Листки v14

В этом файле собраны листки по «анализу» маткласса 57 школы (2014 «В»), который мы с И. В. Ященко и другими коллегами[1] учили с 2010 по 2014 год (с 8 по 11 класс). Курс во многом основан на курсе класса 2008 «В», а тот сложился под большим влиянием курса Б. М. Давидовича &co.

Некоторое представление об учебном процессе, частью которого являются такие листки, можно составить по предисловию к книге «Элементы математики в задачах». Желающим воспользоваться этим листками стоит учитывать, что они были написаны для конкретных школьников (и при этом не с каждым доплистком справился полностью хотя бы один человек).

Григорий Мерзон,
merzon at mccme.ru

---

[1] На анализе с классом работали Т. Голенищева-Кутузова, Н. Гончарук, Ю. Кудряшов, Г. М., А. Окунев, В. Казанцева (Старичкова), С. Крюков, И. Шанин, К. Щепин, И. В.Ященко (в отдельные периоды также Ю. Воронов и А. Пушкарь).

Кроме занятий по листкам на анализе иногда проходили лекции — их прочитали В. В. Доценко, Д. Б. Каледин, В. А. Клепцын, А. С. Лосев, Е. Ю. Смирнов, Р. М. Федоров, А. В. Шаповалов, А. Х. Шень, Б. Б. Шойхет.

Алгебру и геометрию в классе вели Л. Д. Альтшулер и Р. К. Гордин, физику — Е. А. Выродов.

Оглавление

Цикл 1. Индукция, множества и отображения, комбинаторика, целые числа (8 кл.)

Множества I: Операции над множествами

▷ *Множество* — одно из основных неопределяемых понятий математики. Задать множество — значит указать, из каких *элементов* оно состоит. Утверждение «элемент x *принадлежит* множеству A» записывают как «$x \in A$».

Один из способов записать множество — перечислить в фигурных скобках его элементы через запятую. Например, $A = \{1, \{2, 3\}, \text{крокодил}\}$.

▷ **Определение 1.** *Пустым множеством* называется множество, не содержащее элементов (обозначение: $\varnothing$).

Задача 1. Сколько элементов в каждом из следующих множеств?
а) $\{2, 3, 5\}$; б) $\{2, \{3, 5\}\}$; в) $\{\varnothing\}$; г) множество имен учеников вашего класса.

▷ **Определение 2.** Множество A называется *подмножеством* множества B, если любой элемент множества A принадлежит множеству B. Обозначение: $A \subset B$.

Один из способов задать подмножество — выделить его из всего множества условием. Например, $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \geqslant 0\} \subset \mathbb{Z}$ — подмножество неотрицательных целых чисел.

Задача 2. а) Сформулируйте, что значит, что множество A не является подмножеством множества B.
б) Убедитесь, что множество фиолетовых крокодилов в Москва-реке является подмножеством множества натуральных чисел.

Задача 3. Докажите, что $A \subset B$ и $B \subset A$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

Задача 4. а) Найдите число подмножеств у каждого из множеств задачи 1.
б) Может ли у множества быть ровно 0 подмножеств? 5 подмножеств?
в*) Сколько подмножеств у множества из n элементов?

Задача 5*. Каких подмножеств у 2010-элементного множества больше: имеющих четное или нечетное число элементов?

▷ **Определение 3.** *Объединением* множеств A и B называется множество $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$; их *пересечением* называется множество $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Задача 6. Найдите пересечение множеств а) $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \text{ четное}\}$, $\{b \in \mathbb{Z} \mid b \text{ делится на } 3\}$;
б) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq y, x \geq z\}$, $\{(x, y, z) \mid y \geq x, y \geq z\}$, $\{(x, y, z) \mid z \geq x, z \geq y\}$.

Задача 7. Можно ли в 6-элементном множестве выбрать а) 4 б) 5 подмножеств из 3 элементов, любые два из которых имеют не более одного общего элемента?
в*) А можно ли выбрать 7 таких 3-элементных подмножеств у 7-элементного множества?

Задача 8. Докажите, что а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ("дистрибутивность").

▷ **Определение 4.** *Разностью* множеств A и B называется множество $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Задача 9. Существуют ли такие бесконечные подмножества A и B целых чисел, что все три множества $A \setminus B$, $B \setminus A$ и $A \cap B$ тоже бесконечны?

Задача 10. Верны ли следующие тожества?
а) $(A \setminus B) \cup B = A$; б) $(A \setminus B) \cap X = (A \cap X) \setminus (B \cap X)$;
в) $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$; г) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

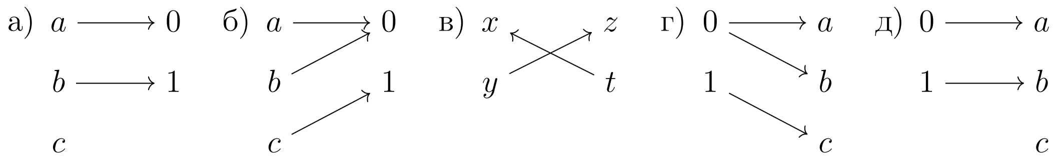
Задача 11*. Докажите, что если в тождестве, использующем только знаки объединения и пересечения заменить все символы “$\cup$” на “$\cap$”, а “$\cap$” на “$\cup$”, то оно останется верным.

Задача 12. Для каждой из операций $\cup$, $\cap$, $\setminus$ выясните, выражается ли она через две остальные.

Множества II: Отображения множеств

▷ Если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие ровно один элемент множества Y, то говорят, что задано *отображение* из множества X в множество Y (обозначение: $f\colon X \to Y$).

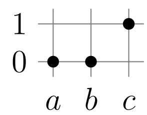
Задача 1. Какие из следующих картинок задают отображение?



Задача 2. Нарисуйте все отображения из множества $\{a, b, c\}$ в множество $\{0, 1\}$.

▷ **Определение 1.** *Произведением* множеств X и Y называется множество упорядоченных пар $\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

▷ **Определение 2.** *Графиком* отображения $f\colon X \to Y$ называется подмножество $\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subset X \times Y$.



Задача 3. На рисунке изображен график одного из отображений множества $\{a, b, c\}$ в множество $\{0, 1\}$. Нарисуйте остальные.

Задача 4* (определение отображения). Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие того, что подмножество $\Gamma \subset X \times Y$ является графиком некоторого отображения.

Задача 5. Сколько существует отображений а) из 1-элементного, 2-элементного; б) из k-элементного множества в n-элементное?

▷ **Определение 3.** Образом подмножества $A \subset X$ при отображении $f\colon X \to Y$ называется множество образов его элементов. Обозначение: $f[A]$.

Задача 6. Для каждого из следующих тождеств выясните, верно ли оно для произвольного отображения $f\colon X \to Y$ (A_i — подмножества в X).
а) $f[\varnothing] = \varnothing$; б) $f[X] = Y$; в) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f[A_1] \subset f[A_2]$; г) $f[A_1] \subset f[A_2] \Rightarrow A_1 \subset A_2$;
д) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$; е) $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$; ж) $f[X \setminus A] = Y \setminus f[A]$.

▷ **Определение 4.** *Полным прообразом* элемента $y \in Y$ при отображении $f\colon X \to Y$ называется множество $f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\}$. *Полным прообразом* подмножества $B \subset Y$ при отображении $f\colon X \to Y$ называется множество $f^{-1}[B] := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Задача 7. Для каждого из следующих тождеств выясните, верно ли оно для произвольного отображения $f\colon X \to Y$ (A_i — подмножества в X, B_i — в Y).
а) $f^{-1}[Y] = X$; б) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2]$; в) $f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2] \Rightarrow B_1 \subset B_2$;
г) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$; д) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$;
е) $f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f^{-1}[B]$; ж) $f^{-1}[f[A]] = A$; з) $f[f^{-1}[B]] = B$;
и*) $f[A] \cap B = f[A \cap f^{-1}[B]]$.

▷ **Определение 5.** Отображение, при котором каждый элемент имеет ровно один прообраз, называется *взаимно-однозначным отображением* или *биекцией.*

Задача 8. а) Выпишите все биекции из множества $\{1, 2, 3\}$ на себя.
б) Сколько существует биекций из n-элементного множества на себя?

▷ **Определение 6.** Пусть f — отображение из X в Y, а g — из Y в Z. Их *композицией* называется результат их последовательного применения, т. е. отображение $g \circ f \colon X \to Z$, $x \mapsto g(f(x))$.

Задача 9. Найдите композицию в обоих порядках для следующих пар отображений.
а) Все пары отображений из задачи 1;
б) $f, g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$; в) $f, g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -x$, $g(x) = 2 - (x - 2)$.

Задача 10. Докажите, что $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ ("ассоциативность композиции").

▷ **Определение 7.** *Тождественным отображением* множества X называется отображение $Id_X \colon x \mapsto x$.

Обратным к отображению $f \colon X \to Y$ называется такое отображение $f^{-1} \colon Y \to X$, что $f^{-1} \circ f = Id_X$ и $f \circ f^{-1} = Id_Y$.

Задача 11. а) Выясните, есть ли обратные у отображений из задачи 1.
б) Докажите, что отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно взаимно-однозначно.
в*) Достаточно ли для взаимной однозначности существования лишь *левого обратного* (такого g, что $g \circ f = Id_X$)? лишь *правого обратного* (такого g, что $f \circ g = Id_Y$)?

Задача 12. Постройте биекцию между $(X \times Y) \times Z$ и $X \times (Y \times Z)$.

Задача 13*. Пусть $\mathrm{Map}(A, B)$ — множество отображений из A в B. Постройте биекцию между
а) $\mathrm{Map}(X, \{0, 1\})$ и множеством всех подмножеств в X;
б) $\mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ и $\mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$.

Задача 14. Для каждой пары из следующих множеств выясните, существует ли между ними биекция 1) натуральные числа; 2) четные натуральные числа; 3) целые числа.

Задача 15. Докажите, что композиция биекций — биекция.

Комбинаторика I: Умножение и деление

Задача 1. На карточке для игры «Сет» имеется от одной до трех одинаковых фигур — ромбов, эллипсов или «волн» красного, зеленого или синего цвета со сплошной заливкой, со штриховкой или без заливки. Сколько всего таких карточек?

▷ **Определение 1.** Отображение $f\colon X \to Y$, при котором каждый элемент имеет не более одного прообраза, называется *инъекцией*[1] (или *вложением*).

Задача 2. а) Сколько существует вложений из k-элементного множества в n-элементное[2]? б*) Сколько существует сюръекций k-элементного множества на n-элементное?

Задача 3. а) Пусть $Y \subset Z$ — k-элементное подмножество n-элементного множества. Скольким способами можно представить его как образ вложения $X = \{1, \dots, k\}$ в Z? б) Сколько у n-элементного множества k-элементных подмножеств?

Задача 4*. Отображение называется *монотонным*, если $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
а) Сколько существует *монотонных* вложения множества $\{1, 2\}$ в множество $\{1, 2, \dots, n\}$?
б) А из множества $\{1, 2, \dots, k\}$ в множество $\{1, 2, \dots, n\}$?
в) А сколько всего существует монотонных отображений из первого множества во второе?

Задача 5. а) Сколькими способами можно разбить n человек на пары? б) А на команды по 3 человека?

Задача 6. а) Сколько у выпуклого n-угольника диагоналей? б) А сколькими способами в него можно вписать треугольник (так чтобы вершины треугольника лежали в вершинах многоугольника)?

Задача 7*. На двух параллельных прямых отметили n и m точек соответственно, после чего провели все соединяющие их отрезки. Сколько точек пересечения получилось?

Задача 8. Сколькими способами можно раскрасить жезл из а) 5; б) n полосок в два цвета?

Задача 9. Сколькими способами можно раскрасить в два цвета карусель из а) 4; б) 5; в*) 57 вагончиков? г*) А бусы из 5 бусинок? из 57 бусинок?

Задача 10. а) Сколько всего перестановок граней куба можно получить, вращая его?
б) Сколько существует различных «игральных кубиков» (кубиков, на гранях которых расставлены числа от 1 до 6)?
в) Сколько из них «правильных» игральных кубиков (таких, что сумма чисел на противоположных гранях равна 7)?
г*) Два правильных игральных кубика склеивают по грани. Сколько различных объектов можно так получить?
д) Сколько существует различных кубиков, грани которых раскрашены в черный и белый цвета?
е*) А если цветов n?

---

[1] А отображение, при котором каждый элемент имеет не менее одного прообраза — сюръекцией.
[2] Это число иногда обозначается $n^{\downarrow k}$.

Индукция

Аксиома. Каждое непустое подмножество множества натуральных чисел содержит наименьший элемент[3].

Задача 0* (Принцип математической индукции). Пусть имеется последовательность утверждений $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Тогда если

1) *(база индукции)* утверждение A_1 истинно,

2) *(шаг индукции)* из утверждения A_n следует утверждение A_{n+1},

то все утверждения A_n истинны.

Соглашение. Утверждением этой задачи можно пользоваться без доказательства.

Задача 1. Треугольник на плоскости разделили n прямыми на части. Докажите, что среди этих частей есть треугольник.

Задача 2 (Ханойская башня). Имеется три стержня, на первый из которых нанизана пирамида из n колец, а оставшиеся два пусты. За ход можно переложить верхнее кольцо с одного из стержней на другой, но запрещается класть большее кольцо на меньшее.
а) Все кольца можно переложить с первого стержня на второй.
б) Это можно сделать за $2^n - 1$ ход. в*) Можно ли это сделать быстрее?

Задача 3. а) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

Задача 4. Найдите сумму а) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$; б) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2$.

Задача 5. Найдите сумму а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$; б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n + 1)$.

Задача 6*. Найдите сумму а) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$; б*) $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.

Задача 7. а) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2$; б*) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$.

Задача 8*. $n^{n+1} > (n + 1)^n$ при $n > 2$.

Задача 9. Любое натуральное число можно перевести в двоичную систему счисления (представить как сумму различных степеней двойки).

Задача 10. Какие суммы можно заплатить, имея неограниченный запас монет по 3 и по 5 рублей?

Задача 11. Для любого $n > 2$ единицу можно представить в виде суммы n различных дробей вида $1/k$.

Задача 12. Если число $a + \frac{1}{a}$ целое, то и число $a^n + \frac{1}{a^n}$ целое.

Задача 13*. Все последовательности нулей и единиц длины n можно занумеровать так, что соседние последовательности отличаются ровно в одном месте.

---

[3] т. е. элемент, который меньше любого другого элемента этого подмножества

Задача 14. *Утверждение.* В любом стаде все коровы одного цвета.

Доказательство. Индукция по числу коров. База (стадо из одной коровы) очевидна, докажем шаг. Возьмем в стаде из $N + 1$ коровы произвольную корову A. Оставшиеся N коров одного цвета. Теперь возьмем другую корову B. Оставшиеся N коров также одного цвета. В частности, A одного цвета со всеми коровами, кроме A и B — но и B одного цвета со всеми этими коровами. Значит, все коровы в стаде одного цвета.

Задача 15. *Утверждение.* Если в стране из каждого города выходит хотя бы одна дорога, то из любого города можно попасть в любой другой.

Доказательство. Индукция по числу городов. База (страна из двух городов) очевидна, докажем шаг. Возьмем какую-нибудь страну из n городов и добавим к ней новый город (с выходящей из него дорогой). Между старыми городами можно проехать по старым дорогам, так что достаточно доказать, что из нового города можно добраться в любой из старых. Дорого из этого города ведет в один из старых городов. Следовательно, из него можно доехать в один из старых городов, а оттуда уже добраться до любого другого. Итак, в новой стране тоже можно из любого города доехать до любого другого.

Задача 16. а) Части, на которые делят плоскость несколько прямых, можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние (по отрезку) части были разного цвета.
б) То же для окружностей вместо прямых.

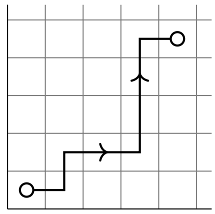
Задача 17. а) На сколько частей делят плоскость k прямых *в общем положении* (никакие две из которых не параллельны, а никакие три не пересекаются в одной точке)?
б*) На какое наибольшее число частей могут делить плоскость k окружностей? При каком условии этот максимум достигается?
в*) На какое наибольшее число частей могут делить пространство k плоскостей? При каком условии этот максимум достигается?

Задача 18. а*) Любой многоугольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники.
б) Какое максимальное число треугольников может получится при разрезании n-угольника на треугольники непересекающимися диагоналями?

Задача 19*. На кольцевой дороге расположено несколько бензоколонок, суммарное количество бензина в которых достаточно, чтобы автомобиль мог сделать полный круг. Докажите, что автомобиль с пустым баком может начать движение с некоторой бензоколонки и, заправляясь на встречающихся ему бензоколонках, сделать полный круг.

Комбинаторика II: Биномиальные коэффициенты

Задача 1. Запишем в каждой клетке таблицы число способов дойти до нее из левой нижней клетки, двигаясь только вправо или вверх.
а) Что за числа стоят в самой нижней строке? Следующей за ней строке?
б) Каждое число[4] является суммой левого и нижнего соседей.
в) Выпишите угловой квадрат 5×5 таблицы.



▷ **Определение 1.** *Числом сочетаний* из n по k называется количество k-элементных подмножеств у n-элементного множества. Обозначение: $\binom{n}{k}$ (или C_n^k).

Напомним, что $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Задача 2. Докажите, что в таблице из задачи 1 стоят в точности числа сочетаний. В какой клетке стоит число $\binom{n}{k}$?

Задача 3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Задача 4. а) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$; б) $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Задача 5. Найдите сумму $1^{\downarrow k} + 2^{\downarrow k} + \dots + n^{\downarrow k}$.
(Решив эту задачу, можно снова подумать над задачей 6 предыдущего листка.)

▷ **Определение 2.** Повернем таблицу из задачи 1 на $135°$. Результат называется *треугольником Паскаля.*

На краях этого треугольника стоят единицы, а каждое число внутри является суммой двух, стоящих над ним.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Задача 6. а) Выше выписаны первые 5 строк треугольника Паскаля. Выпишите следующие 5 строк. Найдите при помощи треугольника Паскаля число $\binom{9}{4}$.
б) Найдите сумму чисел в каждой из первых 6 строк треугольника Паскаля.
в) Найдите сумму чисел в n-й строке треугольника Паскаля. Запишите возникающее тождество для биномиальных коэффициентов.

Задача 7. Вычислите 101^7.

Задача 8. Вычислите $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots \pm \binom{n}{n}$.

Задача 9. а) У Тома Сойера есть забор из n досок и белая краска. Сколькими способами он может покрасить в этом заборе четное число досок?
б*) А сколькими способами он может покрасить кратное трем число досок?

Задача 10. а) Для каждой из первых 4 строчек треугольника Паскаля сложите квадраты стоящих в ней чисел и найдите полученное число в треугольнике Паскаля. Запишите полученную гипотезу. б) Докажите эту гипотезу.

Задача 11 (бином Ньютона). а) Раскройте скобки в выражении $(a+b)^n$ для $n = 1, 2, 3, 4$; результаты запишите друг под другом.
б) $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} b^n$.

Задача 12. Найдите сумму $\binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} - \dots \pm 2^n\binom{n}{n}$.

[4] кроме числа, стоящего в левой нижней клетке

Задача 13 (свертка Вандермонда). Вычислите двумя способами коэффициент при x^k в выражении а) $(1+x)^n \cdot (1+x)$; б) $(1+x)^n \cdot (1+x)^m$ — какое тождество на биномиальные коэффициенты получается?
в*) Придумайте комбинаторное (не опирающееся на бином) доказательство этих тождеств.

Задача 14* (формула включений–исключений). Число элементов в объединении двух множеств можно вычислять по формуле $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$. Сформулируйте и докажите аналогичную формулу а) для трех множеств ($|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - \dots$); б) для n множеств.

Задача 15*. Сколькими способами можно выбрать неотрицательные числа $x_1, \dots, x_k$ такие, что $x_1 + \dots + x_k = n$?

Задача 16*. Напомним, что n-м числом Каталана называется число способов разбить выпуклый $(n+2)$-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями.
а) Число путей из левого нижнего угла квадрата $(n+1) \times (n+1)$ в правый верхний, не поднимающихся выше диагонали, равно n-му числу Каталана.
б) Придумайте и докажите формулу для n-го числа Каталана.

Задача 17*. а) Придумайте и докажите формулу для $(a+b+c)^n$.
б) Что будет в этом случае аналогом “путевой интерпретации” из задачи 1?

Арифметика I: Делимость

Соглашение. Все числа в этом листке предполагаются целыми.

▷ **Определение 1.** Говорят, что число a *делит* число b (или что b *делится* на a, или что b *кратно* a), если существует такое целое число k, что $ak = b$. Обозначения: $a \mid b$ или $b \,\vdots\, a$.

Множество чисел, кратных a (т. е. $\{ak : k \in \mathbb{Z}\}$), обозначается (a).

Задача 1. $a \mid b \iff (a) \supset (b)$.

Задача 2. Докажите следующие свойства делимости.
а) $a \mid a$ *(рефлексивность)*;
б) если $a \mid b$ и $b \mid c$, то $a \mid c$ *(транзитивность)*;
в) если $a \mid b$ и $b \mid a$, то $a = \pm b$ *(антисимметричность)*.

Задача 3. Какие из следующих утверждений верны?
а) $\forall a \in \mathbb{Z}\ 0 \mid a$; б) $\forall a \in \mathbb{Z}\ a \mid 0$; в) $\forall a \in \mathbb{Z}\ 1 \mid a$; г) $\forall a \in \mathbb{Z}\ a \mid 1$;
д) если $c \mid a$ и $d \mid a$, то $c + d \mid a$; е) если $d \mid a$ и $d \mid b$, то $d \mid a + b$;
ж) если $d \mid a$ или $d \mid b$, то $d \mid ab$; з) если $d \mid ab$, то $d \mid a$ или $d \mid b$.

Задача 4. а) Если $a + b \mid a^2$, то $a + b \mid b^2$; б*) $x + y + z \mid x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Задача 5. а) $4^n - 1 \,\vdots\, 3$; б) $4^n - 3n - 1 \,\vdots\, 9$;
в*) $4^n - \ldots - 1 \,\vdots\, 27$ (сформулируйте и докажите).

Задача 6. Произведение k последовательных натуральных чисел делится на $k!$.

Задача 7*. Пусть $[n]$ — число из n единиц. Тогда произведение k идущих подряд чисел из этой последовательности делится на произведение первых k членов этой последовательности.

Задача 8. Сформулируйте и докажите признак а) делимости на 9; б) делимости на 11; в) признак делимости на 17 для чисел, записанных в 16-ричной системе счисления.

Задача 9. Определите устно, делится ли число 140359156002848 на 4206377084.

Задача 10 (деление с остатком). Пусть a и b целые числа, $a \neq 0$. Тогда b ровно одним образом можно представить в виде $aq + r$, так что $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r < |a|$.

▷ **Определение 2.** Числа q и r из предыдущей задачи называются, соответственно, *неполным частным* и *остатком* при делении числа b на число a.

Задача 11. Разделите с остатком ± 17 на ± 4.

Задача 12. Найдите остаток от деления
а) a^2 на $a + 1$; б) a^3 на $a^2 + a + 1$; в*) a^n на $a + 1$;
г) $[n]$ на $[m]$ (где $[n]$ — число из n единиц); д) $2^n - 1$ на $2^m - 1$.

▷ **Определение 3.** Целое число $p \neq \pm 1$ называется *простым*, если у него нет делителей кроме ± 1 и $\pm p$. Остальные ненулевые целые числа, не равные ± 1, называются *составными.*

Задача 13. Найдите все такие простые числа p, что числа $p + 2$ и $p + 4$ тоже простые.

Задача 14. а) Простых чисел бесконечно много. Указание: для любого набора чисел $p_1, \ldots, p_n$ можно построить новое число, которое ни на одно из p_i не делится (как?).
б) Существует ли 10^{100} подряд идущих составных чисел?

Задача 15*. Путь p_n — n-е (положительное) простое число. Тогда $p_n < 2^{2^n}$.

Задача 16 (основная теорема арифметики). а) Любое целое число может быть разложено на простые множители. б*) Разложение целого числа на простые множители единственно. (Сформулируйте точное утверждение и докажите его.)

Задача 17*. Рассмотрим множество чисел вида $a + b\sqrt{-5}$. Разложите в нем число 6 на простые множители двумя различными способами.

Арифметика II: Алгоритм Евклида и его следствия

Соглашение. Все числа в этом листке предполагаются целыми.

▷ **Определение 1.** Пусть a и b — целые числа. Наибольший элемент множества $\{x \in \mathbb{Z} : x \mid a, x \mid b\}$ называется *наибольшим общим делителем*, а наименьший положительный элемент множества $\{x \in \mathbb{Z} : a \mid x, b \mid x\}$ — *наименьшим общим кратным* чисел a и b.

Задача 1. Найдите а) НОД$(n, n+1)$; б) НОД$(n, n+2)$; в) НОД$(n+1, n^2)$.

