От окружностей к коникам (алгебра)

Задача 1. Середины всех хорд данной окружности, имеющих данное направление, лежат на одной прямой. Доказать то же для хорд параболы.

Задача 2. На плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Восстановить оси координат.

Задача 3. Треугольник вписан в параболу так, что биссектриса его угла перпендикулярна оси параболы. Доказать, что середина медианы (из того же угла) лежит на оси.

Задача 4. а) Два угла с перпендикулярными биссектриссами пересекаются по 4 точкам. Доказать, что эти точки лежат на одной окружности.

б) Две параболы с перпендикулярными осями пересекаются по 4 точкам. Доказать, что эти точки лежат на одной окружности.

Задача 5. а) Одна окружность пересекает стороны угла в точках A, B, P, Q, а другая — в точках A, B, M, N. Доказать, что $MN \parallel PQ$.

б) То же для параболы вместо угла.

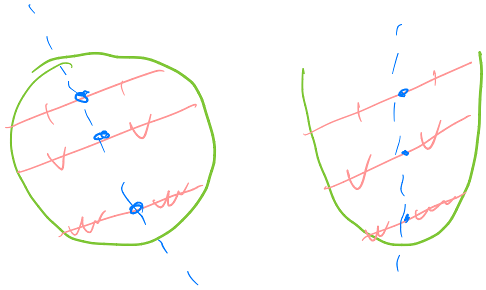
Задача 6. Зафиксируем окружность и точку A. Пусть проходящая через A секущая пересекает окружность в точках M и N. Тогда $|AM| \cdot |AN|$ не зависит от выбора секущей.

Зафиксируем теперь параболу $y = x^2+px+q$ и точку A. Пусть проходящая через A секущая пересекает параболу в точках M и N. Доказать, что $|AM|_x \cdot |AN|_x$ не зависит от выбора секущей, где $|\dots|_x$ обозначает длину *проекции на ось абсцисс.*

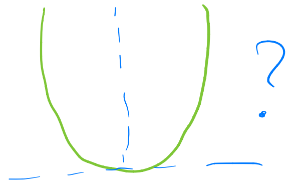
Задача 7. а) Прямая касается гиперболы. Доказать, что точка касания — середина отрезка, высекаемого на прямой асимптотами.

б) Доказать, что площадь треугольника, образованного ассимптотами и касательной, не зависит от выбора касательной.

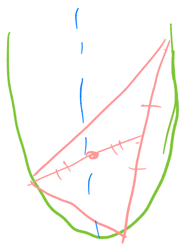
1



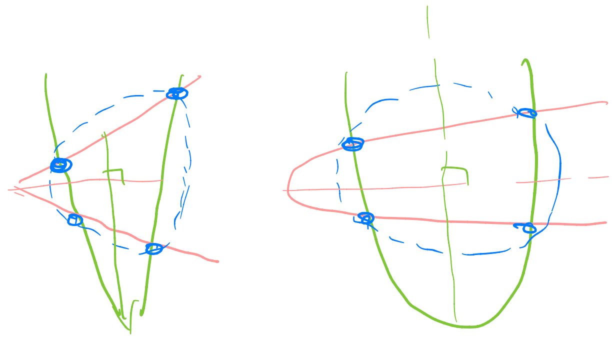
2



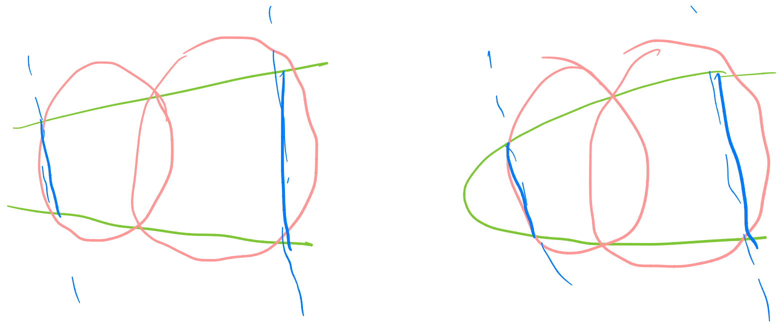
3



4



5



параллельны

6

$|AM| \cdot |AN| = const$ $\qquad$ $|AM|_x \cdot |AN|_x = const$

7

$S = const$