

Комплексы и их гомологии

Задача 5.1. Вычислите гомологии комплекса

а) $\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$; б) $\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$; в) $\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}^2$.

Задача 5.2. Вычислите клеточные гомологии а) (двумерного) тора; б) проективной плоскости; в) сферы с g ручками.

Задача 5.3. Вычислите относительные гомологии а) $(D^n, \partial D^n)$; б) $(S^n, \{x_1, \dots, x_k\})$.

Задача 5.4. Вычислите гомологии а) $\mathbb{C}P^n$; б) $\mathbb{R}P^n$.

Задача 5.5. Докажите, что $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^n$, где $n = |\pi_0(X)|$ — количество компонент линейной связности клеточного пространства X .

Задача 5.6. Докажите, что $H_1(X) \cong \pi_1(X)^{ab}$, где $G^{ab} = G/[G, G]$.

Задача 5.7. Докажите изоморфизм $H_k(\Sigma X) \cong H_{k-1}(X, pt)$.

Задача 5.8. Убедитесь в том, что гомологии дополнения в S^3 к двум незацепленным окружностям и к зацеплению Хопфа (см. рис. ниже) изоморфны.

(Гомологии можно понимать как клеточные гомологии пространства с конечным числом клеток, гомотопически эквивалентного такому дополнению.)