Задача 2 (алгоритм Евклида). а) НОД не меняется при замене пары (a, b) на пару $(a, b + ka)$ (для любого целого числа k).
б) Последовательностью преобразований вида $(a, b) \mapsto (a, b + ka)$ и $(a, b) \mapsto (b, a)$ любую пару целых чисел можно перевести в пару вида $(c, 0)$.
в) Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего общего делителя двух чисел.

Задача 3. а) Чему может быть равен НОД$(x + y, x - y)$, если НОД$(x, y) = 1$?
б*) Как может измениться НОД при замене пары (x, y) на пару $(ax + by, cx + dy)$?

Задача 4. Найдите а) НОД$(6188, 4709)$; б) НОД$(1597, 2584)$;
в) НОД$([n], [m])$; г) НОД$(x^n - 1, x^m - 1)$.

Задача 5*. а) Для какого наименьшего целого числа a существует такое целое число b $(0 < b < a)$, что алгоритм Евклида для них не завершается за $n - 1$ шаг?
б*) Оцените время работы алгоритма Евклида для чисел a и b.

Задача 6. От прямоугольника $a \times b$ $(a < b)$ отрезают квадрат со стороной a. С оставшимся прямоугольником операцию повторяют и т. д. На какие квадраты будет в результате таких действий порезан прямоугольник 6188×4709?

Задача 7. а) Множество $(a) + (b) := \{ak + bl : k, l \in \mathbb{Z}\}$ равно множеству (c) для некоторого целого числа c. б) Чему равно это c?

Задача 8. Какие суммы можно заплатить, используя монеты по a и b рублей (возможно со сдачей)?

▷ **Определение 2.** Два числа называются *взаимно простыми*, если их НОД равен 1.

Задача 9. Если числа a и b взаимно просты, то “a обратимо по модулю b”: существует такое целое число a', что $aa' - 1$ кратно b.

Задача 10. а) Решите уравнение $ax + by = 0$.
б) Пусть (x_0, y_0) — одно решение уравнения $ax + by = c$. Опишите все его решения.

Задача 11. Решите уравнения
а) $7x + 11y = 1$; б) $1023x + 15y = 2010$; в) $1023x + 15y = 11$.

Задача 12. а) Если ab делится на простое число p, то либо a делится на p, либо b делится на p.
б) Разложение целого числа на простые множители единственно (с точностью до перестановки сомножителей и смен знаков).

▷ **Определение 3.** Степень, в которой простое число p входит в разложение на простые множители числа a называется *p-показателем* числа a. Обозначение: $\mathrm{ord}_p(a)$.

Задача 13. а) $\mathrm{ord}_p(ab) = \mathrm{ord}_p(a) + \mathrm{ord}_p(b)$; б) $a \mid b \iff \forall p\ \mathrm{ord}_p(a) \leqslant \mathrm{ord}_p(b)$.

Задача 14. а) $\mathrm{ord}_p(n!) = \sum\limits_{\alpha \geqslant 1} \left\lfloor \dfrac{n}{p^\alpha} \right\rfloor$ (где $\lfloor a/b \rfloor$ — неполное частное при делении a на b); выясните, на сколько нулей оканчивается десятичная запись числа $10^4!$.
б*) Найдите формулу для $\mathrm{ord}_p \binom{n}{k}$; проверьте, что получается неотрицательное число.
в*) Если число p простое, то все числа в p^n-й строке треугольника Паскаля, кроме первого и последнего, делятся на p.

Задача 15. а) $ab = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b)$; б*) сформулируйте и докажите обобщение последнего утверждения для трех сомножителей.

Задача 16. Решите в целых числах уравнения а) $(x-7)(x-11) = 2^n$; б*) $x^2 - 1 = y^3$.

Задача 17. а) Опишите все пифагоровы тройки: решите в целых числах уравнение $a^2 + b^2 = c^2$. (Указание: докажите, что $a + c$ — либо полный квадрат, либо удвоенный полный квадрат.)
б*) Решите уравнение $x^4 + y^4 = z^4$.
в*) Решите уравнение $x^3 + y^3 = z^3$.

Отношения эквивалентности

▷ **Определение 1.** *Отношением* на множестве M называется подмножество $\mathcal{R} \subset M^2$. При этом вместо $(a, b) \in \mathcal{R}$ пишут $a\mathcal{R}b$.

Отношение $\sim$ называется *отношением эквивалентности*, если выполнены следующие три условия (“аксиомы”):
1) $a \sim a$ *(рефлексивность)*;
2) если $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$ *(транзитивность)*;
3) если $a \sim b$, то $b \sim a$ *(симметричность)*.

Задача 1. Какие из следующих отношений являются отношениями эквивалентности?
а) “иметь одинаковую последнюю цифру в десятичной записи” на $\mathbb{Z}$;
б) “иметь одинаковый образ при отображении f” на множестве M (для фиксированного отображения $f\colon M \to X$);
в) “лежать в одной компоненте связности” на вершинах некоторого графа;
г) $a \sim b \Leftrightarrow a = \pm b$ на $\mathbb{Z}$; д) $a \sim b \Leftrightarrow a = b \pm n$ на $\mathbb{Z}$; е) $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in (n)$ на $\mathbb{Z}$;
ж) $a \sim b \Leftrightarrow$ НОД$(a, b) = 1$ на $\mathbb{Z}$; з) $(p, q) \sim (p', q') \Leftrightarrow pq' = qp'$ на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
и*) $a \sim b \Leftrightarrow ab = ba$ на $\mathfrak{S}_n$; к*) $a \sim b \Leftrightarrow \exists x, y : a = xy,\ b = yx$ на $\mathfrak{S}_n$.

Задача 2. Следует ли какая-либо из аксиом в определении отношения эквивалентности из остальных?

▷ **Определение 2.** Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве M, a — элемент этого множества. *Классом эквивалентности* этого элемента называется множество $[a] = \{x \in M : x \sim a\}$ (а элемент a называется *представителем* данного класса).

Задача 3. Классы эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

▷ **Определение 3.** Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве M. Множество классов эквивалентности называется *фактормножеством* и обозначается $M/\!\sim$.

Задача 4. Опишите классы эквивалентности и фактормножества для отношений эквивалентности из задачи 1.

▷ **Определение 4.** *Транзитивным замыканием* симметричного отношения $\mathcal{R}$ на множестве M называется отношение “лежать в одной компоненте связности графа $(M, \mathcal{R})$”.

Задача 5*. а) Транзитивное замыкание симметричного отношения является отношением эквивалентности.
б) Опишите транзитивное замыкание для отношений из задачи 1.
в) Опишите транзитивное замыкание для отношения $(a, b) \sim (b, a)$, $(a, b) \sim (a, b \pm a)$ на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Задача 6*. Любое отношение эквивалентности является отношением эквивалентности из задачи 1б).

Задача 7*. Сколько существует отношений эквивалентности на 8-элементном множестве?

Арифметика III: Сравнения по модулю

Соглашение. Все числа в этом листке целые, а p — еще и простое.

▷ **Определение 1.** Говорят, что целые числа a и b *сравнимы по модулю* n, если $a-b \in (n)$. Обозначение: $a \equiv b \pmod n$.

Как было доказано в предыдущем листке, это отношение эквивалентности. Соответствующее фактормножество обозначается $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (его элементы иногда называют *вычетами по модулю* n; их можно отождествлять с остатками от деления на n).

Задача 1. Пусть $a \equiv a' \pmod n$, $b \equiv b' \pmod n$. Обязательно ли
а) $a + b \equiv a' + b' \pmod n$; б) $ab \equiv a'b' \pmod n$; в) $a^k \equiv {a'}^k$; г) $k^a \equiv k^{a'}$;
д*) $f(a, b) \equiv f(a', b')$ для произвольного многочлена f с целыми коэффициентами?

Задача 2. Какие остатки по модулю 4 может иметь полный квадрат?

Задача 3. Имеют ли следующие уравнения решения в целых числах?
а) $12x + 5 = y^2$; б) $15x^2 - 7y^2 = 9$; в) $x^2 + y^2 = 3z^2$; г) $8x^3 - 13y^3 = 17$; д) $2^x - 1 = 5^y$.

Задача 4. Существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы а) двух, б) трех квадратов.

Задача 5. а) Пусть $ax \equiv ay \pmod n$, $a \not\equiv 0 \pmod n$. Обязательно ли $x \equiv y \pmod n$?
б) Пусть $[a]$ — ненулевой вычет по модулю n. Всегда ли отображение умножения на a ($m_a\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $[x] \mapsto [ax]$) является биекцией?

Задача 6. Решите сравнения
а) $7x \equiv 1 \pmod{11}$; б) $7x \equiv 1 \pmod{12}$; в) $7x \equiv 5 \pmod{12}$.

Задача 7 (китайская теорема об остатках).
а*) Пусть числа n и m взаимно просты. Тогда естественное отображение $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ является биекцией.
б) Пусть числа $n_1, \ldots, n_k$ попарно взаимно просты. Тогда для любых чисел $b_1, \ldots, b_k$ найдется такое целое число x, что $x \equiv b_i \pmod{n_i}$.

Задача 8. Решите системы сравнений

а) $\begin{cases} x \equiv n-1 \pmod n; \\ x \equiv n \pmod{n+1}. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5; \\ x \equiv 3 \pmod 7; \\ x \equiv 4 \pmod 9. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 4; \\ x \equiv 2 \pmod 7; \\ x \equiv 3 \pmod{10}. \end{cases}$

▷ **Определение 2.** *Порядком* вычета $[a]$ по модулю l называется наименьшее натуральное число n, такое что $a^n \equiv 1 \pmod l$.

Задача 9. а) Любой ненулевой вычет по простому модулю имеет порядок.
б) $a^n \equiv 1$, тогда и только тогда когда n делится на порядок a.

Задача 10. Если число p простое, то $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$.

Задача 11 (малая теорема Ферма). Если число p простое, то $a^p \equiv a \pmod p$. (Следствие: если $a \not\equiv 0 \pmod p$, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.)

Задача 12. Вычислите а) $2^{1001} \bmod 11$; б) $2010^{2011} \bmod 57$.

Задача 13. а) Если $p > 3$, то $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.
б) Если $p > 2$, то $7^p - 5^p - 2$ делится на $6p$.

Задача 14*. Вычислите $\underbrace{11\ldots1}_{p-1} \mod p$.

Задача 15. а) Если ненулевой вычет $[a]$ является полным квадратом по простому модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$.
б*) Верно ли обратное утверждение?

Задача 16*. Вычислите $1^{2011} + 2^{2011} + \cdots + (p-1)^{2011} \mod p$.

Задача 17* (теорема Вильсона). Число p является простым тогда и только тогда, когда $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

Задача 18*. а) Для каких простых p вычет $[-1]$ является полным квадратом по модулю p?
б) А вычет $[-3]$? (Указание: рассмотрите в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ подходящее квадратное уравнение с дискриминантом -3.)

Задача 19*. Пусть $[a]$ — ненулевой вычет по простому модулю p. Рассмотрим отображение m_a из задачи 5 как перестановку множества $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ ненулевых вычетов по модулю p.
а) Какую циклическую структуру может иметь эта перестановка? (Например, может ли она представлять собой произведение независимых циклов длин 7 и 11?)
б) Найдите знак[5] этой перестановки. (Начать можно со случая, когда a является полным квадратом по модулю p.)

[5]Знак перестановки — это число -1, если перестановка нечетная, и 1, если четная.

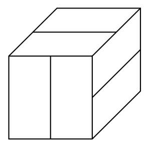
Комбинаторика III: Перечисление с повторениями

Задача 1. Прямоугольная таблица $m \times n$ заполнена плюсами и минусами. За ход разрешается поменять на противоположный все знаки в любой строке. Назовем две таблицы эквивалентными, если одна из другой получается последовательностью ходов.
а) Докажите, что в любых двух классах эквивалентности одинаковое число элементов.
б) Найдите это число.
в) Найдите число этих классов.

Задача 2 ("правило деления"). Пусть отношение эквивалентности "$\sim$" на m-элементном множестве M таково, что каждый класс эквивалентности состоит ровно из f элементов. Сколько элементов в множестве $M/\sim$?

Задача 3. Сколькими способами можно пронумеровать а) вершины; б) ребра куба?

Задача 4. а) Каждая грань кубика разбита пополам (см. рис.). Сколькими способами можно раскрасить получившиеся 12 прямоугольников в 12 различных цветов?



б*) Сколькими способами можно раскрасить 12 граней додекаэдра в 12 различных цветов?

Задача 5. Как изменится ответ в задаче 2, если для m' элементов соответствующие классы содержат не f, а f' элементов?

Задача 6. а) Пусть p — простое число. Сколькими способами можно раскрасить в a цветов карусель из p вагончиков? б) А карусель из p^2 вагончиков?
в*) Какое утверждение про делимость дает соответствующая задача для n вагончиков?

Задача 7*. Пусть p — простое число. Сколько существует замкнутых ориентированных p-звенных ломаных, проходящих по вершинам правильного p-угольника (ломаные, переходящие друг в друга при поворотах многоугольника считаются одинаковыми)?

Краткая программа зачета (v14, 09.03.2011)

0. Индукция

0.1. Доказательство утверждений по индукции (в т. ч. индукция по комбинаторным объектам), различные схемы индукции (использование, вывод из обычной индукции).

1. Множества и отображения

1.1. Понятие множества (элементы и подмножества, равенство множеств). Операции над множествами (определение, доказательство тождеств, выразимость одних операций через другие).

1.2. Образ и прообраз при отображении (определения, согласованность с операциями над множествами).

1.3. Композиция отображений (определение, ассоциативность). Обратное отображение (определение, необходимое и достаточное условие существования), биективность композиции биекций.

1.4. Отношение эквивалентности (определение, (не)зависимость аксиом, фактор по отношению эквивалентности).

1.5*. Равномощность как отношение эквивалентности. Счетность: определение, сохранение при операциях на множествах, счетность как наименьшая бесконечная мощность.

2. Комбинаторика

2.1. Сложение, умножение, деление (раскраски куба, жезлы и подобные задачи) в комбинаторике.

2.2. Комбинаторика множеств и отображений (число подмножеств, число отображений, число биекций, число вложений, число k-элементных подмножеств).

2.3. Четыре взгляда на числа сочетаний: подмножества, пути, треугольник Паскаля, бином Ньютона (доказательство эквивалентности, умение переходить с одного языка на другой). Основные тождества для чисел сочетаний.

2.4*. Формула включений–исключений и ее применения (число сюръекций, НОД и НОК произведения n чисел).

2.5*. Числа Каталана: три определения (триангуляции, бинарные деревья, пути над диагональю), рекуррентное соотношения, формула.

3. Арифметика

3.1. Делимость (определение, свойства). Деление с остатком (определение, существование и единственность).

3.2. Бесконечность множества простых чисел. Основная теорема арифметики: формулировка, доказательство существования, вывод единственности из основной леммы.

3.3. Алгоритм Евклида и линейное представление НОД. Линейное диофантово уравнение ($ax + by = c$ в целых числах), доказательство основной леммы к основной теореме арифметики (если $p \mid ab$, то $p \mid a$ или $p \mid b$).

3.4. Сравнимость по модулю (определение, согласованность с операциями). Линейное сравнение ($ax \equiv b \pmod{n}$). Китайская теорема об остатках и система линейных сравнений.

3.5. Обратимость умножения по простому модулю. Существование порядка вычета. Малая теорема Ферма.

3.6. Решение уравнений в целых числах: использование взаимной простоты (пример: описание пифагоровых троек), приведения по модулю (пример: бесконечность множества натуральных чисел, не представимых в виде суммы двух квадратов).

Множества III: Счетные и несчетные множества

▷ **Определение 1.** Два множества называются *равномощными*, если между ними существует биекция (обозначение: $|A| = |B|$).

Задача 1. Отношение равномощности обладает следующими свойствами:
а) $|A| = |A|$ *(рефлексивность)*;
б) $|A| = |B|, |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$ *(транзитивность)*;
в) $|A| = |B| \Leftrightarrow |B| = |A|$ *(симметричность)*.

▷ **Определение 2.** Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется *счетным.*

Задача 2. Объединение счетного и конечного множеств счетно.

▷ **Определение 3.** Говорят, что мощность множества A не превосходит мощности множества B, если существует вложение из A в B (обозначение: $|A| \leq |B|$).

Задача 3. Если множество A *не более чем счетно*[6], то A либо счетно, либо конечно.

Задача 4. Произведение двух счетных множеств счетно.

Задача 5. а) Конечное; б) счетное объединение счетных множеств счетно.

Задача 6. У любого бесконечного множества есть счетное подмножество.

Задача 7 (определение конечности). Множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно своему собственному подмножеству.

Задача 8. Пусть A — бесконечное множество, N — не более чем счетное множество. Что можно сказать о мощности а) $A \cap N$; б) $A \cup N$; в) $A \setminus N$; г*) $A \times N$?

Задача 9. Следующие множества равномощны единичному интервалу
а) произвольный интервал; б) полуокружность без концов; в) прямая; г) отрезок; д*) квадрат.

Задача 10. Обозначим через 2^X — множество подмножеств X. Тогда $|X| < |2^X|$. *(Следствие: для любого множества существует большее его по мощности.)*

▷ **Определение 4.** Говорят, что множество C имеет мощность континуум, если $|C| = |2^{\mathbb{N}}|$.

Задача 11. Найдите мощности следующих множеств
а) конечные б) бесконечные последовательности нулей и единиц;
в*) рациональные числа; г*) действительные числа[7];
д) финитные[8] перестановки натуральных чисел; е) все перестановки натуральных чисел;
ж) отображения $\mathbb{N}$ в себя; з) полиномиальные отображения $\mathbb{N}$ в себя.

Задача 12. Пусть C — множество мощности континуум. Докажите, что $|C^2| = |C|$.

Задача 13* (теорема Кантора–Бернштейна). Пусть $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$. Тогда $|A| = |B|$.

Задача 14*. Верно ли, что для любых бесконечных множеств а) $|A \cup B| = \max(|A|, |B|)$; б) $|A \times B| = \max(|A|, |B|)$?

---

[6] т. е. $|A| \leq |\mathbb{N}|$
[7] понимаемые, например, как бесконечные десятичные дроби
[8] т. е. переставляющие лишь конечное множество чисел

Перестановки: Порядок и беспорядки

▷ **Определение 1.** *Перестановкой* n элементов (или подстановкой из n элементов) называется биекция множества $\{1,\ldots,n\}$ на себя. Множество всех перестановок n элементов обозначается S_n (или $\mathfrak{S}_n$, или Σ_n).

Запись $\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ b_1\, b_2 \ldots b_n \end{pmatrix}$ обозначает перестановку, переводящую a_i в b_i. Обычно перестановки записывают в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \end{pmatrix}$.

Произведением перестановок называется их композиция как отображений (обозначение: ab). Тождественная перестановка обозначается e.

Задача 1. а) Какие перестановки вершин квадрата осуществляют его симметрии? б*) Любую ли перестановку из $\mathfrak{S}_4$ можно так получить, занумеровав вершины квадрата подходящим образом?

Задача 2. Вычислите а) $\begin{pmatrix} 4\,1\,2\,3 \\ 1\,2\,3\,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,2\,3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}^2$; г) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Задача 3. Верно ли, что для любых перестановок
а) $ae = a = ea$; б) $(ab)c = a(bc)$; в) $aa^{-1} = a^{-1}a = e$; г) $ab = ba$; д) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$?

Задача 4*. Найдите все такие подстановки a, что $ab = ba$ для всех подстановок b.

Задача 5. Решите уравнение $ax = b$; уравнение $xa = b$.

Задача 6. Дайте определение целой степени подстановки так, чтобы выполнялись свойства $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$.

Задача 7. Вычислите а) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{pmatrix}^{100}$; б) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,1\,4 \end{pmatrix}^{-100}$; в) $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5 \\ 4\,5\,2\,1\,3 \end{pmatrix}^{100}$.

▷ **Определение 2.** *Порядком* перестановки a называется наименьшее натуральное число n, такое что $a^n = e$ (обозначение: $n = \operatorname{ord} a$).

Задача 8. а) Любая перестановка имеет порядок.
б) $a^n = e$ тогда и только тогда, когда n делится на $\operatorname{ord} a$.

Задача 9. Найдите порядок перестановки а) $\begin{pmatrix} 1\,2 \ldots n-1\; n \\ 2\,3 \ldots\; n \quad 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n-1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 10*. Какой максимальный порядок может иметь перестановка из $\mathfrak{S}_8$?

▷ **Определение 3.** *Транспозицией* называется перестановка, переводящая все элементы кроме i и j в себя, а i и j меняющая местами. Обозначение: (i, j).

Задача 11. а) Разложите в произведение транспозиций перестановки из задачи 9.
б) Любую перестановку можно разложить в произведение транспозиций.

Задача 12*. Какое минимальное число перестановок нужно, чтобы в виде их произведения можно было записать любую перестановку из $\mathfrak{S}_n$?

▷ **Определение 4.** *Беспорядком* (или инверсией) в перестановке σ называется пара (i, j), такая что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Четность числа беспорядков называется *четностью* перестановки (обозначение: $\bar{\sigma}$).

Задача 13. Выясните, являются четными или нечетными следующие перестановки
а) $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\1\,4\,3\,2\,5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\2\,1\,5\,3\,4\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1\,2\ldots & n-1 & n\\2\,3\ldots & n & 1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\n & n-1 & \ldots & 1\end{pmatrix}$.

Задача 14. а) Как меняется четность перестановки при умножении на транспозицию?
б) Как связана четность произведения перестановок с четностью сомножителей?

Задача 15. Сколько в $\mathfrak{S}_n$ четных перестановок?

Задача 16. а) Если в игре «пятнашки» поменять местами фишки с номерами «14» и «15», то, играя в эту игру, невозможно получить правильное расположение фишек.
б*) Опишите все позиции, из которых правильное расположение фишек получить можно.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Задача 17*. Существует ровно два отображения из перестановок в числа, таких что $f(e) = 1$ и $f(ab) = f(a)f(b)$. А именно, $f(\sigma) = 1$ и $f(\sigma) = (-1)^{\bar{\sigma}}$.

Задача 18*. Каждому из N мудрецов написали на лбу число и выдали две варежки: одну черную и одну белую. По сигналу все мудрецы одновременно надевают варежки. После чего их строят в шеренгу в порядке возрастания написанных на их лбах чисел и просят соседей взяться за руки.

Как мудрецам надевать варежки, чтобы в результате каждая белая варежка взялась за белую, а каждая черная — за черную? (Мудрец видит все числа, кроме своего.)

Графы I

▷ **Определение 1.** *Графом*[9] называется пара (V, E) из конечного множества V и множества E, состоящего из неупорядоченных пар различных элементов V. Элементы множества V называются *вершинами* графа, элементы множества E – *ребрами.*

Задача 1. а) Нарисуйте граф, вершинами которого являются страны, входившие в состав СССР, а ребрами соединены граничащие по суше страны.
б) Нарисуйте граф, вершинами которого являются натуральные числа от 2 до 15, а ребрами соединены различные числа, одно из которых делится на другое.

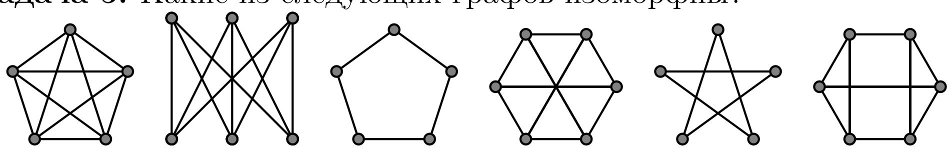
Задача 2. а) В каждой компании из шести человек найдутся либо три попарно знакомых, либо три попарно незнакомых человека.
б) Верно ли это для компании из пяти человек?

Задача 3. Сколько существует графов на множестве вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$? Сколько из них имеют ровно m ребер?

▷ **Определение 2.** Графы $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ и $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными*, если существует такая биекция $f: V_1 \to V_2$, что вершины A и B графа Γ_1 соединены ребром тогда и только тогда, когда вершины $f(A)$ и $f(B)$ соединены ребром в графе Γ_2.

Задача 4. Изоморфизм графов — отношение эквивалентности.

Задача 5. Какие из следующих графов изоморфны?



▷ Первый слева граф называется K_5 (полный граф с пятью вершинами), второй – $K_{3,3}$ (полный двудольный граф с тремя вершинами в каждой доле, «домики и колодцы»).

Задача 6. а) Сколько, с точностью до изоморфизма, существует графов с не более чем четыремя вершинами? б) ровно с пятью вершинами?

▷ **Определение 3.** *Путем* в графе называется последовательность вершин $v_1, v_2, \ldots, v_k$, в которой каждая вершина соединена ребром со следующей (говорят, что путь *проходит* по этим ребрам). Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем.

Задача 7. Каких графов с n пронумерованными вершинами больше, связных или несвязных?

▷ **Определение 4.** *Степенью* (или *валентностью*) вершины A называется число выходящих из нее ребер. Обозначение: $\deg A$.

Задача 8. Существует ли граф с хотя бы двумя вершинами, в котором степени всех вершин различны?

Задача 9. Существует ли граф
а) с 1000 ребер, в котором степень каждой вершины равна 57?
б*) с n вершинами, в котором степень каждой вершины равна d?

