Коши о среднем арифметическом и геометрическом.

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \le (a_1+\ldots+a_n)/n$$

(Указание. См. задачу 12 листка "Доказательство неравенств")

29*. Сумма n положительных чисел равна a . Какое наибольшее значение может принять их произведение?

30*. Произведение n положительных чисел равно a . Какое наименьшее значение может принять их сумма?

В задачах 29 и 30 разрешается пользоваться утверждением задачи 28.

31**. Что больше: $\sqrt[n]{n}$ или $\sqrt[n+1]{n+1}$?

32. Какая максимальная площадь может быть у прямоугольного пляжа, отгороженного забором длиной в 1 км ?

33*. Известно, что $x>0$, $y>0$ и $xy=1$ Найти максимально возможное значение выражения $2x+y$.

34**. Тот же вопрос, если заменить $xy=1$ на $xy^2=1$.

35*. Найдите такое n , чтобы $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < 0.001$

36**. Найдите такое n , чтобы $\sqrt[n]{n} < 1.001$

37**. Докажите, что в любом интервале с положительными концами найдется число вида $\sqrt[m]{n}$, где m и n – натуральные.

38**. Докажите, что дробная часть числа $(2+\sqrt{3})^{100}$ превосходит 0,99.

Учет решенных задач

№	1*	2	3	4	5	6	7	8*	9	10	11*	12*	13	14	15	16
записана																
когда принята																
кем																

17*	18*	19*	20**	21**	22**	23	24	25*	26	27	28**	29*	30*	31**	32	33*	34**

35*	36**	37**	38**