

Непересекающиеся пути и определители

Задача 7.1. Чему равен определитель матрицы $h \times h$ а) $a_{ij} = C_{i+j-1}$; б) $a_{ij} = C_{i+j}$; в*) $a_{ij} = C_{n+i+j-2}$ (где C_n — n -е число Каталана)?

$$\begin{pmatrix} C_{n+1} & C_{n+2} & \dots & C_{n+h} \\ C_{n+2} & C_{n+3} & \dots & C_{n+h+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n+h} & C_{n+h+1} & \dots & C_{n+2h-1} \end{pmatrix}$$

Задача 7.2. Придумайте определитель из биномиальных коэффициентов, вычисляющий количество диаграмм Юнга внутри данной.

Задача 7.3. Будем называть *треугольником Гельфанда–Цетлина* треугольную таблицу из целых чисел, в которой каждое число не меньше левого верхнего, но (строго) меньше правого верхнего соседа.

$$\begin{array}{ccccccc} l_1 & & l_2 & & \dots & & l_{n-1} & & l_n \\ & l_{12} & & l_{23} & & \dots & & & l_{n-1n} \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ & & & l_{1n-1} & & l_{2n} & & & \\ & & & & & l_{1n} & & & \end{array}$$

а) Сведите задачу о нахождении количества треугольников Гельфанда–Цетлина с *данной первой строкой* к вычислению некоторого определителя.

б) Докажите, что их количество равно $\prod_{i>j} \frac{l_i - l_j}{i - j}$. Если понимаете связь с формулой Вейля для размерности неприводимого представления gl_n — порадитесь.

Задача 7.4. Постройте биекцию между треугольниками Гельфанда–Цетлина (с подходящей первой строкой) и диаграммами Юнга, помещающимися внутри коробки $a \times b \times c$.