[9]Точнее, неориентированным графом без петель и кратных ребер

▷ **Определение 5.** *Циклом* в графе называется путь с совпадающими первой и последней вершиной, который проходит по каждому ребру не более одного раза. Связный граф без циклов называется *деревом*.

Задача 10. а) У дерева есть вершина степени один. б) Таких вершин хотя бы две.

Задача 11. а) Сколько ребер в дереве с n вершинами?
б) Верно ли, что любой граф с n вершинами, в котором столько ребер — дерево?

Задача 12. Из любого связного графа можно выкинуть часть ребер так, чтобы получилось дерево (“остовное дерево”).

Задача 13* (теорема Кэли). Сколько у полного графа с n вершинами остовных деревьев? (Указание: начните с $n = 2$, 3, 4...)

Задача 14. Какое максимальное число ребер может быть в графе из 1000 вершин, если его вершины можно раскрасить а) в 2 цвета; б) в 5 цветов так, что концы каждого ребра покрашены в разные цвета?

▷ **Определение 6.** Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на две части так, что все ребра соединяют вершины из разных частей.

Задача 15. а) В двудольном графе нет циклов нечетной длины. б) Верно ли обратное?

Задача 16* (теорема Холла). Если в двудольном графе любые k элементов первой доли связаны по крайней мере с k элементами второй доли, то каждой вершине первой доли можно поставить в соответствие соединенную с ней вершину второй доли так, чтобы эти вершины были различны.

Задача 17. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более 198 перелетов.

Задача $\mathbf{17\frac{1}{2}}$. Хозяйка собирается принимать гостей и испекла для них пирог. Она знает, что придут либо ровно p, либо ровно q гостей, причем p и q взаимно просты. На какое минимальное число (не обязательно равных) кусков можно разрезать пирог, чтобы его в любом случае можно было разделить между гостями поровну?

Задача 18. Из связного графа можно выбросить вершину со всеми исходящими из нее ребрами так, чтобы он остался связным.

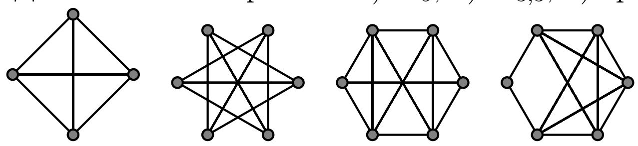
▷ **Определение 7.** Граф называется *планарным* (или *плоским*), если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы ребра не пересекались. Части, на которые ребра при этом делят плоскость, называются *гранями*.

Количества вершин, ребер и граней графа далее обозначаются V, E и F соответственно (от *vertices*, *edges* и *faces*).

Задача 19 (формула Эйлера).
а) Для связного планарного графа $V - E + F = 2$.
б) Чему равно $V - E + F$ для несвязного графа?
в) Чему равно $V - E + F$ для выпуклого многогранника?

Задача 20. Докажите, что для любого планарного графа
а) если $E > 1$, то $2E \geqslant 3F$;
б) если граф двудолен и $E > 1$, то $E \geqslant 2F$;
в) если $V > 2$, то $E \leqslant 3V - 6$ (для любого ли $V > 2$ может достигаться равенство)?

Задача 21. Планарны ли а) K_5; б) $K_{3,3}$; в) графы из задач 1 и 5; г) графы на рисунке?



Задача 22*. Граф, имеющий 10 вершин степени 5, не планарен.

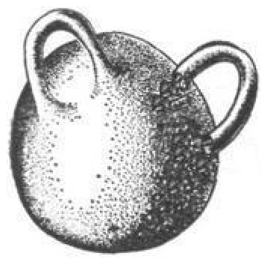
Задача 23. а) В планарном графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.
б) Вершины планарного графа можно покрасить в 6 цветов так, что концы каждого ребра покрашены в разные цвета. в*) Тот же вопрос для 5 цветов.
г*) Грани планарного графа можно покрасить в 5 цветов так, что граничащие по ребрам грани покрашены в разные цвета. д**) Тот же вопрос для 4 цветов.

Задача 24*. Любой планарный граф можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра были непересекающимися отрезками.

▷ **Определение 8.** Два графа называются *гомеоморфными*, если один из них можно получить из другого применением нескольких операций вида: 1) заменить вершину степени 2 вместе с исходящими из нее ребрами на ребро, соединяющее ее соседей; 2) заменить ребро на вершину степени 2, соединенную с концами удаляемого ребра.

Задача 25* (теорема Понтрягина–Куратовского). Докажите, что граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Задача 26. Нарисуйте граф K_5 на торе. Чему для него равно число $V - E + F$?



Задача 27*. Докажите, что число $V - E + F$ не зависит от выбора графа, вложенного в сферу с g ручками (сформулируйте самостоятельно, какие графы здесь следует считать вложенными). Это число называется *эйлеровой характеристикой* сферы с g ручками.

Задача 28. а) Чему равна эйлерова характеристика сферы, тора, сферы с двумя ручками? б*) А сферы с g ручками?

Цикл 2. Поля, действительные числа, многочлены, асимптотические неравенства (8–9 кл.)

Поля

▷ **Определение 1.** Набор $(\mathcal{F}, +, \cdot, 0, 1)$, где $\mathcal{F}$ — множество, "$+$" и "$\cdot$" — отображения $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, а 0 и 1 — различные элементы множества $\mathcal{F}$, называется *полем*, если выполнены следующие условия ("аксиомы"):

A_1) $\forall a, b, c \in \mathcal{F}\ (a+b)+c = a+(b+c)$ *("ассоциативность сложения")*;
A_2) $\forall a \in \mathcal{F}\ a+0 = a = 0+a$;
A_3) $\forall a, b \in \mathcal{F}\ a+b = b+a$ *("коммутативность сложения")*;
A_4) $\forall a \in \mathcal{F}\ \exists a' \in \mathcal{F} : a+a' = 0 = a'+a$ *("существование противоположного")*;
D) $\forall k, x, y \in \mathcal{F}\ k(x+y) = kx+ky, (x+y)k = xk+yk$ *("билинейность умножения")*;
M_1) $\forall a, b, c \in \mathcal{F}\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *("ассоциативность умножения")*;
M_2) $\forall a \in \mathcal{F}\ a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$;
M_3) $\forall a, b \in \mathcal{F}\ a \cdot b = b \cdot a$ *("коммутативность умножения")*;
M_4) $\forall a \in \mathcal{F} \setminus \{0\}\ \exists a' \in \mathcal{F} : a \cdot a' = 1 = a' \cdot a$ *("существование обратного")*.

Если отбросить последнее условие — получится определение *(коммутативного) кольца.*

Задача 1. а) Для любого элемента $a \in \mathcal{F}$ элемент a' из аксиомы A_4 единственен (обозначение: $-a$).
б) $-(a+b) = (-a)+(-b)$.

Задача 2. а) Для любого элемента $a \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ элемент a' из аксиомы M_4 единственен (обозначение: a^{-1}).
б) Сколько решений может иметь в поле линейное уравнение ($ax = b$)?

Задача 3. а) $a \cdot 0 = 0$; б) $(-1) \cdot a = -a$; в) $(-a)^2 = a^2$.

Задача 4. а) В поле "нет делителей нуля": если $a \cdot b = 0$, то либо $a = 0$, либо $b = 0$.
б*) Если множество $\mathcal{F}$ конечно, то аксиому M_4 в определении поля можно заменить на отсутствие делителей нуля. (Существенна ли конечность множества $\mathcal{F}$?)

Задача 5. а) Сколько решений в поле может иметь квадратное уравнение?
б*) Сколько решений в поле может иметь уравнение степени n?

Задача 6. а) Выпишите таблицы сложения и умножения в $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ для $n = 2, 3, 4, 5$.
б) $\mathbb{F}_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times, [0], [1])$ — поле. (Существенна ли простота p?)

Задача 7*. Пусть A — множество, $P(A)$ — множество его подмножеств. Является ли а) $(P(A), \cup, \cap, \varnothing, A)$, б) $(P(A), \triangle, \cap, \varnothing, A)$ полем?

Задача 8. В любом поле $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$; $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$.

Задача 9. Рассмотрим множество F формальных записей вида $\dfrac{a}{b}$, где a и b — целые числа, $b \neq 0$.
а) Введем на F операции сложения и умножения как в предыдущей задаче. Будет ли результат (при подходящем выборе нуля и единицы) полем?

б) Рассмотрим на F отношение $\dfrac{a}{b} \sim \dfrac{a'}{b'} \Leftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : ka = la', kb = lb'$. Докажите, что это отношение эквивалентности, а операции из предыдущего пункта спускаются на фактормножество.
в) Результат является полем (это поле называется *полем рациональных чисел* и обозначается $\mathbb{Q}$).

▷ **Определение 2.** *Изоморфизом* полей $(K, +_K, \cdot_K, 0_K, 1_K)$, $(L, +_L, \cdot_L, 0_L, 1_L)$ называется биекция $f\colon K \to L$ такая, что
$f(0_K) = 0_L$, $f(a +_K b) = f(a) +_L f(b)$ (согласованность со сложением);
$f(1_K) = 1_L$, $f(a \cdot_K b) = f(a) \cdot_L f(b)$ (согласованность с умножением).
Изоморфизм поля с собой называется *автоморфизмом.*

Задача 10*. Любое поле содержит либо подполе, изоморфное $\mathbb{F}_p$ (в этом случае говорят, что поле имеет *характеристику* p), либо подполе, изоморфное $\mathbb{Q}$ (в этом случае говорят, что поле имеет нулевую характеристику).

Задача 11*. Существует ли поле из а) 4; б) 6; в) 8; г) 9 элементов?

▷ **Определение 3.** Пусть $\mathcal{F}$ — поле, d — его элемент. Через $\mathcal{F}(\sqrt{d})$ будем обозначать множество формальных записей вида $a + b\sqrt{d}$ $(a, b \in \mathcal{F})$ с естественными операциями (а именно, $(a + b\sqrt{d}) + (a' + b'\sqrt{d}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{d}$; $(a + b\sqrt{d}) \cdot (a' + b'\sqrt{d}) = (aa' + dbb') + (ab' + a'b)\sqrt{d}$).

Задача 12*. а) При каких d будет полем $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$?
б) При каких p будем полем $\mathbb{F}_p(\sqrt{-1})$?

Задача 13*. Найдите все автоморфизмы полей а) $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Q}$; б) $\mathbb{F}_p(\sqrt{-1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.

Действительные числа I: Упорядоченные поля

▷ **Определение 1.** Отношение $\preccurlyeq$ на множестве M называется *отношением (частичного) порядка*, если оно
0) *рефлексивно* ($a \preccurlyeq a$),
1) *транзитивно* (если $a \preccurlyeq b$ и $b \preccurlyeq c$, то $a \preccurlyeq c$),
2) *антисимметрично* (если $a \preccurlyeq b$ и $b \preccurlyeq a$, то $a = b$).

Отношение порядка называется *отношением линейного порядка*, если, кроме того, любые два элемента сравнимы (либо $a \preccurlyeq b$, либо $b \preccurlyeq a$).

Задача 1. Какие из следующих отношений являются отношениями линейного порядка на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?
а) $(a, b) \preccurlyeq (a', b')$, если $a \leqslant a'$ и $b \leqslant b'$;
б) $(a, b) \preccurlyeq (a', b')$, если либо $a < a'$, либо ($a = a'$ и $b \leqslant b'$) *(лексикографический порядок)*;
в) $(a, b) \preccurlyeq (a', b')$, если $\max(a, b) \leqslant \max(a', b')$;
г) $(a, b) \preccurlyeq (a', b')$, если либо $a + b < a' + b'$, либо ($a + b = a' + b'$ и $a \leqslant a'$)?

Задача 2. а) В любом конечном линейно упорядоченном множестве есть наибольший элемент.
б) Сколько линейных порядков существует на n-элементном множестве?

▷ **Определение 2.** Пара из поля и линейного порядка на нем называется *упорядоченным полем*, если выполнены следующие условия согласованности порядка с операциями:
A) если $a \leqslant b$, то $a + x \leqslant b + x$;
M) если $0 \leqslant a$ и $0 \leqslant b$, то $0 \leqslant ab$.

Задача 3. а) Если $a \leqslant b$ и $a' \leqslant b'$, то $a + a' \leqslant b + b'$.
б) Если $0 \leqslant a \leqslant b$ и $0 \leqslant a' \leqslant b'$, то $aa' \leqslant bb'$.

Задача 4. В упорядоченном поле а) $0 \leqslant a^2$; б) $0 \leqslant 1$.

Задача 5. а) Упорядоченное поле бесконечно.
б) Упорядоченное поле содержит (копию) $\mathbb{Q}$ (т. е. имеет нулевую характеристику).

Задача 6. а) Задайте на $\mathbb{Q}$ структуру упорядоченного поля. Единственна ли она?
б*) При каких d на поле $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ существует структура упорядоченного поля? Единственна ли она?

▷ **Определение 3.** Подмножество A упорядоченного множества M называется *ограниченным сверху*, если $\exists S \in M : \forall a \in A\ a \preccurlyeq S$.

Задача 7. Подмножество A упорядоченного множества Mтаково, что $\forall a \in A\, \exists S \in M : a \preccurlyeq S$. Верно ли что A ограничено сверху?

Задача 8. Для каких из порядков из задачи 1 подмножество $\{0\}\times\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ограничено?

▷ **Определение 4.** Упорядоченное поле называется *архимедовым*, если натуральные числа в нем неограничены сверху.

Задача 9*. Приведите пример неархимедова поля.

Задача 10. В архимедовом поле “рациональные числа всюду плотны”: между любыми двумя элементами поля лежит рациональное число.

Действительные числа II: Полнота

▷ Пусть A и B — подмножества линейно упорядоченного множества $(M, \preccurlyeq)$. Условимся писать $A \preccurlyeq B$, если $a \preccurlyeq b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$.

Будем говорить, что элемент x *разделяет* множества A и B, если $A \preccurlyeq x \preccurlyeq B$ (другими словами, если x является верхней гранью множества A и нижней множества B).

▷ **Определение 1.** Упорядоченное множество $(M, \preccurlyeq)$ называется *полным*, если для любых непустых подмножеств A и B, таких что $A \preccurlyeq B$, существует разделяющий их элемент.

Задача 1. Какие из следующих линейно упорядоченных множеств полны?
а) $\{1, \ldots, n\}$; б) $\mathbb{Z}$; в) $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$; г) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; д) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
е*) (бесконечные) последовательности нулей и единиц;
ж*) финитные последовательности нулей и единиц.
(В последних четырех пунктах порядок лексикографический.)
Полно ли множество функций из $\mathbb{N}$ в себя с порядком
з*) $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \forall n\ f(n) \leqslant g(n)$; и*) $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \exists N : \forall n \geqslant N\ f(n) \leqslant g(n)$?

▷ **Определение 2.** Наименьшая из верхних граней множества A называется его *точной верхней гранью*. Обозначение: $\sup A$ (“supremum”).

Аналогичным образом определяется $\inf A$ (“infimum”), точная нижняя грань множества A.

Задача 2. Запишите при помощи кванторов, что значит, что а) $c = \sup A$; б) $c \neq \sup A$.

Задача 3*. Упорядоченное множество полно тогда и только тогда, когда любое его ограниченное сверху непустое подмножество имеет точную верхнюю грань.

Соглашение. Утверждением последней задачи можно далее пользоваться без доказательства.

Задача 4. Найдите (в $\mathbb{Q}$) а) $\inf\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$; б) $\sup\{n/n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$;
в) $\sup\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$; г*) $\sup\left\{1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

Задача 5. Верно ли, что для любых непустых ограниченных подмножеств A и B упорядоченного поля а) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$; б) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$?
(Напомним, что $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$; $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$.)

Задача 6. Упорядоченное поле $\mathbb{Q}$ не полно.
Указание: рассмотрите множество $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ и докажите, что его точная верхняя грань является квадратным корнем из двух.

Задача 7*. а) Полное упорядоченное поле единственно.
б) Полное упорядоченное поле существует.

Соглашение. Утверждением последней задачи можно далее пользоваться без доказательства.

▷ **Определение 3.** Полное упорядоченное поле называется *полем действительных чисел*. Обозначение: $\mathbb{R}$.

Задача 8*. Дайте определение а) рациональной; б) произвольной степени положительного действительного числа. Докажите его корректность. Проверьте естественные свойства возведения в степень ($(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$, $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta$).

▷ **Определение 4.** *Отрезком* упорядоченного множества $(M, \preccurlyeq)$ называется множество $[a; b] = \{x \in M : a \preccurlyeq x \preccurlyeq b\}$.

Задача 9 (принцип вложенных отрезков). а) Любая последовательность (I_n) вложенных (т. е. $I_n \supset I_{n+1}$) отрезков действительных чисел имеет общий элемент.
б) Этот элемент единственен, если и только если точная нижняя грань длин этих отрезков равна нулю.

Задача 10. а) Действительные числа — архимедово поле.
б) Произвольное действительное число α может быть сколь угодно хорошо приближено рациональным: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, {}^p\!/_q \in \mathbb{Q} : |\alpha - {}^p\!/_q| < \varepsilon$.

Задача 11. а) Любое действительное число является единственной общей точкой некоторой последовательности вложенных отрезков с рациональными концами.
б) ...причем первый отрезок можно выбрать единичным с целыми концами, а каждый следующий — одной из половин предыдущего (“двоичная запись действительного числа”). Единственным ли способом это можно сделать?
в*) Действительные числа равномощны множеству $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ последовательностей нулей и единиц.

Задача 12. Пусть S — некоторое множество действительных чисел. Рассмотрим следующую игру (“игра Банаха–Мазура для S”). Двое по очереди выбирают отрезки ненулевой длины так, что каждый следующий отрезок строго вложен в предыдущий. Если пересечение получившейся (после счетного числа ходов) последовательности вложенных отрезков состоит ровно из одной точки, лежащей в S, то выиграл первый; в противном случае — второй.
а) Множество S конечно, второй может выбирать только одну из двух половин отрезка. Предъявите выигрышную стратегию для второго игрока.
б) $S = \mathbb{Q}$. Предъявите выигрышную стратегию для одного из игроков.
в**) Для любого ли подмножества S действительных чисел один из игроков имеет выигрышную стратегию?

Задача 13. Множество действительных чисел несчетно.

Задача 14*. а) Архимедово упорядоченное поле, в котором выполнен принцип вложенных отрезков, полно.
б*) Существенно ли требование архимедовости?

Задача 15*. На поле существует архимедов порядок тогда и только тогда, когда оно изоморфно подполю действительных чисел.

Дополнительная часть: Дедекиндовы сечения

▷ **Определение 5.** Пусть $(M, \preccurlyeq)$ — линейно упорядоченное множество. Будем говорить, что пара его непустых подмножеств L и R является *дедекиндовым сечением*, если L — множество всех нижних граней множества R, а R — множество всех верхних граней множества L (обозначение: $L \mid R$).

Задача 16. а) Для любого дедекиндова сечения $L \mid R$
— либо найдется такой элемент $x \in M$, что $L = \{m \in M \mid m \preccurlyeq x\}$, $R = \{m \in M \mid x \preccurlyeq m\}$ («тривиальное сечение»),
— либо для множеств L и R не существует разделяющего элемента («щель»).
б) Для любых дедекиндовых сечений $L \mid R$ и $L' \mid R'$
— либо $L \subset L'$, $R \supset R'$ («$L \mid R \preccurlyeq L' \mid R'$»),
— либо $L \supset L'$, $R \subset R'$ («$L' \mid R' \preccurlyeq L \mid R$»).

Задача 17. а) Любая пара подмножеств, такая что $L \preccurlyeq R$, может быть увеличена до дедекиндова сечения. (Единственным ли способом можно это сделать?)
б) Если в упорядоченном множестве нет щелей, то оно полно.

▷ **Определение 6.** Множество $\widehat{M}$ дедекиндовых сечений множества M с порядком из предыдущей задачи называется *пополнением по Дедекинду* упорядоченного множества M. (Элементы M при этом отождествляются с тривиальными сечениями.)

Задача 18. Опишите упорядоченное множество $\widehat{M}$ для а) упорядоченных множеств из первой задачи; б) объединения двух интервалов в $\mathbb{R}$.

Задача 19. а) $\widehat{M}$ полно. б) M *плотно* в $\widehat{M}$ (т. е. любой элемент из $\widehat{M}$ является точной нижней гранью какого-то подмножества из M и точной верхней гранью какого подмножества из M).

Задача 20*. *Пополнением* упорядоченного множества M называется его вложение в полное упорядоченное множество в качестве плотного подмножества.
а) Любое монотонное отображение из множества M в полное упорядоченное множество T можно (монотонно) продолжить на пополнение множества M.
б) Пополнение единственно с точностью до изоморфизма.

Задача 21. а) Определите на множестве $\widehat{\mathbb{Q}}_{>0}$ дедекиндовых сечений *положительных* рациональных чисел сложение и умножение.
б) $\widehat{\mathbb{Q}}$ является полным упорядоченным полем (т. е. полем действительных чисел — в частности, действительные числа существуют).

Задача 22*. Что произойдет, если попытаться пополнить неархимедово поле? (Не получим ли мы полного неархимедова поля?)

Многочлены I: Коэффициенты и значения

▷ **Определение 1.** *Монóмом* от одной переменной с коэффициентами в поле K называется запись вида ax^n (n — целое неотрицательное число, a — элемент поля K, а x — формальный символ) с точностью до отождествления $0x^n = 0x^m$. При этом вместо ax^0 пишут просто a.

Кольцом многочленов от одной переменной над полем K называется множество $K[x]$ конечных формальных сумм мономов[1] с естественными операциями.

Задача 1. а) Дайте определение суммы и произведения многочленов.
б*) Многочлены действительно образуют кольцо[2].

Задача 2. Вычислите $(x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 6(x-1) + 4$.

Задача 3. Для многочлена $(...((x-2)^2-2)^2...-2)^2$ (всего 200 пар скобок) вычислите а) свободный член; б) коэффициент при x.

▷ **Определение 2.** *Значением* монома ax^n в точке x_0 называется число ax_0^n. Значением многочлена P в точке x_0 называется сумма значений его мономов в этой точке.

Если $P(x_0) = 0$, то говорят, что число x_0 — *корень* многочлена P.

Задача 4. Пусть $P(x) = (1+\sqrt{2}x)^{100}$. Докажите, что $P(1) + P(-1)$ — целое число.

Задача 5. Вычислите $\binom{100}{0} + 4\binom{100}{2} + \cdots + 2^{100}\binom{100}{100}$.

Задача 6. Докажите, что у многочлена
а) $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{2011})(1 - x + x^2 - \cdots + x^{2010} - x^{2011})$;
б) $(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + 2012x^{2011})(1 - 2x + 3x^2 - \cdots + 2011x^{2010} - 2012x^{2011})$
все коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю.

Задача 7. Существует ли непостоянный многочлен с целыми коэффициентами, все значения которого в целых точках — простые числа?

Задача 8. Пусть P — ненулевой многочлен с вещественным коэффициентами. Могут ли все коэффициенты многочлена $P(x)(x-1)$ быть неотрицательны?

▷ **Определение 3.** Говорят, что моном ax^n ($a \neq 0$) имеет *степень* n. Степенью многочлена называется наибольшая из степеней входящих в него (ненулевых) мономов (степень нулевого многочлена будем считать равной $-\infty$). Обозначение: $\deg P$.

Задача 9. Пусть $\deg P = n$, $\deg P = m$. Что можно сказать о степени многочлена $P+Q$? А многочлена $P \cdot Q$?

Задача 10. а) Пусть A и B — многочлены над полем K, $A \neq 0$. Тогда B ровно одним образом можно представить в виде $AQ + R$, так что $Q, R \in K[x]$, $\deg R < \deg A$.
б) Верно ли это, если K — не поле, а, например, кольцо целых чисел?

▷ **Определение 4.** Многочлены Q и R из предыдущей задачи называются, соответственно, *неполным частным* и *остатком* при делении многочлена B на многочлен A.

Задача 11. а) При каких p и q многочлен $x^4 + 1$ делится на многочлен $x^2 + px + q$?
б) Разложите многочлен $x^4 + 1$ на множители.

---

[1]При этом накладывается соотношение дистрибутивности: $ax^n + bx^n = (a+b)x^n$.
[2]Этим утверждением далее можно пользоваться без доказательства.

Задача 12. а) Разделите с остатком x^{100} на $x-1$ и на $x+1$ *(указание: делить можно в столбик)*.
б) Сформулируйте и докажите признаки делимости на $x-1$ и на $x+1$.

Задача 13 (теорема Безу). Остаток от деления многочлена на $x-a$ есть значение этого многочлена в точке a.

Задача 14. Если $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — различные корни многочлена P, то он делится на многочлен $(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)$.

Задача 15. Многочлен степени n имеет не более n корней.

Задача 16. а) Если два многочлена степени не выше n совпадают в $n+1$ точке, то они равны.
б*) Докажите, что для любого набора из $n+1$ точки существует многочлен степени не выше n, принимающий в этих точках предписанные значения; найдите для этого многочлена явную формулу.

Задача 17*. а) Разложите многочлен $x^p - x$ над полем $\mathbb{F}_p$ на линейные множители.
б) Исходя из полученного разложения вычислите коэффициент при x. Что за тождество получается?

