

## Сингулярные гомологии

**Задача 7.1.** Вычислите сингулярные гомологии точки (пользуясь лишь определением).

**Задача 7.2.** Докажите, пользуясь только основными свойствами гомологий (функториальность и гомотопическая инвариантность, точная последовательность пары, вырезание), что а)  $H(X, A) \cong \tilde{H}(X \cup CA)$ ; б)  $\tilde{H}_k(\Sigma X) \cong \tilde{H}_{k-1}(X)$ .

**Задача 7.3.** Аксиома вырезания не выполняется для гомотопических групп.

**Задача 7.4\*.** а) Если  $k < n$ , то  $H(S^n \setminus D^k) \cong \tilde{H}(S^n)$  для любого вложения  $D^k$  в  $S^n$ ;  
б)  $\tilde{H}_0(S^n \setminus S^{n-1}) = \mathbb{Z}$  для любого вложения  $S^{n-1}$  в  $S^n$  (“теорема Жордана”).

### Дополнительная часть

▷ Далее  $h$  — такой функтор из категории хороших топологических пространств (например, конечных клеточных комплексов) в категорию градуированных абелевых групп, что

0)  $h(pt) = 0$ ;

1) если отображения  $f$  и  $g$  гомотопны, то  $h(f) = h(g)$ ;

2) для клеточных пар  $(X, A)$  3-членные последовательности  $h_i(A) \rightarrow h_i(X) \rightarrow h_i(X/A)$  точны;

3) имеется функториальный изоморфизм  $h_i(\Sigma X) \cong h_{i-1}(X)$ .

(Этими свойствами обладают, например, приведенные гомологии — но не только!)

**Задача 7.5.** Для клеточной пары  $(A, X)$  имеется точная последовательность

$$h_i(A) \rightarrow h_i(X) \rightarrow h_i(X/A) \rightarrow h_{i-1}(A) \rightarrow h_{i-1}(X) \rightarrow \dots$$

(указание:  $X/A \approx X \cup CA$ ).

**Задача 7.6.**  $h(A \vee B) = h(A) \oplus h(B)$ .

**Задача 7.7.** Пусть  $h \rightarrow h'$  морфизм между двумя такими функторами, индуцирующий (для всех  $n$ ) изоморфизмы  $h(S^n) \cong h'(S^n)$ . Докажите, что  $h(X) \cong h'(X)$  для любого связного конечного клеточного комплекса.

(Указание: индукция по остовам. Следствие: симплициальные гомологии совпадают с сингулярными.)