

Прогулки по графам

Задача 8.1. Пусть A — матрица смежности графа (т.е. A_{ij} есть количество ребер между вершинами i и j).

- а) Каков комбинаторный смысл матричных элементов матрицы A^l ?
- б) Количество путей длины l в полном графе K_n , начинающихся и заканчивающихся в данной вершине, равно $\frac{1}{n}[(n-1)^l + (-1)^l(n-1)]$.

Задача 8.2. Выведите из леммы LGV

- а) мультипликативность определителя;
- б) формулу Коши–Бине: $\det(AB)_{IJ} = \sum_S \det A_{IS} \det B_{SJ}$, где M_{IJ} — подматрица, из строк с номерами из I и столбцов с номерами из J , а суммирование ведется по всем таким подмножествам, что $|S| = |I| = |J|$.

Задача 8.3. Пусть ∂ — отображение [ребро] \mapsto [конец] — [начало] из векторного пространства, натянутого на ребра, в векторное пространство, натянутое на вершины данного (ориентированного) графа. Пусть ∂_0 — результат вычеркивания одной строки из матрицы ∂ .

- а) Если граф содержит циклы, то у ∂_0 есть ядро.
- б) Если граф является деревом, то $\det \partial_0 = \pm 1$.
- в) Определитель матрицы $\partial_0 \partial_0^*$ равен количеству остовных деревьев графа.

Задача 8.4. а) Чему равны матричные элементы матрицы Лапласа $\Delta := \partial \partial^*$ графа?

- б) Найдите собственные значения матрицы Лапласа графа K_n и докажите, что количество деревьев на n пронумерованных вершинах равно n^{n-2} .

Задача 8.5. Найдите количество остовных деревьев в графе n -мерного куба.