Задача 18*. Многочлен с целыми коэффициентами в трех целых точках принимает значения 2. Может ли он принимать в какой-то целой точке значение 3?

Задача 19*. Если многочлен принимает целые значения в целых точках, то его коэффициенты — рациональные числа.

Многочлены II: Неприводимые многочлены и остатки

▷ **Определение 1.** Непостоянный многочлен называется *неприводимым*, если он не может быть разложен в произведение многочленов меньших степеней.

Задача 1. а) Любой линейный многочлен неприводим.
б) Неприводимый многочлен степени больше 1 не имеет корней. (Верно ли обратное утверждение?)

Задача 2. а) Многочлен x^3-2 неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.
б*) При каких d многочлен $\frac{x^d-1}{x-1}$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$?
в*) Есть ли в $\mathbb{Q}[x]$ неприводимый многочлен степени 2011?

▷ **Определение 2.** Если любой общий делитель многочленов P и Q делит их общий делитель S, то говорят, что S – *наибольший общий делитель* многочленов P и Q.

Если НОД двух многочленов равен 1, то говорят, что они *взаимно просты.*

Задача 3. Вычислите НОД (в $\mathbb{R}[x]$)
а) $x^{2011}+1$ и x^2+2x+1; б) $x^{2011}+x-1$ и x^3-x^2-3x-1;
в) $x^{20}+1$ и $x^{15}+1$; г) $x^{57}+1$ и x^2-x+1;
д) x^4+4x^2+3 и $x^6+5x^4+6x^2+1$.

Задача 4. Наибольший общий делитель двух многочленов существует и единственен с точностью до умножения на ненулевую константу.

▷ **Определение 3.** Через (P) будем обозначать множество многочленов, кратных P.

Задача 5. а) Существует линейное представление НОДа.
б) Если многочлены P и Q взаимно просты, то $(P)\cap(Q)=(PQ)$.
в) Сформулируйте и докажите основную теорему арифметики для кольца многочленов.

Задача 6. Могут ли два взаимно простых многочлена из $\mathbb{Q}[x]$ иметь общий иррациональный корень?

▷ **Определение 4.** Говорят, что корень x_0 многочлена P имеет *кратность* n, если наибольшая степень $(x-x_0)$, на которую делится P, равна n.

Задача 7. Утверждение задачи 15 предыдущего листка останется верным, даже если считать корни с кратностями.

Задача 8*. Может ли неприводимый многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ иметь кратный иррациональный корень?

▷ **Определение 5.** Фактормножество кольца многочленов $K[x]$ по отношению эквивалентности «$A\sim B \Leftrightarrow A-B\in(P)$» будем обозначать через $K[x]/(P)$.

Задача 9. Сформулируйте и докажите китайскую теорему об остатках для многочленов.

Задача 10. а) Выведите из китайской теоремы об остатках существование многочлена, принимающего в данных точках данные значения.
б) Найдите явную формулу для многочлена степени n, принимающего значения d_i в точках x_i $(i=0,\dots,n)$.

Задача 11*. а) На множество $K[x]/(P)$ корректно спускается сложение и умножение многочленов, превращая его в кольцо[3].
б) Пусть $P = x^2 - d$. Тогда кольцо $K[x]/(P)$ изоморфно кольцу $K(\sqrt{d})$ из определения 3 листка «Поля».
в) Пусть поле K конечно и в нем q элементов, а степень многочлена P равна n. Сколько элементов в кольце $K[x]/(P)$?

Задача 12*. Является ли кольцо $\mathbb{R}[x]/(P)$ полем при
а) $P = x^2$; б) $P = x^2 + 1$; в) $P = x^2 - 1$?

Задача 13*. Выясните, какому из колец из предыдущей задачи изоморфно кольцо $\mathbb{R}[x]/(ax^2 + bx + c)$ в зависимости от a, b и c.

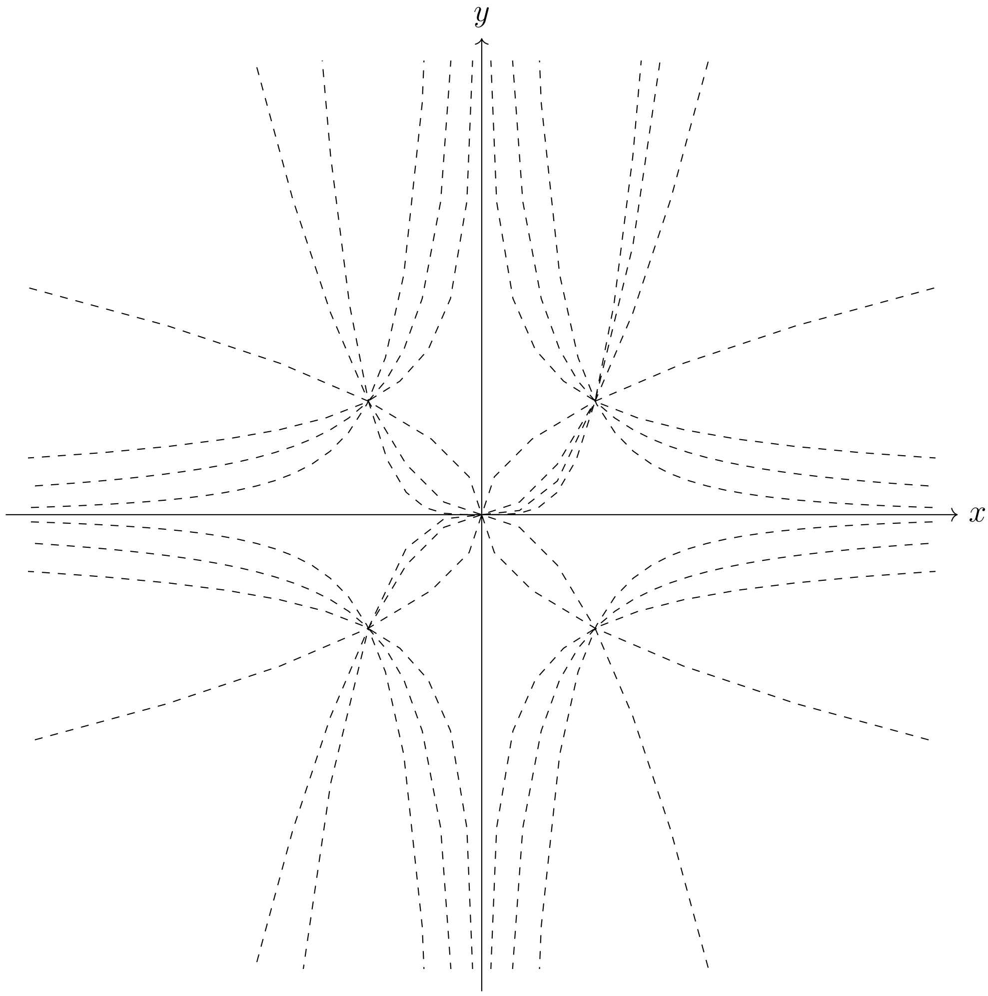
Задача 14*. Найдите такие p и P, что кольцо $\mathbb{F}_p[x]/(P)$ является полем из а) 9; б) 27; в) 2011^2 элементов.

Задача 15*. Сколько в $\mathbb{F}_p[x]$ неприводимых многочленов степени d? (Например, в каждой ли степени есть неприводимый многочлен?)

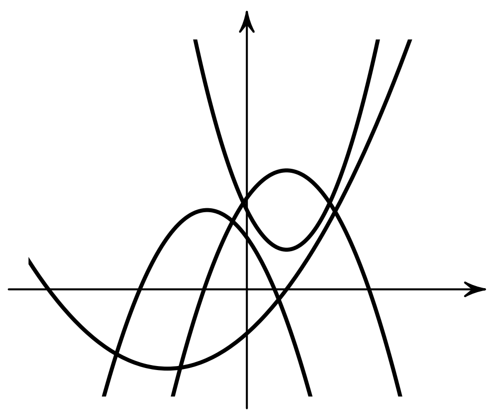
[3]Этим утверждением можно далее пользоваться без доказательства.

Контурная карта по многочленам

Задача 1. На контурной карте ниже обведите разными цветами графики функций а) x^2, x^3, x^4; б) $\sqrt{x}$; $-\sqrt{x}$; в) $1/x$; $1/x^2$; $1/\sqrt{x}$.

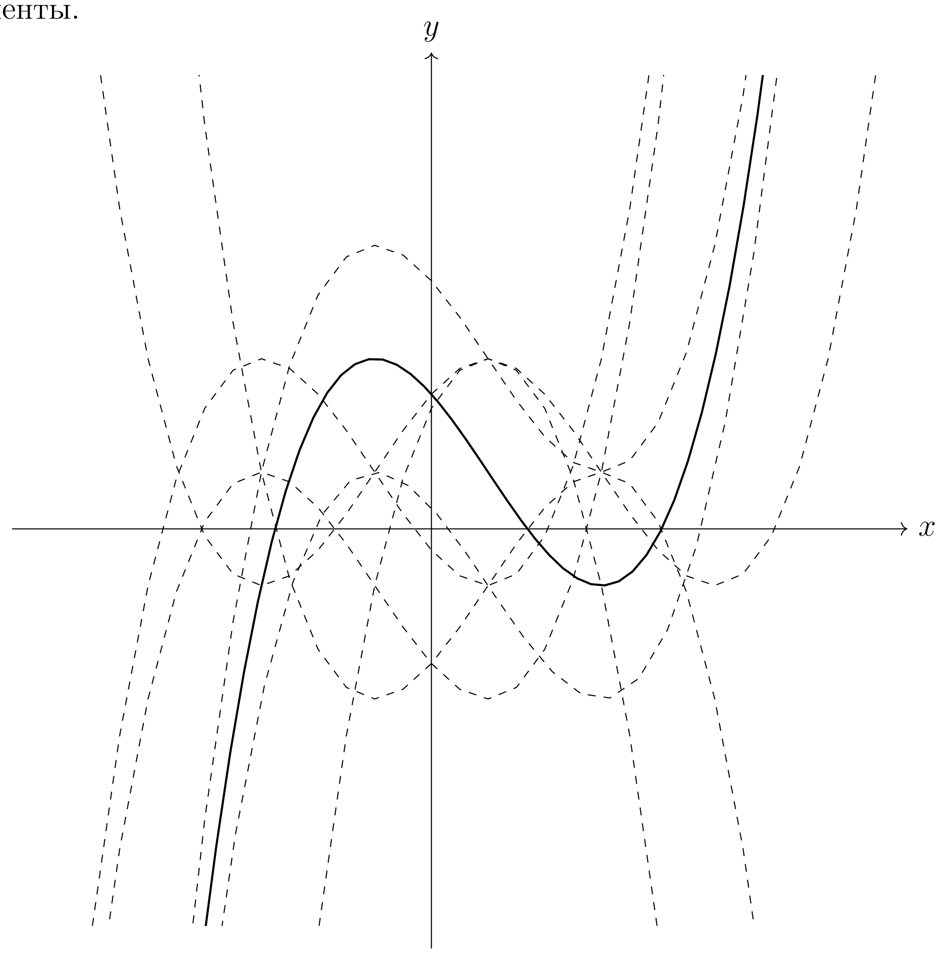


Задача 2. На рисунке изображены графики квадратичных функций вида $ax^2 + bx + c$. Какие знаки имеют числа a, b и c для каждой из этих функций?



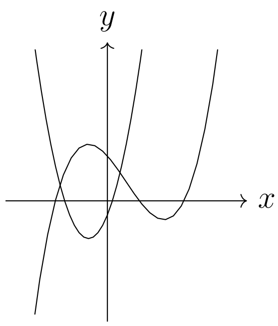
▷ **Определение 1.** Многочлен третьей степени называется *кубической параболой.*

Задача 3. Ниже нарисован график некоторой кубической параболы f. Обведите разными цветами (или нарисуйте отдельно) графики
а) $y = f(x) + 1$, $y = f(x) - 1$, $y = f(x+1)$, $y = f(x-1)$;
б) $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$.
в) Зная, что коэффициент при x^2 у f нулевой, выясните, какие знаки имеют остальные коэффициенты.



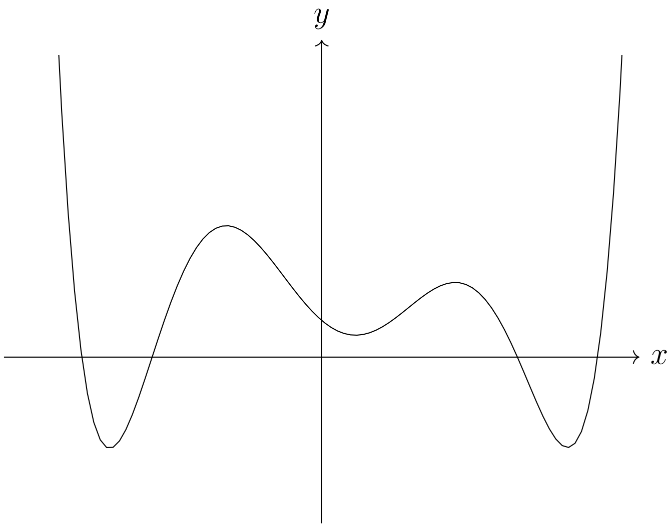
Задача 4. а) Нарисуйте графики функций $x^3 + x$ и $x^3 - x$.
б) Любая ли кубическая парабола имеет центр симметрии?
в*) Как вообще может выглядит график кубической параболы? (Когда на нем есть локальные экстремумы? Может ли этих экстремумов быть больше двух?)

Задача 5. Может ли парабола пересекаться с кубической параболой по 2, 3, 4 точкам?



Задача 6*. Изобразите на плоскости множество точек а) $y^2 = x^3 + x$; б) $y^2 = x^3 - \frac{3}{4}x$; в) $y^2 = x^3 - \frac{3}{4}x + 1$.
г) Будем рисовать кривые $y^2 = x^3 - \frac{3}{4}x + c$ при разных c. При маленьких положительных c она выглядит как кривая из пункта б), при больших — как кривая из пункта в), а в некоторой точке «пункт б) превращается в пункт в)». В какой? Как выглядит соответствующая кривая?

Задача 7. Какую степень имеет функция, график которой изображен ниже: 4, 5, 6 или 7?



Анализ I: Асимптотические неравенства

▷ **Определение 1.** Будем говорить, что одна последовательность *асимптотически* не больше другой, если соответствующее неравенство выполнено для всех членов последовательностей, начиная с некоторого:

$$(x_n) \preccurlyeq (y_n) \Leftrightarrow \exists N : \forall n \geqslant N\ x_n \leqslant y_n.$$

Задача 1. Является ли $\preccurlyeq$ отношением линейного порядка на множестве всех последовательностей действительных чисел?

Задача 2. Что больше асимптотически:
а) n^2 или $100n$; б) $(n+100)^2$ или n^3-2n; в) 2011^n или $n!$; г) $\sqrt{n}$ или $n^{(-1)^n}$?

▷ **Определение 2.** Будем говорить, что последовательность (x_n) *асимптотически существенно* меньше последовательности (y_n), если асимптотическое неравенство выполняется и после умножения на любую константу:

$$(x_n) \ll (y_n) \Leftrightarrow \forall C \in \mathbb{R}\ (Cx_n) \preccurlyeq (y_n).$$

Вместо $(x_n) \ll (y_n)$ часто пишут $x_n = o(y_n)$.

Задача 3. Пусть $(X_n) \gg (a_n)$, $(X_n) \gg (b_n)$. Верно ли, что а) $(X_n) \gg (a_n+b_n)$; б) $(X_n) \gg (a_nb_n)$?

Задача 4. Сформулируйте и докажите правило асимптотического сравнения произвольных многочленов. (Верно ли, например, что если $\deg P < \deg Q$, то $P \preccurlyeq Q$?)

Задача 5. а) Любой многочлен нечетной степени принимает как положительные, так и отрицательные значения. б*) Любой многочлен нечетной степени имеет корень.

▷ **Определение 3.** Последовательность называется *бесконечно большой*, если она асимптотически больше любого действительного числа (т. е. если она асимптотически существенно больше единицы).

Задача 6. Докажите, что бесконечно большая последовательность не ограничена сверху. Верно ли обратное?

Задача 7. Является ли бесконечно большой а) сумма; б) произведение двух бесконечно больших последовательностей? разность в) двух бесконечно больших; г) бесконечно большой и ограниченной последовательностей;

Задача 8. Сформулируйте условие на коэффициенты, при котором последовательность $x_n = \frac{a_kn^k+\ldots+a_1n+a_0}{b_kn^k+\ldots+b_1n+b_0}$ бесконечно велика.

Задача 9*. *Рациональные функции* (т. е. функции вида P/Q, где P и Q — многочлены) с асимптотическим отношением порядка образуют неархимедово упорядоченное поле.

Задача 10. Докажите, что $(1+x)^\alpha \geqslant 1+\alpha x$ при $x > -1$ для а) натуральных α; б*) рациональных $\alpha > 1$; в*) действительных $\alpha > 1$ (“неравенство Бернулли”).

Задача 11. Что асимптотически больше: а) $1{,}001^n$ или n^{1000}; б) $0{,}99^n$ или n^{-10}?

Задача 12. а) Функция a^n не равна никакому многочлену. б) Никакая нетривиальная линейная комбинация ненулевых показательных функций не равна нулю.

Задача 13. Пусть одна последовательность растет быстрее другой в том смысле, что а) $a_{n+1}/a_n \prec b_{n+1}/b_n$; б) $a_{n+1}-a_n \prec b_{n+1}-b_n$. Верно ли, что $a_n \prec b_n$?

Краткая программа зачета (v14, февраль 2012)

1. Поля

1.1. Определение поля. Отсутствие в поле делителей нуля. Остатки по простому модулю как пример поля. Пример поля из 4 элементов.
1.2. Поле частных кольца: построение поля рациональных чисел и поля рациональных функций. Пример бесконечного поля конечной характеристики*.
1.3. Характеристика поля.
1.4*. Количество элементов в конечном поле — степень простого числа.
1.5*. Построение поля из p^n элементов.

▷ Необходимо также уметь формально выводить несложные тождества из аксиом.

2. Действительные числа

2.1. Определение упорядоченного поля. Пример: рациональные числа.
2.2. Характеристика упорядоченного поля (любое упорядоченное поле содержит рациональные числа). Аксиома Архимеда и плотность рациональных чисел.
2.3*. Три определения полноты (разделяющий элемент, точные верхние грани, вложенные отрезки + аксиома Архимеда) и их эквивалентность.
2.4*. Пополнение упорядоченного множества по Дедекинду.
2.5. Определение действительных чисел. Существование и единственность действительных чисел*.
2.5. Точная верхняя грань суммы, точная верхняя грань произведения.
2.6. Существование корней и степень с рациональным показателем.
2.7. Принцип вложенных отрезков и десятичная запись числа.
2.8. Игра Банаха–Мазура и несчетность действительных чисел.

▷ Необходимо также уметь находить точные верхние и точные нижние грани конкретных множеств.

3. Многочлены

3.1. Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики для многочленов.
3.2. Теорема Безу и ее следствия (число корней многочлена, единственность интерполяционного многочлена).
3.3. Китайская теорема об остатках для многочленов и существование интерполяционного многочлена. Китайская теорема об остатках как изоморфизм колец*.
3.4*. Интерполяционная формула Лагранжа. Интерполяционная формула Ньютона.
3.5*. Рациональные функции как пример неархимедова поля.

▷ Необходимо также уметь делить многочлены с остатком, искать НОД и его линейное представление, строить конкретные интерполяционные многочлены, рисовать эскизы графиков многочленов небольшой степени.

4. Асимптотические неравенства

4.1. Асимпотические неравенства и существенные асимптотические неравества (аксиомы линейного порядка, арифметика неравенств, бесконечно большие и бесконечно малые последовательности).
4.2. Асимптотическое сравнение многочленов. Многочлен нечетной степени принимает значения разных знаков.
4.3. Неравенство Бернулли. Асимптотическое сравнение показательной и степенной функции. Линейная независимость различных показательных функций*.

▷ Необходимо также уметь сравнивать асимптотически конкретные последовательности.

Квадратичный закон взаимности

Соглашение. Везде далее a и b — целые числа, p — *нечетное* простое число.

▷ **Определение 1.** Умножение на a дает перестановку множества $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ ненулевых вычетов по модулю p. Будем обозначать ее через m_a.

Задача 1. Выпишите явно перестановки m_a для $p = 11$ и $a = -1$, $a = -3$, $a = 3$.

Задача 2. $m_{ab} = m_a \circ m_b$.

Задача 3. а) Пусть a имеет порядок k по модулю p. Тогда m_a представляет собой произведение $\frac{p-1}{k}$ независимых циклов длины k.
б) Найдите четность этой перестановки.

▷ **Определение 2.** Если существует такое целое число x, что $x^2 \equiv a \pmod p$, и a не делится на p, то говорят, что a — *квадратичный вычет по модулю* p.

Задача 4. Если a — квадратичный вычет, то m_a — четная перестановка.

Задача $4\frac{1}{2}$. Какие из остатков по модулю а) 11; б*) 57 являются квадратичными вычетами?

Задача 5. Каких остатков по модулю p больше: квадратичных вычетов или невычетов?
(Указание: сколько прообразов может быть у элемента при отображении $x \mapsto x^2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?)

Задача 6. а*) $x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1) \equiv x^p - x \pmod p$.
(Указание: в поле $\mathbb{F}_p$ у этих многочленов совпадают все корни.)
Этим утверждением можно далее пользоваться без доказательства.
б) Как изменится правая часть в предыдущем тождестве, если в левой части оставить только те скобки $(x-a)$, в которых a — квадратичный вычет по модулю p?

▷ **Определение 3.** *Символ Лежандра* $\left(\frac{a}{p}\right)$ определяется как

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \text{ делится на } p; \\ 1, & \text{если } a \text{ квадратичный вычет по модулю } p; \\ -1, & \text{если } a \text{ квадратичный невычет по модулю } p. \end{cases}$$

Задача 7 (критерий Эйлера). $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

Задача 8. а) $\left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$ (“мультипликативность символа”).
б*) $a \mapsto \left(\frac{a}{p}\right)$ — единственное непостоянное отображение $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \{\pm 1\}$, обладающее мультипликативным свойством.

Задача 9 (лемма Золотарёва). $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv \operatorname{sign} m_a$.

Задача 10. Вычислите $\left(\frac{-1}{p}\right)$ двумя способами.

Задача 11*. а) $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ тогда и только тогда, когда сравнение $x^3 \equiv 1 \pmod p$ имеет нетривиальное решение.
б) Вычислите $\left(\frac{-3}{p}\right)$.
в) Вычислите $\left(\frac{3}{p}\right)$. Как связаны символы $\left(\frac{3}{p}\right)$ и $\left(\frac{p}{3}\right)$?

▷ **Определение 4.** Для нечетного числа n и взаимно простого с ним числа a определим *символ Якоби* $\left(\frac{a}{n}\right)$ как знак перестановки m_a множества $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Задача 12. $\left(\frac{a}{n}\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right) = \left(\frac{ab}{n}\right)$.

Задача 13. Верно ли, что если $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$, то a — квадратичный вычет по модулю n? А обратное?

Задача 14 (лемма Гаусса). Будем называть вычет, сравнимый с числом из промежутка $(0, \frac{n}{2})$, положительным по модулю n, а число из промежутка $(-\frac{n}{2}, 0)$ — отрицательным.

Тогда $\left(\frac{a}{n}\right) = (-1)^s$, где s — число «перемен знака»: положительных вычетов, которые умножение на a переводит в отрицательные.

Задача 15. Вычислите $\left(\frac{2}{n}\right)$. При каких p число 2 является квадратичным вычетом по модулю p?

Задача 16. Если $m \equiv \pm n \pmod{4a}$, то $\left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)$.

Задача 17 (квадратичный закон взаимности).
а) Если m и n — взаимно простые нечетные числа, сумма которых делится на 4, то $\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)$.
б) Если m и n взаимно простые нечетные числа, то

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}}.$$

Задача 18. Выясните, является ли 57 квадратичным вычетом по модулю 2011.

Задача 19*. Если $p = a^2 + b^2$, a нечетное, то a — квадратичный вычет по модулю p.

Дополнительная часть: Суммы Гаусса

Соглашение. Везде далее p и q — различные нечетные простые числа.

▷ **Определение 5.** Пусть ζ — корень степени q из единицы. Выражение

$$S(\zeta; q) := \sum_{a \in \mathbb{F}_q^\times} \left(\frac{a}{q}\right) \zeta^a$$

называется *суммой Гаусса* по модулю q.

Задача 20. Вычислите суммы Гаусса
а) $S(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}; 3)$; б) $S(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}; 5)$.

Задача 21. а) $S(\zeta, q)^2 = \left(\frac{-1}{q}\right) q$.
б*) Пусть $\zeta = \cos\frac{2\pi}{q} + i\sin\frac{2\pi}{q}$. Из предыдущего пункта следует, что

$$S(\zeta, q) = \begin{cases} \pm\sqrt{q}, & q = 4k+3; \\ \pm i\sqrt{q}, & q = 4k+1. \end{cases}$$

Найдите знаки.

Задача 22*. *Циклотомический многочлен* $\varPhi_q(\zeta) := \frac{\zeta^q - 1}{\zeta - 1}$ неприводим над $\mathbb{F}_p$.

▷ Утверждением последней задачи можно далее пользоваться без доказательства.

▷ **Определение 6.** *Автоморфизмом Фробениуса* поля $\mathcal{F} := \mathbb{F}_p[\zeta]/\varPhi_q(\zeta)$ называется отображение

$$\mathrm{Fr}\colon x \mapsto x^p.$$

Задача 23. а) Отображение Fr действительно является автоморфизмом поля $\mathcal{F}$.
б) Элемент x поля $\mathcal{F}$ лежит в поле $\mathbb{F}_p$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Fr}\, x = x$.
(Ср. с комплексным сопряжением для вложения $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.)

Задача 24. Если $q^* := \left(\frac{-1}{q}\right) q$ — квадратичный вычет по модулю p, то $\mathrm{Fr}\, S(\zeta; q) = S(\zeta; q)$; в противном случае, $\mathrm{Fr}\, S(\zeta; q) = -S(\zeta; q)$. Другими словами,

$$\mathrm{Fr}\, S(\zeta, q) = \left(\frac{q^*}{p}\right) S(\zeta; q).$$

Задача 25. Убедитесь, что

$$\mathrm{Fr}\, S(\zeta; q) = \left(\frac{p}{q}\right) S(\zeta; q).$$

Задача 26. Равенство

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q^*}{p}\right)$$

эквивалентно обычному квадратичному закону взаимности (для простых m и n).

Игры и числа I: Ним

▷ **Определение 1.** *Равноправной игрой* называется (не обязательно конечный) ориентированный граф с отмеченной вершиной, любой ориентированный путь в котором имеет конечную длину. Вершины этого графа называются *позициями*, отмеченная вершина — *начальной позицией*, а ребра — (допустимыми) *ходами*.

Два игрока играют в такую игру, начиная с отмеченной вершины и по очереди переходя по ребру. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

Задача 1. Представьте следующие игры в виде равноправных игр; выясните, кто из игроков обладает выигрышной стратегией.
а) Кучка из 8 камней; за ход можно брать 2 или 3 камня.
б) Доска 4×4, король в левом нижнем углу; короля можно двигать только вверх, вправо или вправо–вверх.

Задача 2. а*) Дайте формальное определение выигрышной стратегии.

В б) конечной; в*) любой равноправной игре один из двух игроков обладает выигрышной стратегией.

▷ **Определение 2.** Суммой двух равноправных игр G и H будем называть игру, позиции в которой — пары (позиция в G, позиция в H), а каждый ход — ход либо в игре G, либо в игре H.

Задача 3. Король, двигающийся вверх или вправо — это сумма двух игр типа «кучка, из которой берут ровно по одному камню».

Задача 4. Если в игре H побеждает второй игрок, то в игре $G+H$ побеждает тот же игрок, что и в игре G.

▷ **Определение 3.** Если в игре H побеждает второй игрок, будем говорить, что игра H является нулевой (и писать $H = 0$).

Задача 5. а) $H + H = 0$ для любой игры H.
б) Если $G + H = 0$, то в играх G и H побеждает один и тот же игрок.

▷ **Определение 4.** Две равноправные игры называются *равными*, если $G + H = 0$.

Задача 6. а) Равенство игр — отношение эквивалентности[4].
б*) Операция сложения корректно определена на классах эквивалентности игр и ассоциативна.

[4]Далее говоря об играх мы будем, на самом деле, иметь в виду соответствующие классы эквивалентности. Конечно, это требует разнообразных проверок корректности типа следующего пункта (его утверждением можно далее пользоваться без доказательства).

▷ **Определение 5.** *Ним-числом* $*n$ называется игра в кучку из n камней, из которой можно брать произвольное число камней.

Ним — это игра в какую-то сумму ним-чисел. Другими словами, в игре ним имеется несколько кучек камней, а за ход разрешается брать любое (ненулевое) количество камней из одной кучки.

Задача 7. Решите игру ним для а) двух кучек; б) произвольного количества кучек, в каждой из которых не более двух камней.

Задача 8. Хотя во всех ненулевых ним-числах выигрывает первый игрок, все они различны: $*n \neq *m$ при $n \neq m$.

Задача 9. Докажите, что каждая из следующих игр равна ним-числу, и найдите эти числа. а) $*2 + *1$; б) $*3 + *1$.

▷ **Определение 6.** Пусть $\{g_i\}$ — некоторое множество равноправных игр. Тогда можно рассмотреть равноправную игру G, состоящую в том, что первым ходом выбирается одна из *опций* g_i, партия в которую затем и проводится.

Будем писать $G = \{g_i\}$ (“множество игр — снова игра”).

Задача 10. $*0 = \varnothing$, $*n = \{*0, *1, \ldots, *(n-1)\}$.

Задача 11*. Пусть P — некоторое утверждение о равноправных играх, такое что $(\forall g \in G\ P(g)) \Rightarrow P(G)$ (“если утверждение верно для каждой опции игры, то оно верно и для самой игры”). Тогда утверждение P верно для всех игр.
(Контрольный вопрос: где скрыта база этой разновидности индукции?)

Задача 12. а) Пусть $G = \{*n_1, *n_2, \ldots, *n_k\}$. Тогда $G = *\min\{n \in \mathbb{N} \mid *n \notin G\}$. Другими словами, если все опции игры равны ним-числам, то игра равна наименьшей из отсутствующих опций *(“правило наименьшего отсутствующего”)*.
б*) Любая конечная равноправная игра равна некоторому ним-числу *(“теорема Шпрага–Гранди”)*. Второй игрок выигрывает тогда и только тогда, когда это число нулевое.

Задача 13. а) $*n + *m = \{*n + *j \mid 0 \leqslant j < m\} \cup \{*i + *m \mid 0 \leqslant i < n\}$.
б) В таблице сложения ним-чисел в каждой клетке стоит наименьшее ним-число, не встречающееся ни строго над ним, ни строго слева от него *(“правило наименьшего отсутствующего для суммы”)*.
в) Составьте таблицу сложения для ним-чисел от $*0$ до $*7$ и выясните, кто выигрывает в ниме $*1 + *3 + *5 + *7$.

Задача 14. Назовем ненулевое ним-число *примитивным*, если его нельзя получить, складывая меньшие ним-числа. Выпишите несколько первых примитивных ним-чисел, после чего сформулируйте и докажите какое-нибудь утверждение.

Задача 15. а) Как складывать ним-числа? б) Как играть в ним?

Задача 16*. Как определить умножение ним-чисел, чтобы получилось поле? *(Указание: умножение можно строить рекурсивно, пользуясь правилом наименьшего отсутствующего.)*

Расширения полей I: Алгебраические числа

Задача 1. Приведите пример ненулевого многочлена с рациональным коэффициентами, корнем которого является а) $1+\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; в*) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$; г*) $(1+\sqrt[3]{2})\sqrt{3}$.

▷ **Определение 1.** Действительное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами, и *трансцендентным* в противном случае.

Задача 2*. а) Трансцендентные числа существуют.
б*) Приведите конкретный пример трансцендентного числа.

Задача 3*. Алгебраические числа образуют поле.

▷ **Определение 2.** *Минимальным многочленом* алгебраического числа α называется неприводимый многочлен $m_\alpha \in \mathbb{Q}[x]$, такой что $m_\alpha(\alpha)=0$. *Степенью* алгебраического числа называется степень его минимального многочлена.

Задача 4. а) Любое алгебраическое число степени 2 может быть представлено в виде $a\pm\sqrt{d}$, где числа a и d рациональные. (Верно ли аналогичное утверждение для алгебраических чисел степени 4?)
б) Если $\alpha=a+\sqrt{d}$ (числа a и d рациональные), то $m_\alpha=(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha}=a-\sqrt{d}$.

Задача 5. а) $\{P\in\mathbb{Q}[x] : P(\alpha)=0\}=(m_\alpha)$.
б) Минимальный многочлен алгебраического числа α существует и единственен (с точностью до умножения на ненулевую константу).

Задача 6. Если α — алгебраическое действительное число, то внутри действительных чисел есть подполе $\mathbb{Q}(\alpha)$, изоморфное полю $\mathbb{Q}[x]/(m_\alpha)$.

▷ **Определение 3.** Пусть L поле, K его подполе («L/K[5] — расширение полей»). Говорят, что элемент поля L *алгебраичен* над K, если он является корнем ненулевого многочлена с коэффициентами в K. (Таким образом, выше шла речь об алгебраических элементах в расширении $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.)

Расширение L/K называется *алгебраическим*, если любой его элемент алгебраичен.

Задача 7. Любое конечное поле характеристики p является алгебраическим расширением поля $\mathbb{F}_p$.

Задача 8. Любое расширение конечных полей получается последовательностью расширений вида $K\subset L\cong K[x]/(P)$.

Задача 9. Если конечное поле имеет характеристику p, то количество элементов в нем является степенью числа p.

Задача 10. Для любого поля K и любого многочлена P над этим полем найдется расширение, в котором многочлен P а) имеет корень; б) раскладывается на линейные множители.

Задача 11. а) Если L — поле из $q=p^n$ элементов, то любой его элемент является корнем многочлена x^q-x.
б) Для любого q вида p^n существует поле из q элементов.
в*) Единственно ли такое поле?

[5] Читается «L над K», не путать с фактором.

Игры и числа II: Хакенбуш

▷ **Определение 1.** *Неравноправной игрой* называется (не обязательно конечный) ориентированный граф с отмеченной вершиной и раскраской ребер в два цвета, L и R, любой ориентированный путь в котором имеет конечную длину.

Два игрока, *левый* и *правый*, играют в такую игру, начиная с отмеченной вершины и по очереди переходя по ребру своего цвета. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

Задача 1. а) Пусть $-G$ — игра, полученная из G обращением цвета каждого ребра. Тогда $G + (-G) = 0$.
б) $G + (-H) = 0$ *("равенство игр")* — отношение эквивалентности.

▷ **Определение 2.** Игра G называется
— *нулевой* ($G = 0$), если в ней побеждает второй игрок;
— *положительной* ($G > 0$), если левый;
— *отрицательной* ($G < 0$), если правый;
— *нечеткой* ($G \parallel 0$), если первый.

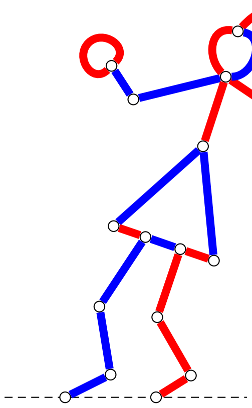
Задача 2. а) Любая[6] игра относится к одному из четырех классов из последнего определения.
б) Если игры равны, то они относятся к одному классу.

Задача 3. а) Сумма двух положительных игр положительна.
б*) Сумма двух нечетких игр может оказаться в любом из четырех классов.

▷ **Определение 3.** Пусть дан (неориентированный) связный граф с отмеченной вершиной и раскраской ребер в два цвета, L и R. Ход в игре *хакенбуш* ("рубка кустарника") на этом графе состоит в том, что игрок перерубает одно ребро "своего" цвета — после чего часть, не связанная с отмеченной вершиной ("землей"), пропадает.

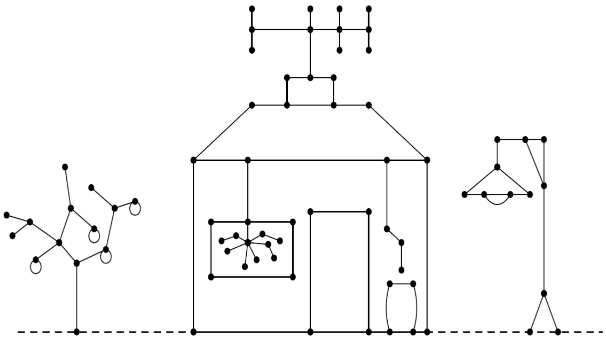
Задача 4. Никакой хакенбуш не является нечетким — другими словами, не существует графа, на котором в хакенбуш всегда выигрывает первый игрок ("любой хакенбуш сравним с нулем").

Задача 5*. Является ли хакенбуш на графе ниже[7] положительным, отрицательным или нулевым?



[6]Разрешается доказать это утверждение для конечных игр, а использовать потом для произвольных.
[7]Земля изображается пунктиром. Ребра левого игрока синие, а правого — красные (от англ. *b**L**ue* и ***R**ed)*.

Задача 6*. В “бесцветном хакенбуше” любому игроку разрешается перерубать любое ребро. Какой первый ход ведет к выигрышу в «Усадьбе Хакенбуш», изображенной на рисунке ниже?



Задача 7. Сумма хакенбушей на графах Γ и Γ' — это хакенбуш на «кустарнике из двух кустов, Γ и Γ'».

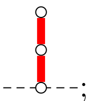
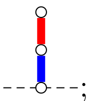
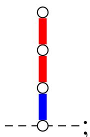
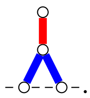
▷ **Определение 4.** Игра 1 — это хакенбуш на графе из одного ребра цвета L.

Если p/q — рациональное число, то игра p/q — это хакенбуш, который после умножения на q становится равен игре $p \cdot 1$.

Задача 8. Последнее определение корректно: если два хакенбуша равны одному и тому же числу, то они равны. Кроме того, сложение и сравнение игр соответствует сложению и сравнению чисел.

Задача 9. Среди хакенбушей есть все целые числа.

Задача 10. Найдите числовые значения хакенбушей на следующих графах

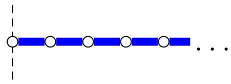
а) ; б) ; в) ; г) .

Задача 11*. а) Хакенбуш на любом конечном бамбуке является двоично-рациональным числом.
б) Сформулируйте и докажите правило вычисления конечных бамбуков.

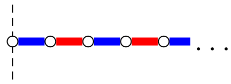
Задача 12*. Вычислите девушку из задачи 5.

Задача 13*. Существует ли конечный хакенбуш, равный $1/3$?

Задача 14. а) Хакенбуш на бесконечной в одну сторону цепочке из левых ребер больше любого натурального числа.



б) Хакенбуш на бесконечной в одну сторону цепочке, в которой все ребра с нечетными номерами левые, а с четными правые, равен $1/3$.



Дополнительная часть: Сюрреальные числа

▷ Любую позицию g игры G можно рассматривать как начальную позицию для новой игры — которую мы тоже будем обозначать g.

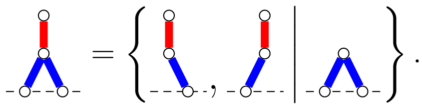
Задача 15. Если в хакенбуше у левого игрока есть ход из позиции g в позицию l, то $l < g$ (а если у правого игрока есть ход из g в r, то $g < r$).

▷ **Определение 5.** *Сюрреальные числа* — это совокупность всех игр, удовлетворяющих условию "монотонности" из предыдущей задачи, рассматриваемая с точностью до равенства игр.

Задача 16. а) Сумма двух чисел — число.
б) Любые два числа сравнимы.

▷ **Определение 6.** Пусть L и R — некоторые множества неравноправных игр. Тогда можно рассмотреть неравноправную игру G, состоящую в том, что первым ходом игрок выбирает одну из *опций* из "своего" множества, партия в которую затем и проводится.

Будем писать $G = L \mid R$. Например,



Задача 17. Вычислите а) $\{0 \mid 1\}$; б) $\{0 \mid {}^1\!/\!_2, 1\}$; в) $\{-1 \mid 5\}$.

Задача 18. Если $L \leqslant R$, то $L \mid R$ разделяет множества L и R.

Задача 19*. Как утверждение предыдущей задачи согласуется с тем, что сюрреальные числа неархимедовы?

Задача 20. а) Есть $L \leqslant R$ — конечные множества двоично-рациональных чисел, то $L \mid R$ — "простейшее" из двоично-рациональных чисел, разделяющих эти множества.
б) Любой конечный хакенбуш равен двоично-рациональному числу.

Задача 21*. а) Если $x = L \mid R$, $x' = L' \mid R'$, то $x + x' = \{x + R', L + x' \mid x + R', R + x'\}$.
б) Пусть в некотором упорядоченном поле $a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant x' \leqslant b'$. Выясните, какие из 4 произведений $(x-a)(x'-a')$, $(x-a)(x'-b')$, $(x-b)(x'-a')$, $(x-b)(x'-b')$ положительны, и запишите результат в виде системы неравенств на xx'.
в) Пусть $x = L \mid R$, $x' = L' \mid R'$ и произведения между x, x' и всеми элементами множеств L, R, L', R' уже определены. Вдохновляясь предыдущими пунктами, напишите определение для xx'.

Задача 22*. а) Сюрреальные числа образуют кольцо.
б) Сюрреальные числа образуют поле.

Задача 23*. а) Вложите действительные числа в сюрреальные.
б) На поле существует порядок тогда и только тогда, когда оно изоморфно подполю сюрреальных чисел.

Цикл 3. Комплексные числа и геометрия, вероятность, пределы последовательностей (9 кл.)

Геометрические преобразования I: Дважды два

▷ Выберем на плоскости некоторую точку O. Тогда каждая точка плоскости отождествляется с вектором (радиус-вектором из точки O) — соответственно, точки можно складывать и умножать на числа.

Зафиксируем теперь еще систему координат с началом в точке O. Тогда плоскость отождествляется с $\mathbb{R}^2$. Точку с координатами x и y будем обозначать через $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

▷ **Определение 1.** *Линейным отображением* плоскости в себя называется отображение вида

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

Таблица вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется *матрицей* этого отображения (в данной системе координат).

Задача 0. Тождественное отображение имеет матрицу $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 1. Найдите образы точек $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также образ единичного квадрата при отображении с матрицей

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Найдите матрицы линейных отображений, переводящих

а) $\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$; б) $\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$; в) $\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$.

Задача $2\frac{1}{2}$. Линейное отображение однозначно задается образами любых двух непропорциональных векторов.

Задача 3. Любое линейное отображение
а) оставляет начало координат на месте;
б) переводит прямые в прямые;
в) сохраняет параллельность прямых.

Задача 4*. Всякое ли а) биективное; б) произвольное преобразование плоскости, оставляющее на месте начало координат и переводящее прямые в прямые, является линейным?

Задача 5. Отображение $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является линейным тогда и только тогда, когда оно обладает следующими тремя свойствами
- $A(0) = 0$;
- $\forall u, v \in \mathbb{R}^2\ A(u+v) = A(u) + A(v)$;
- $\forall v \in \mathbb{R}^2\, \forall \lambda \in \mathbb{R}\ A(\lambda v) = \lambda A(v)$.

Задача 6. Линейное отображение сохраняет отношение отрезков, лежащих на одной прямой.

Задача 7. Пусть три чевианы делят три стороны треугольника в отношениях α_1, α_2 и α_3. Тогда то, пересекаются ли они в одной точке, зависит только от чисел α_i (а от формы треугольника не зависит).

Указание: любые два треугольника равны с точностью до линейного преобразования.

Задача 8*. Как при линейном отображении с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ изменяется площадь а) единичного квадрата; б) произвольного параллелограмма; в) произвольного многоугольника?

г) Отображение с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ биективно тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$.

▷ **Определение 2.** *Полярными координатами* точки плоскости называются ее расстояние до начала координат и азимут (отсчитываемый против часовой стрелки угол[1] радиус-вектора с осью x).

Задача 9. Точка с полярными координатами (r, ϕ) имеет декартовы координаты $\begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$.

Задача 10. Найдите а) матрицу поворота на $90°$; б) матрицу $R(\phi)$ поворота на угол ϕ.

Задача 11. а) Линейное преобразование сохраняет углы тогда и только тогда, когда его матрица имеет вид либо $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. (Что это за преобразования геометрически?)

б) Какие линейные преобразования сохраняют расстояния?

▷ **Определение 3.** *Произведением* матриц, соответствующих линейным отображениям A и B, называется матрица их композиции, $AB := A \circ B$.

Задача 12. а) Вычислите произведение матриц $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

б) Вычислите произведение $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ (“строка на столбец”).

в) Коммутативно ли умножение матриц?

Задача 13*. Решите уравнения а) $A^2 = E$; б) $A^2 = -E$.

Задача 14. Вычислите явно произведение $R(\phi)R(\psi)$. Какие тригонометрические тождества дает равенство $R(\phi)R(\psi) = R(\phi + \psi)$?

[1]Можно считать, что этот угол лежит в $\mathbb{R} \mod 2\pi$ — т. е. является числом, определенным с точностью до прибавления $2\pi k$.

Комплексные числа

▷ **Определение 1.** Поле $\mathbb{C} := \mathbb{R}(\sqrt{-1})$ называется полем *комплексных чисел.* При этом вместо $\sqrt{-1}$ часто пишут символ i.

Задача 1. Вычислите а) $(1+i)^2$; б) $(1+2i)(1-2i)$; в$_0$) $\sqrt{7+24i}$; в) $\sqrt{1+i}$.

Задача 2. Вычислите а) i^{-1}; б) $(1+i)^{-1}$; в) $(3+4i)^{-1}$.
г) Найдите явную формулу для $(a+bi)^{-1}$.

▷ **Определение 2.** Будем далее отождествлять комплексное число $a+bi$ с точкой (a,b) евклидовой плоскости.

Полярные координаты соответствующей точки называются *модулем* и *аргументом* комплексного числа.

Задача 3. Убедитесь, что для любого комплексного числа a отображение умножения на a ($m_a\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto az$) является линейным отображением и найдите его матрицу. Когда это отображение является поворотом? каков угол этого поворота?

Задача 4. а) Любой поворот имеет вид $z\mapsto az+b$. б) Композиция поворотов — поворот.

Задача 5. а) Три точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их *простое отношение* $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ вещественно.
б*) Четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или на одной прямой тогда и только тогда, когда их *двойное отношение* $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3} : \dfrac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$ вещественно.

Задача 6*. а) Комплексное *дробно-линеное преобразование* ($z\mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) переводит прямые и окружности в прямые и окружности.
б) Будем называть матрицей преобразования $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$ матрицу $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ (определенную с точностью до умножения на ненулевую константу). Тогда при композиции дробно-линейных преобразований матрицы перемножаются.

Задача 7. а) $(\cos\phi+i\sin\phi)(\cos\psi+i\sin\psi)=\cos(\phi+\psi)+i\sin(\phi+\psi)$;
$(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos n\phi+i\sin n\phi$.
б) Докажите, что $\cos n\phi$ выражается через $\cos\phi$ как некоторый многочлен (“многочлены Чебышева”) и выпишите эти многочлены для $n=2,3,4$.
в*) Найдите сумму $\cos\phi+\cos 2\phi+\cdots+\cos 2012\phi$.

Задача 8. При перемножении комплексных чисел аргументы складываются, а модули перемножаются.

Задача 9. Сколько решений в комплексных числах имеет уравнение а) $z^n=1$; б) $z^n=a$? Как выглядит множество этих решений на плоскости?

Задача 10. а) Корни уравнения $z^n=1$ суть степени некоторого комплексного числа ζ_n (“первообразного корня из единицы степени n”).
б*) Сколько всего существует первообразных корней из единицы степени n?

Задача 11. Найдите сумму
а) корней из единицы степени n; б) квадратов корней из единицы степени n;
в) $\zeta_3-\zeta_3^2$; г*) $\zeta_5-\zeta_5^2-\zeta_5^3+\zeta_5^4$; д*) $\zeta_7+\zeta_7^2-\zeta_7^3+\zeta_7^4-\zeta_7^5-\zeta_7^6$.
е**) Сформулируйте и докажите обобщение последних трех пунктов.

Задача 12. а) Делится ли многочлен $x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + \dots + x^{1111} + 1$ на многочлен $x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$?
б) Найдите НОД многочленов $x^n + 1$ и $x^m + 1$.
в*) Пусть $[n] = 1 + q + \dots + q^{n-1}$, $[n]! = [n] \cdot [n-1] \cdot \ldots \cdot [1]$. Докажите, что

$$\frac{[n]!}{[n-k]! \cdot [k]!}$$

являеется многочленом от q; чему равно значение этого многочлена при $q = 1$?

Задача 13*. Для всякого непостоянного многочлена $P \in \mathbb{C}[z]$
а) $|P(z)| \gg 1$ (т. е. $\forall C \in \mathbb{R}_{>0} \, \exists N \in \mathbb{R} : \forall z \, (z > N \to P(z) > C)$);
б) $\forall z \, \exists z' : |P(z')| < |P(z)|$;
в) $\inf |P(z)| = 0$.

Задача 14 (основная теорема алгебры). а*) Непостоянный комплексный многочлен имеет корень. *Указание:* воспользуйтесь принципом вложенных отрезков.
▷ Утверждением пункта а) можно далее пользоваться без доказательства.
б) Комплексный многочлен степени n имеет, с учетом кратностей, ровно n корней.

▷ **Определение 3.** *Сопряженным* к комплексному числу $z = a + bi$ называется число $\overline{z} = a - bi$.

Задача 15. а) “Сопряжение является автоморфизмом поля комплексных чисел”:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}; \qquad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

б) Если многочлен P имеет вещественные коэффициенты, то $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

Задача 16. а) Если многочлен степени n с вещественными коэффициентами имеет, с учетом кратностей, ровно k (вещественных) корней, то $n \equiv k \mod 2$ (в частности, любой многочлен нечетной степени имеет корень).
б) Опишите все неприводимые многочлены в $\mathbb{R}[x]$.

Задача 17. Разложите а) в $\mathbb{R}[x]$; б*) в $\mathbb{Q}[x]$ многочлен $x^7 - 1$ на неприводимые множители.

Задача 18*. а) Вещественный многочлен принимает неотрицательные значения во всех действительных точках тогда и только тогда, когда он представим в виде суммы квадратов других многочленов с действительными коэффициентами.
б) Вещественный многочлен принимает положительные значения во всех положительных точках тогда и только тогда, когда он представим в виде отношения двух многочленов с неотрицательными коэффициентами.

Анализ II: Предел последовательности

▷ **Определение 1.** Последовательность (ε_n) называется *бесконечно малой*, если $(\varepsilon_n) = o(1)$, т. е. если она по модулю асимптотически меньше любого положительного числа.

Говорят, что число c является является *пределом* последовательности (x_n), если последовательность (x_n) отличается от числа c на бесконечно малую последовательность (т. е. $(x_n) = c + (\varepsilon_n)$, где (ε_n) — бесконечно малая последовательность). Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

▷ **Определение 2.** ε-окрестностью числа a называется множество чисел, отстоящих от него менее чем на $\varepsilon > 0$:

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

Говорят, что число c является *пределом* последовательности, если в любой ε-окрестности числа c лежат почти все члены этой последовательности.

▷ **Определение 3.** Говорят, что число c является *пределом* последовательности (x_n), если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N\ |x_n - c| < \varepsilon$$

Задача 1. Три определения выше эквивалентны.

Задача 2. Запишите при помощи кванторов (и без использования отрицания) утверждение «число c не является пределом последовательности (x_n)».

Задача 3. Вычислите пределы следующих последовательностей
а) $1, -1, 1, -1, \ldots$; б) $1, 1/2, 1/3, \ldots$; в) $1, -1/2, 1/4, -1/8, \ldots$; г) $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \ldots$.

Задача 4. Может ли последовательность иметь два различных предела?

Задача 5. Две последовательности имеют равные пределы тогда и только тогда, когда их разность является бесконечно малой.

Задача 6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;
(здесь и далее равенство понимается в том смысле, что если существует правая часть, то существует и левая, и они равны).
в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

Задача 7. Верно ли, что $\lim P(x_n) = P(\lim x_n)$ для
а) многочлена; б) рациональной; в*) произвольной функции P?
(Решив эту задачу, поучительно вернуться к задаче 5б) листка «Асимптотические неравенства».)

Задача 8. Пусть а) $(x_n) < (y_n)$; б) $(x_n) \leqslant (y_n)$ и обе последовательности сходятся. Обязательно ли соответствующее неравенство выполняется и для пределов?

Задача 9. Если $(x_n) \preccurlyeq (y_n) \preccurlyeq (z_n)$ и последовательности x_n и z_n имеют одинаковый предел, то и последовательность y_n сходится, причем к тому же пределу (*“принцип двух милиционеров”*).

Задача 10. Вычислите пределы следующих последовательностей
а) $\dfrac{an+b}{cn+d}$; б) $\dfrac{a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + \ldots + b_1 n + b_0}$; в) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; г) $\dfrac{2^n + n^3}{3^n + n^2}$;
д) $\sqrt[n]{n}$; е*) $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$; ж*) $\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n}$.

Задача 11. Какие из следующих утверждений верны:
а) если последовательность (x_n) имеет предел, то последовательность $(x_{n+1} - x_n)$ бесконечно мала;
б) если последовательность $(x_{n+1} - x_n)$ бесконечно мала, то последовательность (x_n) имеет предел;
в) если последовательность (x_n) имеет предел, то последовательность $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ стремится к 1;
г) если последовательность $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ стремится к 1, то последовательность (x_n) имеет предел?

Задача 12. Считая, что пределы последовательностей ниже существуют, найдите их.
а) $x_n = \underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots\sqrt{3}}}}}_{n}$; б*) $1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots}}$; г) $1 + q + \cdots + q^n$;
д) $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n - x_n^2$; е) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$;

Задача 13. Если последовательность (x_n) монотонно неубывает, то $\lim x_n = \sup\{x_n\}$ (в частности, если монотонная последовательность ограничена, то у нее есть предел).

Задача 14. Выясните, какие из пределов задачи 12 существуют.

Задача 15*. Пусть последовательность (x_n) стремится к числу c. Обязательно ли

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = c?$$

Задача 16*. а) Существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (этот предел обозначается буквой e).
б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e$.

Вероятность I: Случайные события и условная вероятность

▷ **Определение 1.** *Конечным вероятностным пространством* называется конечное множество, элементам которого (“элементарным событиям” / “исходам”) приписаны некоторые неотрицательные числа (“вероятности”), сумма которых равна единице.

Событием называется произвольное подмножество вероятностного пространства. *Вероятностью* $P(S)$ *события* S называется сумма вероятностей составляющих его (“благопритствующих ему”) элементарных событий.

▷ Например, бросанием правильной монеты называют множество $X = \{\text{орел}, \text{решка}\}$, в котором обоим элементам приписана вероятность $1/2$; бросание неправильной монеты — то же множество, но с вероятностями p и $1 - p$.

Задача 0. Какое вероятностное пространство соответствует бросанию (правильного) игрального кубика? пары игральных кубиков?

▷ **Определение 2.** *Конечным вероятностным пространством* называется конечное множество X вместе с отображением (“вероятностной мерой”) $P\colon 2^X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, обладающим следующими свойствами
0) $P(\varnothing) = 0$;
1) $P(X) = 1$;
2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (“аддитивность”).

Задача 1. Два определения конечного вероятностного пространства эквивалентны.

Задача 2. Бросают два кубика, красный и зеленый.
а) Найдите вероятности событий «в сумме на двух кубиках выпало число n».
б) С какой вероятностью на красном кубике выпало число большее, чем на зеленом?

Задача 3. Оцените вероятность наличия в классе из n учеников двух учеников с одинаковыми днями рождения — велика она или мала?
(Эта вероятность велика, если учеников больше n_0, мала, если их меньше n_0 — а вот чему равно это n_0, при котором вероятность примерно равна $1/2$, и надо выяснить. Возможно, для этого пригодится калькулятор/компьютер.)

Задача 4. Колоду из 54 карт сдают на троих, пока не выпадет туз. Кому с наибольшей вероятностью достанется туз? А с наименьшей?

▷ **Определение 3.** Пусть (X, P) — вероятностное пространство, $Y \subset X$ — событие, имеющее ненулевую вероятность. Тогда на множестве X можно задать новую вероятностную меру $P(-|Y)$ формулой
$$P(A|Y) = \frac{P(A \cap Y)}{P(Y)}.$$
Говорят, что $P(A|Y)$ есть “вероятность события A при условии, что событие Y произошло”.

Два события A и B называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (если вероятность события B ненулевая, это равносильно тому, что $P(A|B) = P(A)$).

Задача 5. а) Являются ли события «выпало четное число» и «выпало делящееся на 3 число» независимыми при бросании кубика?
б) Рассмотрим случайное число от 1 до 100. Являются ли события «число делится на 2» и «число делится на 3» независимыми?

Задача 6. Имеется три карточки: черная, белая, а также черная с одной стороны и белая с другой. Одну из карточек случайным образом положили на стол. Оказалось, что ее верхняя сторона белая. Какова вероятность того, что нижняя сторона тоже белая?

Задача 7. Тест на заболевание с вероятностью 96% дает позитивный результат для больного человека и с той же вероятностью — негативный результат для здорового. Тестирование некоторого человека дало позитивный результат. Какова вероятность, что этот человек болен, если всего больных 0,5%?

Задача 8. Пусть (X, P) — вероятностное пространство, $X = \sqcup X_i$ (т. е. всегда происходит ровно одно из событий X_i). Выразите $P(X_k|A)$ через вероятности $P(X_i)$ и $P(A|X_i)$. (Получающаяся формула, *формула Байеса*, объясняет, как изменяется оценка вероятности исходов X_i после появления информации A.)

Задача 9. На заводе имеется три цеха, которые выпускают 20%, 30% и 50% продукции завода, допуская брак с вероятностью 3%, 3% и 5%. С какой вероятностью бракованное изделие произведено именно во втором цехе?

Задача 10. Правильную монету бросили n раз. Какова вероятность того, что орел выпадет ровно k раз?

Задача 11. Оцените (с точностью, например, $\pm 1\%$) вероятность того, что орел выпадет ровно в половине случаев, если правильную монету бросили а) 10; б*) 10^{100} раз.
в**) Какого отклонения доли орлов от $1/2$ разумно ожидать, если правильную монету бросили 100 раз?

Задача 12*. Какова вероятность того, что на выборах с участием двух кандидатов, из которых первый набрал p, а второй $q < p$ голосов, первый будет опережать второго в течение всего времени подсчета голосов? ("Теорема Бертрана.")

Вероятность II: Случайные величины и закон больших чисел

▷ **Определение 1.** Пусть задано конечное вероятностное пространство. *Случайной величиной* на этом пространстве будем называть отображение из него в действительные числа. Вероятность того, что значение случайной величины ξ лежит в подмножестве S действительных чисел, определяется как вероятность события $\xi^{-1}(S)$.

Задача 0. Найдите вероятность того, что случайная величина «сумма чисел на двух кубиках» лежит на луче $[\pi; +\infty)$.

▷ **Определение 2.** *Математическим ожиданием* случайной величины ξ называется число $E(\xi) := \sum_i p(e_i)\xi(e_i)$, где суммирование ведется по возможным исходам.

Задача 1. а) Из 1 000 000 билетов лотереи есть 1 билет с выигрышем 1 000 000 тугриков, 100 билетов с выигрышем 10 000 тугриков, 100 000 билетов с выигрышем в 10 тугриков. Стоимость билета — 10 тугриков. Каково матожидание выигрыша в эту лотерею?
б) Если при поездке в автобусе не купить билет за 25 рублей, то встретив контролера придется заплатить штраф в 1000 рублей. При какой вероятности встретить контролера становится выгоднее покупать билет?

Задача 2. а) Производится n испытаний, при каждом из которых событие S происходит с вероятностью p (“схема испытаний Бернулли”). Найдите вероятность $P_n(k)$ того, что всего это событие произойдет ровно k раз.
б*) Пусть n фиксировано. При каком k вероятность $P_n(k)$ максимальна?
в) Пусть ξ_n — *частота* (k/n) успеха в схеме Бернулли с n испытаниями. Найдите математическое ожидание $E(\xi_n)$.

Задача 3*. Правильную монету сначала кинули 10^2 раз, а потом 10^3 раз. Что вероятнее: что частота выпадения орла сильнее отклонится от $1/2$ в первом случае или во втором?

▷ **Определение 3.** *Дисперсией* случайной величины ξ, имеющей математическое ожидание μ, называется число $V(\xi) := E(\xi - \mu)^2$.

Задача 4. Найдите дисперсию количества очков а) на кубике; б) в сумме на двух кубиках.

Задача 5. а) Если случайная величина η с матожиданием μ не принимает отрицательных значений, то

$$P(\eta < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\mu}{\varepsilon}.$$

б) Пусть ξ — случайная величина с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2. Тогда вероятность того, что ее значение отклонится от среднего более чем на ε не превосходит σ^2/ε^2:

$$P\left\{\xi \in U_\varepsilon(\mu)\right\} \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

(“неравенство Чебышева”).

▷ **Определение 4.** Случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если $P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)P(\eta = y)$.

Ковариацией случайных величин ξ_1 и ξ_2 с матожиданиями μ_1 и μ_2 называется число $\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) := E[(\xi_1 - \mu_1)(\xi_2 - \mu_2)]$. Если ковариация двух величин равна нулю, то говорят, что между ними *отсутствует корреляция.*

Задача 6*. *Коэффициент корреляции* $\dfrac{\mathrm{Cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{V(\xi)V(\eta)}}$ заключен между -1 и 1 и равен ± 1 тогда и только тогда, когда величины ξ и η линейно зависимы (по модулю событий нулевой вероятности).

Задача 7. а) Если случайные величины независимы, то между ними нет корреляции. б) Верно ли обратное?

Задача 8. Докажите, что $V(\xi_1 + \xi_2) = V(\xi_1) + 2\,\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) + V(\xi_2)$. В частности, если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, то $V(\xi_1 + \xi_2) = V(\xi_1) + V(\xi_2)$.

Задача 9. Найдите дисперсию частоты успеха в схеме Бернулли с n испытаниями.

Задача 10. Если при подкидывании монеты выпадает решка, Розенкранц платит Гильденстерну золотой, если орел — наоборот. Докажите, что вероятность того, что после 1000 конов кто-то из них обеднеет более чем на 100 монет, меньше 5%.

Задача 11. Пусть ξ_n — частота успеха в схеме Бернулли с n испытаниями. Тогда «при больших n частота обычно мало отличается от вероятности». А именно, для всякого $\varepsilon > 0$ вероятность $P\left\{\xi_n \in U_\varepsilon(p)\right\}$ стремится к единице при $n \to \infty$ *("закон больших чисел Бернулли").*

Задача 12*. После каждого часа игры в футбол Петя бросает монету. Если выпадает орел — он заканчивает игру, если решка — продолжает играть. Каково матожидание продолжительности игры?

Задача 13*. В каждую жевачку вложен один из n вкладышей, причем каждый вкладыш встречается с вероятностью $1/n$. Сколько в среднем надо купить жевачек, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей?

Задача 14*. Какова вероятность того, что перестановка N элементов не имеет неподвижных точек?

Краткая программа зачета (v14, ноябрь 2012)

Общая часть

1. Комплексные числа и геометрия

1.1. Линейные отображения плоскости (координатное определение и аксиоматическая характеризация).
1.2. Основные свойства линейных отображений (прямые переходят в прямые, параллельность сохраняется, отношение отрезков на одной прямой сохраняется).
1.3. Композиция линейных отображений и произведение матриц.
1.4*. Линейные отображения и площадь.
1.5. Переход между декартовыми и полярными координатами. Матрица поворота. Композиция поворотов с общим центром и тригонометрические тождества.
1.6. Поле комплексных чисел. Модуль и аргумент (определения, поведение при умножении).
1.7. Геометрический смысл преобразования $z \mapsto az + b$. Композиция поворотов.
1.8. Формула Муавра и многочлены Чебышева.
1.9. Корни из комплексных чисел (формулы, расположение на комплексной плоскости, сумма корней данной степени).
1.10. Формулировка основной теоремы алгебры. Неприводимые многочлены с вещественными коэффициентами.
1.11*. Геометрический смысл простого отношения. Двойное отношение и геометрический смысл его вещественности.
1.12*. Сохранение двойного отношения при дробно-линейных преобразованиях. Сохранение обобщенных окружностей при дробно-линейных преобразованиях.

2. Вероятность

2.1. Конечные вероятностные пространства. Независимые события. Условная вероятность.
2.2. Формула Байеса.
2.3. Случайные величины на конечных пространствах. Математическое ожидание.
2.4. Коварицция и дисперсия (определения, независимость и отсутствие корреляции, дисперсия суммы случайных величин).
2.5. Схема испытаний Бернулли (определение, вероятности исходов, матожидание, дисперсия).
2.6. Неравенство Чебышева.
2.7. Закон больших чисел Бернулли.

3. Анализ

3.1. Бесконечно малые последовательности (определение, арифметика).
3.2. Три определения предела последовательности и их эквивалентность.
3.3. Арифметика пределов.
3.4. Принцип двух милиционеров.
3.5. Неравенство Бернулли. Пределы c^n, $\sqrt[n]{c}$, $\sqrt[n]{n}$, c^n/n^k.
3.6. Точная верхняя грань как предел монотонной последовательности.
3.7*. Число e (равенство предела и бесконечной суммы).

▷ Если в доказательстве используются утверждения из листка «Асимптотически неравенства», надо уметь их (быстро и уверенно) доказывать. Кроме знания теории необходимо уметь вычислять пределы.

Аксиомы геометрии I: Аффинные плоскости

▷ **Определение 1.** *Аффинной плоскостью* называется непустое множество S (“точки”) и некоторый набор L его непустых подмножеств (“прямые”), такой что выполнены следующие аксиомы.
A1) Для любых двух (различных) точек существует одна и только одна содержащая их прямая.
A2) Для любой прямой l и любой точки x, не лежащей на этой прямой, существут одна и только одна проходящая через точку x прямая, не имеющая с прямой l общих точек.
A3) Существует хотя бы одна прямая, и для любой прямой существует не лежащая на ней точка.

Задача 1. а) Любые две различные прямые либо не имеют общих точек (“параллельны”), либо имеют ровно одну общюю точку (“пересекаются”).
б) Если считать совпадающие прямые параллельными, то параллельность — отношение эквивалентности.
в) Если прямые l и l' параллельны, то любая прямая, пересекающаяся с l, пересекается и с l'.

Задача 2. а) На аффинной плоскости не менее 4 точек.
б) Существует аффинная плоскость из 4 точек. (Сколько на ней прямых?)

Задача 3. Может ли какая-либо прямая состоять из 1 точки?

Задача 4. Пусть прямая l аффинной плоскости состоит из q точек. Сколько существует прямых, проходящих через не лежащую на l точку x?

Задача 5. Любые две прямые равномощны.

▷ **Определение 2.** Количество точек на прямой называется *порядком* аффинной плоскости.

Задача 6. Сколько на плоскости порядка q а) точек; б) прямых?

Задача 7. Существует ли аффинная плоскость из а) 6 точек; б) 9 точек?

▷ **Определение 3.** *Аффинной плоскостью над* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ называется пара $\mathbb{A}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (S, L)$ из множества $S = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ пар остатков по модулю n и совокупности всех подмножеств в S, представимых в виде $\{x, y : ax + by + c = 0\}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; a и b не равны нулю одновременно).

Задача 8. Нарисуйте $\mathbb{A}^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $\mathbb{A}^2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

Задача 9. Всегда ли $\mathbb{A}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ является аффинной плоскостью в смысле определения 1?

Задача 10*. Существует ли аффинная плоскость порядка а) 4; б**) 14?

▷ **Задача Эйлера.** В каждом из n полков служат по n офицеров n различных званий. Можно ли построить этих n^2 офицеров в каре так, чтобы n офицеров, стоящие в каждой колонне и в каждой шеренге, были n разных званий и служили в n разных полках?

Задача 11. Имеет ли задача Эйлера решение для n, равного а) 3; б) 4; в) 5; г*) 6; д**) 14?

Множества IV: Ординалы

▷ **Определение 1.** Линейно упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*[2], если каждое его непустое подмножество содержит наименьший элемент *("аксиома фундирования")*.

Задача 1. Какие из следующих упорядоченных множеств являются вполне упорядоченными?
а) ω (натуральные числа); б) $\omega+\omega$ (две последовательные копии натуральных чисел);
в) ω^2 (с лексикографическим порядком); г) $\mathbb{Z}^2$ (с лексикографическим порядком);
д) многочлены с натуральными коэффициентами (с асимптотическим порядком);
е*) равноправные игры (с порядком "быть опцией").

Задача 2. Пусть имеется набор утверждений A_s, занумерованных элементами вполне упорядоченного множества $(S,\prec)$. Тогда если для любого элемента s выполнен "шаг индукции"

$$\big(\forall t\prec s\ A_t\big)\Rightarrow A_s,$$

то все утверждения A_s истинны *("принцип математической индукции")*.

▷ **Определение 2.** Пусть s — элемент вполне упорядоченного множества S. *Следующим* элементом множества S называется элемент $s+1:=\min\{t\in S : s\prec t\}$.

Задача 3. Достаточно ли в условиях предыдущей задачи потребовать истинности первого утверждений и шага вида $A_s\Rightarrow A_{s+1}$?

▷ **Определение 3.** Элемент вполне упорядоченного множества, у которого нет предыдущего, называется *предельным*.

Задача 4. Опишите предельные элементы для упорядоченных множеств из пунктов а–д) первой задачи.

Задача 5. Любой элемент вполне упорядоченного множества может быть представлен в виде $s+n$, где s — предельный элемент, а n — целое неотрицательное число.

Задача 6*. Всякое множество может быть вполне упорядоченно[3] *("лемма Цермело")*.
Указание: зафиксируем отображение ϕ, сопоставляющее каждому собственному подмножеству S множества X элемент из $X\setminus S$; тогда существует ровно один способ вполне упорядочить X так, чтобы выполнялось условие $\phi\big([0;x)\big)=x$.

Задача 7. а) Если A — бесконечное множество, A' — множество его предельных элементов (для какого-то полного порядка), то $|A|=|A'\times\mathbb{N}|$.
б) $|A|=|A\times\mathbb{N}|$ для любого бесконечного множества A.
в) $|A\sqcup A|=|A|$ для любого бесконечного множества A.

[2] *Well-ordered* — не путать с *completely ordered* из определения действительных чисел.
[3] Этим утверждением можно далее пользоваться без доказательства.

Дополнительная часть: Ординалы и кардиналы

▷ **Определение 4.** Подмножество I вполне упорядоченного множества S называется его *начальным отрезком*, если вместе с любым элементом оно содержит все меньшие.

Задача 8. Любой начальный отрезок вполне упорядоченного множества S либо имеет вид $[0; s) := \{x \in S : x \prec s\}$, либо совпадает со всем S.

Задача 9. а) Любое вполне упорядоченное множество либо конечно, либо имеет начальный отрезок, изоморфный ω.
б) Любое вполне упорядоченное множество либо изоморфно начальному отрезку ω^2, либо содержит ω^2 в качестве начального отрезка.

▷ **Определение 5.** Классы изоморфизма вполне упорядоченных множеств называются *ординалами*[4]. Будем говорить, что один ординал не больше другого, если первый является начальным отрезком второго.

Задача 10. а) Любые два ординала сравнимы. (Указание: индукция поможет.)
б) Любые два множества сравнимы по мощности.

Задача 11. Ординал строго больше любого своего собственного начального отрезка.

Задача 12. Любое множество ординалов имеет наименьший элемент.

▷ Таким образом, класс всех ординалов вполне упорядочен и любое вполне упорядоченное множество изоморфно некоторому начальному отрезку этого класса.

Задача 13*. Класс всех ординалов не является множеством *("парадокс Бурали–Форти")*.

▷ **Определение 6.** Наименьший ординал, равномощный множеству A, называется *кардинальным числом* или *мощностью* этого множества[5]. Обозначение: $|A|$.

Задача 14. а) Последнее определение корректно (в том смысле, что введенное ранее сравнение мощностей соответствует сравнению кардинальных чисел).
б) Класс кардиналов вполне упорядочен относительно сравнения мощностей. В частности, для любой совокупности мощностей существует минимальная не входящаяя в нее мощность.

Задача 15*. $|A^2| = |A|$ для любого бесконечного множества A.
Указание: проведите индукцию по кардиналам.

Задача 16.** Пусть $\aleph_1$ — минимальная несчетная мощность. Верно ли, что $\aleph_1 = c$?

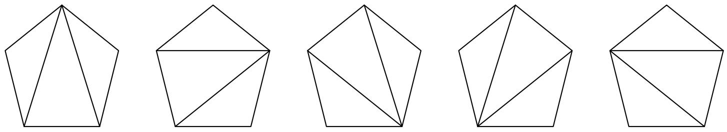
---

[4]Так как такие классы не являются множествами, в формальной теории множеств часто вместо класса рассматривают некоторый выделенный представитель этого класса — а именно, тот, для которого $[0; x) = x$.

[5]Другими словами, кардинал — это ординал, любой собственный начальный отрезок которого имеет меньшую мощность.

Комбинаторика IV: Числа Каталана

▷ **Определение 1.** Напомним, что число триангуляций $(n+2)$-угольника называется n-м *числом Каталана* и обозначается c_n.



Задача 0. Числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \dots + c_nc_0$$

и начальным условием $c_0 = 1$.

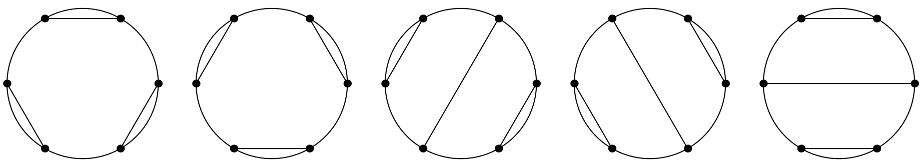
▷ В следующих задачах приведен ряд множеств и требуется доказать, что количество элементов в них равно c_n. Для этого есть два основных способа — построить явную биекцию или проверить рекуррентное соотношение. Полезно сделать и то, и другое.

В конце каждой из этих задач приведен список исследуемых объектов для $n = 3$.

Задача 1. Количество неассоциативных произведений $n+1$ переменной (иначе говоря, расстановок скобок, однозначно определяющих порядок умножения) есть n-е число Каталана.

`a(b(cd))   (ab)(cd)   ((ab)c)d   a((bc)d)   (a(bc))d`

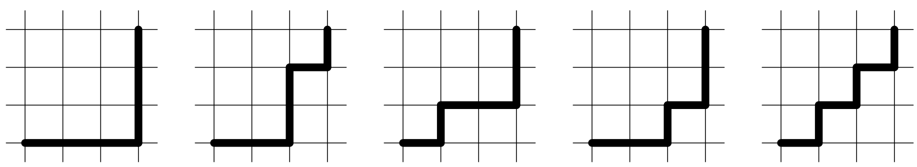
Задача 2. Количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами (из каждой точки выходит одна хорда) есть n-е число Каталана.



Задача 3. Количество способов корректно расставить в ряд n пар скобок есть n-е число Каталана.

`((()))   (())()   ()(())   (()())   ()()()`

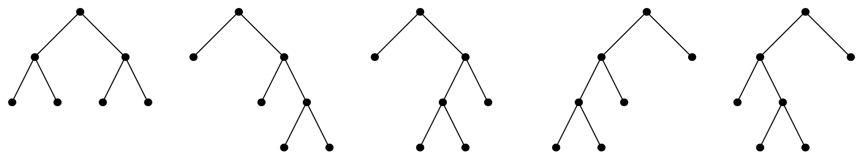
Задача 4. Количество путей по линиям сетки из точки $(0,0)$ в точку (n,n), не поднимающихся выше диагонали $y = x$, есть n-е число Каталана.



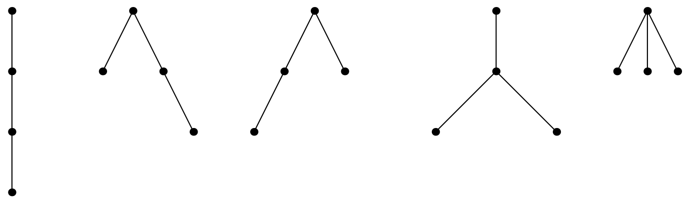
Задача 5. Количество таблиц $2 \times n$, заполненных натуральными числами от 1 до $2n$, так что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают, есть n-е число Каталана.

1 2 3	1 2 4	1 3 4	1 2 5	1 3 5
4 5 6	3 5 6	2 5 6	3 4 6	2 4 6

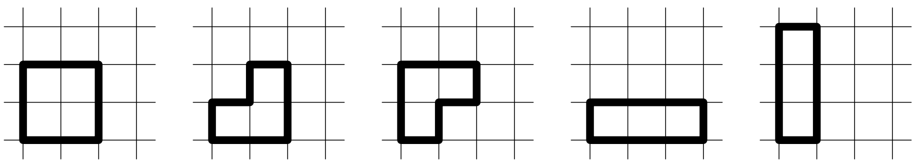
Задача 6. Количество *плоских корневых строго двоичных деревьев* с $n+1$ листом есть n-е число Каталана.



Задача 7. Количество *плоских корневых деревьев* с $n+1$ вершиной есть n-е число Каталана.



Задача 8*. Количество *параллеломино* (пар путей на клетчатой бумаге с началом $(0,0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра $2n+2$ есть n-е число Каталана.



Задача 9*. Количество последовательностей натуральных чисел $1, a_1, \ldots, a_n, 1$, в которых каждый член является делителем суммы двух соседей, есть n-е число Каталана.

1 4 3 2 1   1 3 5 2 1   1 3 2 3 1   1 2 5 3 1   1 2 3 4 1

Задача 10*. Количество наборов из n целых чисел от 0 до n, сумма которых делится на $n+1$ (числа могут повторяться, порядок чисел в наборе не важен), есть n-е число Каталана.

0 0 0   0 1 3   0 2 2   1 1 2   2 3 3

Метод отражений и стандартные таблицы

Задача 11. а) Количество путей по линиям сетки из точки $(0,0)$ в точку (n,n), поднимающихся выше диагонали $y=x$, равно количеству путей по линиям сетки из точки $(0,0)$ в точку $(n-1,n+1)$.
б) Найдите явную формулу для n-го числа Каталана.

Задача 12. а) Количество *стандартных таблиц* из двух строк длины a и b (заполнений числами от 1 до $a+b$, таких что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают) равно количеству путей по линиям сетки из точки $(0,0)$ в точку (a,b), не поднимающихся выше прямой $y=x$.

```
1 2 3      1 2 4      1 3 4      1 2 5      1 3 5
4 5        3 5        2 5        3 4        2 4
```

б) Найдите явную формулу для этих чисел.

Задача 13*. Сформулируйте и докажите аналог утверждений предыдущей задачи для таблиц из 3 строк.

Задача 14*. а) Найдите число всех путей длины n по линиями сетки из точки $(0,0)$, не поднимающихся выше диагонали $y=x$.
б) Найдите сумму
$$\sum_{i+j=n} \binom{2i}{i}\binom{2j}{j}.$$
в*) Найдите сумму
$$\sum_{i+j=n} (-1)^i \binom{2i}{i}\binom{2j}{j}.$$

Лемма Рени

Задача 15. а) Количество последовательностей из $n+1$ числа 1 и n чисел -1, все частичные суммы которых положительны, есть n-е число Каталана.
б) Для любой последовательности целых чисел, сумма которых равна 1, ровно у одного из ее циклических сдвигов все частичные суммы положительные.
в) Найдите явную формулу для n-го числа Каталана.

Задача 16*. Количество путей по линиям сетки из левого нижнего угла прямоугольника $n \times 2n$ в правый верхний, не поднимающихся выше диагонали, равно количеству
а) плоских корневых строго троичных деревьев с $2n+1$ листом;
б) разрезаний $2n+2$-угольника на четырехугольники.
в) Найдите явную формулу для этого числа.

Геометрические преобразования II: Классификация движений

▷ **Определение 1.** *Движением* (изометрией) называется биективное отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния.

Задача 0*. Отображение плоскости сохраняет расстояния. Обязательно ли оно является движением?

▷ **Определение 2.** Преобразование плоскости вида $x \mapsto Ax + b$ (т. е. композиция линейного отображения и параллельного переноса) называется *аффинным*.

Задача 1. а) Движение, сохраняющее начало координат, является линейным отображением. б) Любое движение является аффинным преобразованием.
в) При каких A и b аффинное преобразование $x \mapsto Ax + b$ является движением?

Задача 2. Движение а) переводит прямые в прямые; б) сохраняет параллельность прямых; в) сохраняет углы между прямыми.

Задача 3. Движение определяется образами трех не лежащих на одной прямой точек.

Задача 4. а) Композиция движений — движение; б) обратное к движению — движение.

Задача 5. Любое движение может быть представлено как композиция не более 3 симметрий (относительно прямых).

▷ **Определение 3.** Если движение является композицией четного числа симметрий, то говорят, что это движение *сохраняет ориентацию*. Если же движение является композицией нечетного числа симметрий, то говорят, что это движение *меняет ориентацию*.

Задача 6. а) Существует ли “квадратный корень из симметрии” (такое движение ϕ, что $\phi \circ \phi$ является симметрией)?
б*) Существует ли “квадратный корень из транспозиции” (такая перестановка σ, что σ^2 является транспозицией)?

Задача 7. Если движение сохраняет ориентацию, то это либо параллельный перенос, либо поворот.

▷ **Определение 4.** Композиция отражения относительно прямой и параллельного переноса вдоль той же прямой называется *скользящей симметрией*.

Задача 8. а) Композиция симметрий относительно любых трех прямых равна композиции симметрий относительно трех прямых, две из которых параллельны.
б) Композиция трех симметрий равна некоторой композиции параллельного переноса и симметрии.

Задача 9. Любое движение плоскости является либо паралельным переносом, либо поворотом, либо скользящей симметрией *(“теорема Шаля”)*.

Задача 10*. Движение пространства, сохраняющее ориентацию и имеющее неподвижную точку, является поворотом вокруг некоторой оси.

Задача 11*. а) Любое движение пространства является композицией не более 4 симметрий (относительно плоскостей).
б) Сформулируйте и докажите трехмерный аналог теоремы Шаля.

Арифметика IV: Гауссовы целые числа

▷ **Определение 1.** Подкольцо $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$ комплексных чисел вида $a + bi$, где числа a и b целые, называется кольцом *целых чисел Гаусса.*

Задача 1. Когда гауссово число $a + bi$ делится на число $1 + i$?

▷ **Определение 2.** *Нормой* гауссова числа z называется целое число $N(z) = z\overline{z} = |z|^2$.

Задача 2. Докажите, что гауссово целое число z *обратимо* (т. е. $1/z$ — тоже гауссово целое) тогда и только тогда, когда $N(z) = 1$ и найдите все такие числа.

▷ **Определение 3.** Пусть u и v — линейное независимые вектора в $\mathbb{R}^2$. Множество $\langle u, v\rangle := \{au + bv : a, b \in \mathbb{Z}\}$ называется *решеткой*, порожденной векторами u и v.

Задача 3*. а) Ни порождаемая векторами решетка, ни площадь ее ячейки не меняется при замене пары (u, v) на пару $(u, v + ku)$ (для любого целого числа k).
б) Если пара векторов порождает решетку $\mathbb{Z}^2$, то последовательностью преобразований вида $(u, v) \mapsto (u, v + ku)$ и $(u, v) \mapsto (v, u)$ ее можно перевести в пару (e_1, e_2).
в) Объем ячейки решетки определен корректно (в том смысле, что он зависит только от самой решетки, а не от выбора порождающих ее векторов).

Задача 4. а) Убедитесь, что множество (π) гауссовых чисел, кратных данному гауссовому числу π, образуют решетку. Как выглядит ее (естественная) ячейка?
б) В гауссовых числах *возможно деление с остатком*: для любых чисел a и b найдутся такие числа q и r, что $b = aq + r$, причем $N(r) < N(a)$. в) Единственны ли такие q и r?

▷ **Определение 4.** *Вычетом* по модулю гауссова числа π называется класс эквивалентности относительно отношения «$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in (\pi)$».

Задача 5. Сколько существует вычетов по модулю π?

▷ **Определение 5.** Гауссово число называется *простым*, если оно делится только на обратимые элементы (т. е. если оно не представимо в виде произведения двух чисел с нормой больше 1).

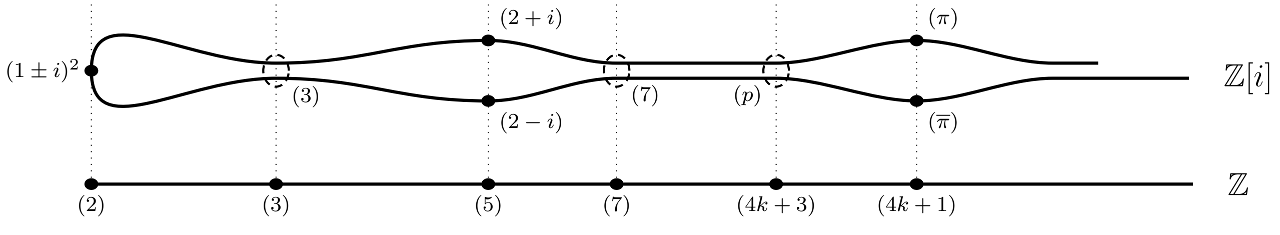
Задача 6. Гауссово число π просто тогда и только тогда, когда *кольцо вычетов* $\mathbb{Z}[i]/(\pi)$ является полем.

Задача 7. Сформулируйте и докажите основную теорему арифметики для гауссовых целых чисел.

Задача 8. Пусть p — простое *целое* число.
а) $\mathbb{F}_p[i]$ является полем тогда и только тогда, когда $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$.
б) p просто как гауссово число тогда и только тогда, когда $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$.

▷ Напомним, что $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

Задача 9. Простое целое число p
• имеет вид $p = \varepsilon\pi^2$ при $p = 2$;
• имеет вид $p = \pi\overline{\pi}$ при $p = 4k + 1$;
• является простым гауссовым при $p = 4k + 3$
(π — простое гауссово, ε — обратимое гауссово).



Соглашение. Далее все числа по умолчанию предпологаются целыми.

Задача 10. Простое число представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда оно имеет вид $4k+1$ *("рождественская теорема Ферма").*

Задача 11. а) Если два числа представимы в виде суммы двух квадратов, то и их произведение представимо в виде суммы двух квадратов.
б*) Докажите аналогичное утверждение для сумм четырех квадратов.
в*) Верно ли аналогичное утверждение для сумм трех квадратов?

Задача 12. Какие натуральные числа представимы в виде суммы двух квадратов?

Задача 13. Сколькими способами представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел число $5 \cdot 13 \cdot 17$?

Задача 14*. Для каких натуральных n существует окружность с центром в начале координат, на которой лежит ровно n узлов сетки?

Задача 15*. Найдите все рациональные кратные π, тангенс которых также рационален.

Цикл 4. Линейная алгебра и анализ (10–11 кл.)

Линейная алгебра I: Линейные уравнения и линейные пространства

▷ **Определение 0.** Будем говорить, что система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

имеет матрицу A и правую часть b, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Задача 1 (метод Гаусса). а) Вычитание из одного уравнения системы другого, умноженного на произвольное число — равносильное преобразование.
б) Любая система линейных уравнений над полем равносильна системе со *ступенчатой матрицей* — матрицей, в которой в каждой следующей строке первый ненулевой коэффициент (если он есть) стоит правее, чем в предыдущей.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad\qquad a_{2i_2}x_{i_2} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

в) Сформулируйте метод решения произвольной системы линейных уравнений над полем.

Задача 2. Решите следующие системы линейных уравнений.

а) $\begin{cases} a + b + c + d = 1; \\ a + 2b + 4c + 8d = 2; \\ a + 3b + 9c + 27d = 3; \\ a + 4b + 16c + 64d = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} a + b = 2; \\ b + c = 2; \\ c + d = 2; \\ d + a = 2. \end{cases}$ в) $\begin{cases} a + b = 1; \\ b + c = 3; \\ c + d = 4; \\ d + a = 2. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4a = d + b + 2; \\ 4b = a + c + 2; \\ 4c = b + d + 2; \\ 4d = c + a + 2. \end{cases}$

Задача 3. Если в системе линейных уравнений с нулевой правой частью неизвестных больше, чем уравнений, то она имеет нетривиальные решения.

Задача 4. Если система линейных уравнений над рациональными числами имеет вещественное решение, то она имеет и рациональное решение.

▷ **Определение 1.** *Ядром* матрицы A называется множество $\operatorname{Ker} A$ решений *однородной системы* $Ax = 0$.

Задача 5. Если $Ax_0 = b$, то множество всех решений системы $Ax = b$ имеет вид $x_0 + \operatorname{Ker} A := \{x_0 + v \mid v \in \operatorname{Ker} A\}$.

▷ **Определение 2.** *Векторным* (или линейным) *пространством* над полем F называется множество V вместе с выделенным элементом $0 \in V$ и операциями *сложения векторов* $+\colon V \times V \to V$ и *умножения на скаляры* $\cdot\colon F \times V \to V$, удовлетворяющими следующим аксиомам:

A_1) $\forall u, v, w \in V\ (u+v)+w = u+(v+w)$;
A_2) $\forall v \in V\ v+0 = v = 0+v$;
A_3) $\forall u, v \in V\ u+v = v+u$;
A_4) $\forall v \in V\ \exists {-v} \in V : v+(-v) = 0$;

D_1) $\forall \lambda \in F\ \forall u, v \in V\ \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$;
D_2) $\forall \lambda, \mu \in F\ \forall v \in V\ (\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$;
M_1) $\forall \lambda, \mu \in F\, \forall v \in V\ (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$;
M_2) $\forall v \in V\ 1 \cdot v = v$.

Некоторые примеры векторных пространств: вектора на плоскости и в пространстве (над $\mathbb{R}$), F^n (над F), $\mathbb{C}$ (над $\mathbb{R}$), $F[x]$ (над F), $F(x)$ (над F), функции на отрезке (над $\mathbb{R}$).

Задача 6. а) $0 \cdot v = 0$; б) $-v = (-1)v$; в*) следует ли аксиома A_3 из остальных?

Задача 7. Ядро любой матрицы является векторным подпространством векторного пространства F^n.

▷ **Определение 3.** Говорят, что набор векторов $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ *порождает* векторное пространство V, если операциями сложения и умножения на скаляры можно получить из элементов множества S любой вектор пространства V.

Говорят, что набор векторов $\{e_1, \ldots e_n\} \subset V$ является *базисом* векторного пространства V, если любой вектор линейно выражается через них ровно одним способом.

Задача 8. Набор векторов, порождающий векторное пространство, является его базисом тогда и только тогда, когда никакой из них не выражается через остальные.

Задача 9. а) Если векторное пространство порождено конечным множеством S, то из последнего можно выбрать базис. б*) Условие конечности можно отбросить.
в) Ядро любой матрицы обладает базисом.

Задача 10. Для любой системы n линейных уравнений над полем F с n неизвестными имеет место *альтернатива Фредгольма*:
— либо при любой правой части решение системы существует и единственно (“матрица A невырожденна”),
— либо при некоторых правых частях система не имеет решений, а при остальных имеет F^s $(s > 0)$ решений[1].

Задача 11. В каждой клетке каемки прямоугольной таблицы записано число. Докажите, что можно ровно одним способом расставить числа во внутренние клетки таблицы так, чтобы каждое число во внутренней клетке равнялось среднему арифметическому ее соседей по стороне.

Задача 12*. На отрезке $[0, 1]$ отмечены концы, а также конечное число различных точек внутри. Известно, что каждая внутренняя точка является серединой какого-то отрезка с отмеченными концами. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

Задача $12\frac{1}{2}$*. В стаде 101 корова. Известно, что после продажи любой из коров оставшиеся 100 коров можно разделить на два стада по 50 коров так, что массы этих стад будут равны. Докажите, что массы всех коров равны, если изестно, что веса коров а) натуральные; б) рациональные; в) действительные числа.

[1]Для $F = \mathbb{R}$ это означает, в частности, что решений бесконечно много.

▷ **Определение 4.** *Размерностью* векторного пространство называется мощность его базиса.

Задача 13. Размерность а) конечномерного; б*) произвольного векторного пространства определена корректно.

Задача 14. Пространство решений однородной системы из k уравнений с n неизвестными имеет размерность не менее $n-k$.

▷ **Определение 5.** *Линейной рекуррентой* порядка k над полем F называется уравнение на последовательность (x_n) вида

$$x_{n+1} = a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n+1-k},$$

где a_i — фиксированные элементы поля F.

Характеристическим уравнением этой рекурренты называется уравнение

$$\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + a_2 \lambda^{k-2} + \cdots + a_k.$$

Задача 15. Множество решений линейной рекурренты порядка k является векторным пространством размерности k.

Задача 16. а) Последовательность λ^n ($\lambda \neq 0$) является решением линейной рекурренты тогда и только тогда, когда λ является корнем характеристического уравнения.
б) Если характеристическое уравнение рекурренты порядка k имеет k *различных* корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, то любое решение рекурренты имеет вид $c_1\lambda_1^n + \cdots + c_k\lambda_k^n$.

Задача 17*. Опишите общее решение линейной рекурренты, если ее характерестическое уравнение а) имеет вид $(\lambda-\lambda_0)^2 = 0$; б) имеет k корней, часть из которых совпадает.

Задача 18. Решите рекурренты
а) $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad F_0 = F_1 = 1$;
б) $T_{n+1} = T_n + 3T_{n-1} + T_{n-2}, \quad T_0 = T_1 = T_2 = 1$;
в) $x_{n+1} = (2\cos\phi)x_n - x_{n-1}, \quad x_0 = 1,\ x_1 = \cos\phi$;
г) $x_{n+1} = (2\cos\phi)x_n - x_{n-1}, \quad x_0 = 0,\ x_1 = \sin\phi$.

Задача 19*. Последовательность (x_n) задана условиями $x_0 = x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+2}{x_{n-1}}$. Докажите, что все ее члены — целые числа.

Анализ III: Непрерывные функции

Соглашение. Все функции в этом листке определены на множестве $M \subset \mathbb{R}$, которое можно считать числовым промежутком или объединением нескольких числовых промежутков.

▷ **Определение 1.** Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной по Гейне* в точке $a \in M$, если для любой последовательности (x_n) элементов M, сходящейся к a, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(a)$.

▷ **Определение 2.** Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной по Коши* в точке $a \in M$, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : f\left(U_\delta(a) \cap M\right) \subset U_\varepsilon\left(f(a)\right).$$

▷ Если функия f не является непрерывной в точке a, то говорят, что a — *точка разрыва* функции f.

Задача 0. Запишите при помощи кванторов, что значит, что a — точка разрыва (по Коши) функции f.

Задача 1. а) Проверьте, что функция x^n непрерывна в нуле в смысле обоих определений.
б) В каких точках прямой непрерывна функция “целая часть”?

Задача 2. Определения непрерывности по Коши и по Гейне эквивалентны.

Задача 3. а) Сумма непрерывных функций непрерывна.
б) Произведение непрерывных функций непрерывно.
в) Частное непрерывных функций непрерывно (на своей области определения).

Задача 4. Многочлен непрерывен на всей прямой; рациональная функция непрерывна на своей области определения.

Задача 5. Функция а) $|x|$; б) $\sqrt{x}$ непрерывна на своей области определения.

Задача 6. а) $\sin x < x$ при $0 < x < \pi/2$.
б) Тригонометрические функции (sin, cos, tg) непрерывны на всей области определения.

Задача 7. Композиция непрерывных функций непрерывна.

Задача 8. В каких точка прямой непрерывна

а) функция Дирихле, $\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases}$ б) функция Римана, $\begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{m}{n}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}? \end{cases}$

Задача 9*. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонно неубывает. Может ли множество ее точек разрыва совпадать с а) $\mathbb{Q}$; б) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Задача 10. а) Если непрерывная функция на отрезке принимает на одном его конце положительное значение, а на другом отрицательное, то в какой-то точке отрезка она обращается в ноль.
б) Непрерывная функция f на отрезке $[a, b]$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$ *("теорема Вейерштрасса о промежуточном значении")*.

Задача 11. Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет корень.

Задача 12. Пусть функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ строго возрастает и непрерывна. Тогда обратная функция определена на всем отрезке $[f(a), f(b)]$ и также непрерывна.

Задача 13. Обратные тригонометрические функции (arcsin, arccos, arctg) определены и непрерывны.

Задача 14. Непрерывная на отрезке функция а) ограничена; б) достигает своих максимального и минимального значений[2].

Задача 15. а) Если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, то образ отрезка — отрезок. б) Каким может быть образ интервала?

Задача 16*. Последовательность непрерывных функций (f_n) сходится к функции f *поточечно* (т. е. $\forall x \in \mathbb{R}\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$). Можно ли утверждать, что функция f а) непрерывна во всех точках; б*) непрерывна хотя бы в одной точке?

▷ **Определение 3.** Говорят, что последовательность функций (f_n) сходится к функции f *равномерно*[3], если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N\, \forall x \in M\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Задача 17*. Всегда ли равномерный предел является и поточечным? А наоборот?

Задача 18*. Равномерный предел последовательности непрерывных функций непрерывен.

Задача 19*. Существует непрерывная функция, не монотонная ни на каком интервале.

[2] То есть существует точка отрезка, значение функции в которой не меньше (соотв., не больше) значения в любой другой точке отрезка.

[3] Ср. с поточечной сходимостью: $\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in M\, \exists N : \forall n > N\ |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Применения непрерывности

Задача 1. Однажды утром в 9:00 турист вышел из лагеря к вершине горы и добрался туда в 20:00. В 9:00 следующего дня он начал спуск с вершины (по той же тропе, что и поднимался) и в 20:00 вернулся в лагерь. Докажите, что на тропе найдется точка, которую турист проходил в одно и то же время и в день подъема, и в день спуска.

Задача 2. В любой момент на земном шаре найдутся две диаметрально противоположные точки с одинаковой температурой.

Задача 3. а) Плоский (ограниченный) блин можно разделить горизонтальным разрезом на две равновеликие части.
б) Пару плоских (ограниченных) блинов можно разделить одним прямолинейным разрезом на две равновеликие части каждый.

Задача 4*. На плоскости расположено 20 точек: 10 синих и 10 красных, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести прямую, по каждую сторону которой лежит 5 синих и 5 красных точек.

Задача 5. Торт можно разделить двумя перпендикулярными прямолинейными разрезами на четрые равновеликих куска.

Задача 6. Бутерброд с сыром и ветчиной можно разделить пополам (так, чтобы в обеих частях было поровну и хлеба, и сыра, и ветчины) одним плоским разрезом.

Задача 7*. а) Есть несколько кусков сыра разной массы. Докажите, что можно разрезать не более одного куска так, что после этого можно будет разложить все куски на две порции одинаковой массы.
б) Есть несколько кусков сыра разной массы и разной цены за килограмм. Докажите, что можно разрезать не более двух кусков так, что после этого можно будет разложить все куски на две порции одинаковой массы и одинаковой стоимости.
в) Сформулируйте и докажите обобщение этого утверждения на сыр с k характеристиками.

Задача 8. Вокруг любой плоской замкнутой кривой можно описать квадрат.

Задача 9.** В любую плоскую замкнутую кривую можно вписать прямоугольник[4].

Задача 10*. Из деревни A в деревню B ведут две дороги. Известно, что два круглых воза диаметра 10 метров, выехавшие в противоположных направлениях, могут разъехаться. Докажите, что две точечные телеги, связанные веревкой длины 9 метров, не могут проехать из A в B каждая по своей дороге.

[4]В том смысле, что вершины прямоугольника должны лежать на кривой.

Линейная алгебра II: Линейные отображения и их матрицы

▷ **Определение 1.** Отображение $A\colon V \to W$ между линейными пространствами над полем k называется *линейным*, если выполнены следующие 3 условия:
0) $A(0) = 0$;
1) $\forall u, v \in V\ A(u + v) = A(u) + A(v)$;
2) $\forall \lambda \in k\ \forall v \in V\ A(\lambda v) = \lambda A(v)$.
Линейное отображение из линейного пространства в себя называется (линейным) *оператором* на этом пространстве[5].

Задача 1. Следующие отображения являются k-линейными
а) $U \to V, x \mapsto 0$; б) $k \to k, x \mapsto ax$;
в) $k^n \to k^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ (перестановка координат)
г) $k^n \to k^n, (x_1, \dots, x_n) \to (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$; д) $k^{\mathbb{N}} \to k^{\mathbb{N}}, (x_1, x_2, \dots) \to (0, x_1, x_2, \dots)$.
е) $k^n \mapsto k, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ (проекция на i-ю координату);
ж) $k[x] \to k, f \mapsto f(\lambda)$ (вычисление значения многочлена в точке λ);
з) вычисление предела (как отображение из сходящихся последовательностей в числа);

▷ **Определение 2.** *Ядром* линейного отображения $A\colon V \to W$ называется прообраз нуля при этом отображении (обозначение: $\operatorname{Ker} A$).

Задача 2. а) Ядро линейного отображения — линейное подпространство.
б) Линейное отображение является вложением тогда и только тогда, когда его ядро тривиально (состоит только из 0).

▷ **Определение 3.** Пусть V — векторное пространство, U — его подпространство. Фактор-множество пространства V по отношению эквивалентности “$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow \exists u \in U : v_1 = v_2 + u$” обозначается V/U.

Задача 3. V/U наследует структуру векторного пространства (такую что отображение $V \to V/U$ линейно).

Задача 4. Если U — подпространство конечномерного векторного пространства V, то

$$\dim V/U = \dim V - \dim U.$$

Задача 5. Пусть U_i — подпространства векторного пространства V. Обязательно ли
а) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 \cap U_2$;
б*) $\dim(U_1 + U_2 + U_3) = \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 - \dim U_1 \cap U_2 - \dim U_2 \cap U_3 - \dim U_3 \cap U_1 + \dim U_1 \cap U_2 \cap U_3$?

Задача 6. а) Любое линейное отображение A задает изоморфизм $V/\operatorname{Ker} A \cong \operatorname{Im} A$.
б) Если A — оператор на конечномерном пространстве V, то

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A.$$

Задача 7. а) Оператор на конечномерном пространстве обратим тогда и только тогда, когда он имеет тривиальное ядро. б) Верно ли это для операторов на пространстве последовательностей?

---
[5] С операторами на $\mathbb{R}^2$ мы уже сталкивались в листке «Дважды два».

Задача 8. а) Пусть (a_{ij}) — матрица $n \times m$ элементов поля k. Тогда отображение $A\colon k^m \to k^n$, задаваемое формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m \end{pmatrix},$$

является k-линейным.
б) Любое линейное отображение $A\colon k^m \to k^n$ задается некоторой матрицей.
(Указание. По столбцам этой матрицы стоят координаты образов базисных векторов.)

▷ Пусть $A\colon V \to W$ — линейное отображение конечномерных пространств. Выбор базисов отождествляет эти пространства с пространствами вида k^n и k^m, а отображение A — с отображением, задаваемым *матрицей данного отображения в данном базисе.*

Задача 9. Найдите матрицы отображений из задачи 1 (кроме последнего).

Задача 10. Пусть зафиксированы элементы $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ поля k. Рассмотрим отображение, сопоставляющее каждому многочлену степени не выше n набор значений в точках λ_i.
а) Найдите его матрицу в базисе $1, x, \dots, x^n$; б) Обратимо ли это отображение?

Задача 11. При композиции отображений их матрицы перемножаются по правилу

$$(AB)_{ij} = \sum_s A_{is}B_{sj}.$$

Задача 12. Вычислите
а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{10}$.

Задача 13. а) Пусть (e_i) и (e_i') — два базиса в векторном пространстве V. Запишем координаты нового базиса в старом в виде матрицы C: i-й столбец матрицы C — координаты вектора e_i' в базисе (e_i). Как связаны координаты произвольного вектора v в старом и новом базисах?
б) Сделаем в пространствах V и W замены координат с матрицами C и D соответственно. Как при этом изменится матрица отображения $A\colon V \to W$? (А если $V = W$ и $C = D$?)

Задача 14. а) Матрица любого линейного отображения заменой базисов приводится к диагональному виду. б) Верно ли это для операторов?

Задача 15*. Пусть A — оператор на конечномерном пространстве. Тогда существует многочлен $f \in k[X]$, такой что $f(A) = 0$.

Дополнительная часть: Определители

▷ **Определение 4.** Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем k. Функция $\mathrm{vol}\colon V^n \to k$ называется *ориентированным объемом*[6], если она линейна *по каждому из аргументов* и обращается в ноль, если какие-то из ее аргументов равны.

Задача 16*. В трехмерном евклидовом пространстве *смешанное произведение* $(u, [v, w])$ задает ориентированный объем.

Задача 17. Ориентированный объем *кососимметричен*, т. е. меняет знак при перестановке любых двух аргументов.

Задача 18. Пространство ориентированных объемов на данном векторном пространстве одномерно (т. е. ориентированный объем единственен с точностью до множителя).

Задача 19. а) Пусть A — линейный оператор на пространстве V с объемом vol. Тогда $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \mathrm{vol}(Av_1, \ldots, Av_n)$ — тоже ориентированный объем на пространстве V.
б) Линейный оператор A домножает любой ориентированный объем на одно и то же число (оно называется *определителем* оператора A и обозначается $\det A$).

Задача 20. Определитель мультипликативен: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Задача 21. Найдите определитель а) диагональной матрицы; б) перестановки координат; в) матрицы $E_{ij}(\lambda)$, у которой на диагонали стоят единицы, в клетке (i, j) число λ, а во всех остальных клетках нули.

Задача 22. Пусть оператор A имеет матрицу (a_{ij}). Тогда

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)};$$

в частности,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Задача 23. Любое конечномерное векторное пространство обладает (ненулевым) ориентируемым объемом.

Задача 24. а) Оператор обратим, если и только если его определитель не равен нулю.
б) Определитель матрицы обращается в ноль тогда и только тогда, когда ее столбцы линейно зависимы.

Задача 25. а) Вычислите определители $\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$.
б) Для произвольного набора $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ элементов поля k

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \ldots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_1^n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \ldots & \lambda_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j).$$

(Указание. Когда левая часть обращается в ноль?)
в) Функции вида $n \mapsto \lambda^n$ при различных λ линейно независимы (над любым полем).

[6]Геометрически $\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_n)$ — это способ вычислять (ориентированный) объем n-мерного параллелепипеда, натянутого на соответствующие вектора.

Анализ IV: Предел функции и производная

Соглашение. Все функции в листке определены на множестве $M \subset \mathbb{R}$, которое можно считать числовым промежутком или объединением нескольких числовых промежутков.

▷ **Определение 1.** Говорят, что число b является пределом функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ в точке $a \in M$, если для любой последовательности (x_n) элементов M, сходящейся к a, но не содержащей a, последовательность $f(x_n)$ сходится к b.

▷ **Определение 2.** Говорят, что число b является пределом функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ в точке $a \in M$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f\big(\dot{U}_\delta(a) \cap M\big) \subset U_\varepsilon(b)\,,$$

где $\dot{U}_\delta(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\}$.

Задача 0. а) Функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
б) Что произойдет, если в определении 2 заменить проколотую окрестность на обычную?
в) Два определения выше эквивалентны.

▷ **Определение 3.** Если

$$\forall C > 0\,\exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)\ |f(x)| \leqslant C|h(x)|,$$

то пишут $f = o(h)$, $\quad x \to x_0$ (“f есть o-малое от h в окрестности точки x_0”).

Задача 1. Сформулируйте утверждения об арифметике пределов функций, арифметике о-малых; при необходимости, докажите их.

Задача 2. $\lim f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + o(1)$.

Задача 3. В окрестности нуля
а) $\sin x = x + o(x)$; б*) $\sin x = x + o(x^2)$; в) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Задача 4. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$.
а) Если функция f непрерывна в точке y_0, то[7] $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f\big(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\big)$.
б) Если $\exists \delta > 0 : g^{-1}(y_0) \cap \dot{U}_\delta(x_0) = \varnothing$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} f(y)$.

Задача 5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$, где $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Задача 6. а) $e^x \geqslant 1 + x$.
В окрестности нуля б) $e^x = 1 + x + o(x)$; в*) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

Задача 7. а) Показательная функция непрерывна.
б) Функция $\log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определена для всех положительных x.

Задача 8. Найдите
а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\cos 2x}{1 - \operatorname{tg} x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

[7]Здесь и далее равенство двух пределов надо понимать в том смысле, что если существует правая часть, то существует и левая (и они равны).

▷ **Определение 4.** Если в окрестности точки x_0 для некоторого числа a верно, что

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0),$$

то говорят, что *производная* функции f в точке x_0 равна a (и пишут $f'(x_0) = a$).

Задача 9. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta}.$

Задача 10. а) Если функция дифференцируема и не убывает на интервале, то ее производная неотрицательна на этом интервале.
б) Функция дифференцируема и возрастает на интервале. Обязательно ли ее производная положительна на этом интервале?
в) Если функция f имеет локальный максимум или минимум во внутренней точке своей области определения x_0, и производная $f'(x_0)$ существует, то $f'(x_0) = 0$.

Задача 11. а) дифференцирование линейно: $(f + g)' = f' + g'$, $\quad (af)' = af'$;
б) $(fg)' = f'g + fg'$ ("правило Лейбница"); $\quad$ в) найдите $(f/g)'$.

Задача 12. Найдите производную функции
а) x^n; $\quad$ б) $\sqrt{x}$; $\quad$ в) $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$; $\quad$ г) e^x; $\quad$ д) a^x; $\quad$ е) $\ln x, \log_a x$.

Задача 13. $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ ("производная сложной функции").

Задача 14. При каких α функция $x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ а) непрерывна; б) дифференцируема в нуле? (Полезно начать с построения графиков для $\alpha = 0, 1, 2$.)

Задача 15. Найдите производную функции а) $\sqrt{1 - x^2}$; $\quad$ б) $x \sin \frac{1}{x}$; $\quad$ в) $x^2 \sin \frac{1}{x}$; $\quad$ г*) x^x.

Задача 16. а) Пусть производная функции f существует и положительна в некоторой окрестности точки x_0. Тогда функция f обратима в этой окрестности.
б) Чему равна производная обратной функции?

Задача 17. Найдите производные обратных тригонометрических фукнций.

Задача 18. Функция на прямой непрерывна и дифференцируема в каждой точке. Можно ли утверждать, что ее производная непрерывна в каждой точке?

Задача 19. Функция f непрерывна и дифференцируема на отрезке $[a, b]$.
а) Если $f(a) = f(b)$, то существует точка $\xi \in (a, b)$, такая что $f'(\xi) = 0$ ("теорема Ролля").
б) Существует точка $\xi \in (a, b)$, такая что $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ("теорема Лагранжа").

Задача 20. Если производная функции положительна на некотором интервале, то сама функция строго возрастает на этом интервале.

Задача 21. а) $f'(x_0) = 0$. Можно ли утверждать, что x_0 — локальный экстремум (максимум или минимум) функции f?
б) $f'(x_0) > 0$. Можно ли утверждать, что в некоторой окрестности точки x_0 функция f монотонно возрастает?

Задача 22*. Функция, имеющая на всей прямой неотрицательную производную, строго возрастает тогда и только тогда, когда ее производная положительна на всюду плотном подмножестве прямой.

Задача 23*. Если функция дифференцируема на отрезке, то для ее производной выполняется теорема о промежуточном значении.

Задача 24*. Функция на прямой непрерывна и дифференцируема в каждой точке. Можно ли утверждать, что ее производная непрерывна хотя бы в одной точке?

Анализ V: Применения производной

Задача 1. а) Найдите промежутки возрастания и убывания, локальные экстремумы функции $x^3 + px + q$, постройте эскиз ее графика.
б) Сколько вещественных корней имеет уравнение $x^3 + px + q = 0$?
в*) Сколько вещественных корней имеет уравнения $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$?
г) Сколько вещественных корней имеет уравнение $x^5 - 5x + a = 0$?

Задача 2. Многочлен P имеет в точке x_0 кратный корень тогда и только тогда, когда $P'(x_0) = P(x_0) = 0$. (Решив эту задачу, можно вернуться к задаче 8 листка «Многочлены II».)

Задача 3. Сколько касательных из точки (x_0, y_0) можно провести а) к параболе $y = x^2$; б) к кубической параболе $y = x^3 - x$?

Задача 4. В данный круговой сегмент, не превышающий полукруга, впишите прямоугольник наибольшей площади.

Задача 5. Перпендикулярно к реке шириной a построен канал шириной b. Какой максимальной длины суда смогут заходить в этот канал? Ширину судна считать нулевой.

Задача 6*. а) Если $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, то в окрестности нуля $f(x) = o(x^2)$.
б) Если функция f дважды дифференцируема в точке[8] x_0, то

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2.$$

в) Пусть функция f такова, что в окрестности точки x_0

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + b(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2.$$

Можно ли утверждать, что функция f дважды дифференцируема в этой точке?

Задача 7. Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и $f'(x_0) = 0$. Если в точке x_0
а) функция f' меняет знак; б) функция f дважды дифференцируема и $f''(x_0) \neq 0$,
то в этой точке имеется локальный экстремум.

▷ **Определение 1.** Функция называется *выпуклой вниз* (или просто *выпуклой*), если ее график проходит под любой своей хордой[9], и *выпуклой вверх* (или *вогнутой*), если ее график проходит над любой своей хордой.

Другими словами, функция f называется (строго) выпуклой, если

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 > 0 : \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \;\; f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Задача 8. Если функция f выпукла, то для любой случайной величины ξ имеет место *неравенство Йенсена*, $f(E\xi) \leqslant E[f(\xi)]$.

Задача 9. а) Если функция f выпукла и дважды дифференцируема на некотором интервале, то функция f'' неотрицательна на этом интервале.
б) Если на некотором интервале функция f'' строго положительна, то функция f строго выпукла на этом интервале.

Задача 10. Убедитесь, что функция а) x^n $(n > 1)$; б) $\ln x$; в) $x \ln x$ строго выпукла, и выясните, какое классическое неравенство дает для нее неравенство Йенсена.

[8] В частности, первая производная функции f существует в некоторой окрестности точки x_0.
[9] Таким образом, функция f выпукла тогда и только тогда, когда выпукло множество $\{(x, y) : y \geqslant f(x)\}$.

▷ **Определение 2.** Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции f, если функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, и расстояние до касательной $(f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)])$ меняет в этой точке знак.

Задача 11. Если функция f дважды дифференцируема в своей точке перегиба x_0, то $f''(x_0) = 0$.

▷ **Определение 3.** *Асимптотой* графика функции называется такая прямая $\{x_0 + vt\}$, что при $t \to +\infty$ расстояние от соответствующей точки прямой до графика стремится к нулю.

Задача 12. а) Пусть функция f дифференцируема на всей прямой и $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = a$. Можно ли утверждать, что у графика этой функции есть асимптота вида $y = ax + b$?
б) Пусть функция f дифференцируема на всей прямой, а ее график имеет асимптоту $y = ax + b$ при $x \to +\infty$. Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = a$?

Задача 13. Проведите полное исследование (область определения; области возрастания и убывания, минимумы и максимумы, область значений; асимптоты; области вогнутости и выпуклости, точки перегиба) и постройте эскизы графиков следующих функций
а) $\frac{x^4}{(1+x)^3}$; б) $x\sqrt[3]{x-1}$; в) $\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; г) x^x.

Задача 14. При каких x уравнение $x^y = y^x$ имеет решения, отличные от $y = x$? Сколько этих решений?

Задача 15. Сколько решений имеет уравнение а) $e^x = 100x$; б) $e^x = x^{100}$?

Программа зачета **(v14, апрель 2013)**

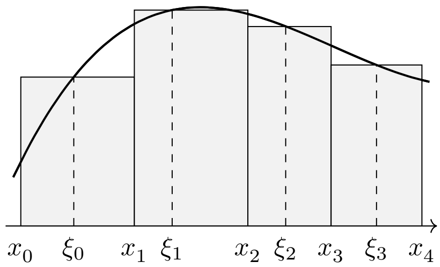
1. Линейная алгебра

1.1. Системы линейных уравнений: метода Гаусса и (конечномерная) альтернатива Фредгольма.
1.2. Векторные пространства. Базис и размерность.
1.3. Линейные рекурренты (для случая характеристического уравнения без кратных корней).
1.4. Линейные отображения. Ядро и образ.
1.5. Фактопространство: определение, размерность, изоморфизм образа и фактора по ядру.
1.6. Матрица линейного отображения: определение, композиция отображений и умножение матриц, изменение матрицы при замене базиса.
1.7*. Ориентированные объемы и определитель: определения, существование и единственность, мультипликативность, явные формулы.
1.8*. Определитель Вандермонда и линейная независимость экспонент.

2. Анализ

2.1. Непрерывные функции и пределы функций по Коши и по Гейне.
2.2. Теорема Вейерштрасса о промежуточном значении. Существования корня у многочлена нечетной степени.
2.3. Обратимость монотонной непрерывной функции, непрерывность обратной функции. Образ отрезка и интервала под действием непрерывной функции.
2.4. Пределы и o-малые: определения, арифметика, o-малые и пределы.
2.5. Производная (два определения: o-малое и предел).
2.6. Тригонометрические функции: "первый замечательный предел" $\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)$, непрерывность и производные.
2.7. Число e: определение, $e^a = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$. Разложение экспоненты в ряд*.
2.8. Показательная функция и логарифм: "второй замечательный предел" $\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\right)$, непрерывность и производные.
2.9. Производные суммы, произведения, частного, сложной функции.
2.10. Производная и обратная функция. Производные обратных тригонометрических функций.
2.11. Теоремы Ролля и Лагранжа $\left(\exists\xi : f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$. Теорема о промежуточном значении для производной*.
2.12. Производная и монотонность.

Анализ VI: Определенный интеграл



▷ **Определение 1.** *Разбиением* отрезка $[a;b]$ называется набор чисел $x_0, \ldots, x_n$, такой что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. *Диаметром* этого разбиения называется максимум из разностей $x_i - x_{i-1}$.

Интегральной суммой функции f на отрезке $[a;b]$ для разбиения $x_0, \ldots, x_n$ *с отмеченными точками* $\xi_{i-1} \in [x_{i-1}; x_i]$ называется число $\sum_i f(\xi_{i-1})(x_i - x_{i-1})$.

Задача 1. Вычислите интегральную сумму для разбиения отрезка $[0;1]$ на n равных частей с правыми концами в качестве отмеченных точек для функции
а) $f(x) = C$; б) $f(x) = x$; в) $f(x) = x^2$.

▷ **Определение 2.** *Определенным интегралом Римана* функции f на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральных сумм f на этом отрезке при диаметре разбиения стремящемся к нулю. Если этот предел существует, f называется *интегрируемой по Риману.* (Подробнее: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = C$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого разбиения отрезка $[a;b]$ с диаметром, меньшим δ, и любого выбора отмеченных точек интегральная сумма отличается от C не более чем на ε.)

Задача 2. а) Интеграл $\int\limits_0^x (t+c)\,dt$ равен площади под графиком. б) Вычислите $\int\limits_0^1 x^2\,dx$.

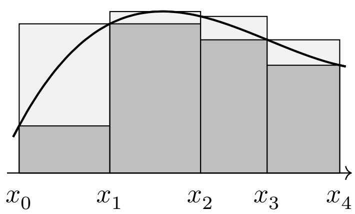
Задача 3*. а) Если прямая $x = t$ пересекает многоугольник M по отрезку длины $f(t)$, то площадь этого многоугольника равна интегралу $\int f(t)\,dt$.
б) Пусть на плоскости имеются два многоугольника, и пусть проведены все прямые, параллельные данной. Тогда если каждая из прямых пересекает эти многоугольники по равным отрезкам, то площади многоугольников равны (“принцип Кавальери”).

Задача 4. а) Отображение $f \mapsto \int\limits_a^b f(x)\,dx$ линейно. б) $\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$.

Задача 5. Если $f \leqslant g$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Задача 6. а) Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $\xi \in [a;b]$, такая что $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (“теорема о среднем”).
б) Если функция f непрерывна, то функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ является ее *первообразной*, т. е. $F' = f$.

Задача 7. а) Интегрируемая на отрезке функция ограничена. б) Верно ли обратное?



▷ **Определение 3.** Пусть τ — разбиение отрезка $[a;b]$, $M_i = \sup_{\xi \in [x_{i-1};x_i]} f(\xi)$, $m_i = \inf_{\xi \in [x_{i-1};x_i]} f(\xi)$. Числа $S_\tau(f) = \sum_i M_i(x_i - x_{i-1})$ и $s_\tau(f) = \sum_i m_i(x_i - x_{i-1})$ называются соответственно *верхней* и *нижней интегральными суммами Дарбу* функции f на отрезке $[a;b]$.

Задача 8. Вычислите верхнюю и нижнюю суммы Дарбу для разбиения отрезка $[0;1]$ на n равных частей а) для линейной функции; б) для функции Дирихле.

Задача 9. а) При добавлении к разбиению новой точки $s(f)$ не уменьшается, а $S(f)$ — не увеличивается.
б) Никакая нижняя сумма Дарбу функции f не превосходит никакой верхней суммы Дарбу функции f.
в) Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, если и только если $\sup s_\tau(f) = \inf S_\tau(f)$ (sup и inf берутся по множеству разбиений отрезка $[a;b]$).

▷ **Определение 4.** Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in M\ f(U_\delta(x) \cap M) \subset U_\varepsilon(f(x)).$$

Задача 10. а) Равномерно непрерывная на M функция непрерывна во всех точках M.
б) Непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна.
в) Любая ли непрерывная функция на интервале равномерно непрерывна?

Задача 11. а) Непрерывная; б) разрывная в конечном числе точек отрезка ограниченная функция интегрируема.

Задача 12. Монотонная на отрезке функция интегрируема по Риману на этом отрезке.

Задача 13*. а) Ограниченная функция, имеющая не более чем счетное число точек разрыва на отрезке, интегрируема на этом отрезке.
б) Интегрируема ли на отрезке функция Римана?
в*) Каким может быть множество точек разрыва интегрируемой по Риману функции? Какие функции интегрируемы по Риману?

Задача 14*. Пусть последовательность (f_n) интегрируемых на отрезке по Риману функций сходится а) поточечно; б) равномерно[10] к функции f. Можно ли утверждать, что функция f также интегрируема и $\int f(x)\,dx = \lim \int f_n(x)\,dx$?

---

[10]Определение равномерной сходимости можно найти в листке «Непрерывные функции».

Анализ VII: Интеграл и первообразная

Часть 1: Первообразная

▷ **Определение 1.** *Первообразной* функции f называется такая функция F, что $F' = f$. *Множество* всех первообразных функции f обозначается $\int f(x)\,dx$ (и называется *неопределенным интегралом*).

Как мы видели в предыдущем листке, одной из первообразных непрерывной на отрезке функции f является функция $\int_a^x f(t)\,dt$.

Задача 1. Любые две первообразные функции на интервале отличаются на константу. (В частности, для непрерывной на отрезке функции $\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C$.)

Задача 2. Решите уравнения а) $f' = f$; б) $f' = a'f$;
в*) $f'' = f$; г*) $f'' = -f$; д*) $f' = f + 1$;
е*) $f' = af + b$ (здесь a и b — произвольные функции, в ответ может входить интеграл).

Задача 3. а) Существует ли интегрируемая функция на отрезке, не имеющая первообразной?
б*) Существует ли неинтегрируемая функция на отрезке, имеющая первообразную?

Задача 4. Найдите неопределенные интегралы
а) $\displaystyle\int x^n\,dx$ $(n > 0)$; б) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$; в) $\displaystyle\int \frac{1}{x^n}\,dx$; г) $\displaystyle\int |x^2 - 1|\,dx$.

Задача 5*. Опишите множество всех первообразных функции, определенной на произвольном открытом подмножестве прямой.

Задача 6. Найдите неопределенные интегралы
а) $\displaystyle\int \sin x\,dx$, $\displaystyle\int \cos x\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; в) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$;
г) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}$.

Задача 7*. Опишите алгоритм интегрирования рациональной функции (в элементарных функциях).

Задача 8. Скорость материальной точки зависит от времени как $\sin kt$. Какое расстояние она пройдет за время t_0?

Задача 9. Если функции f, ϕ и ϕ' непрерывны, то

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\Big|_{y=\phi(x)}.$$

▷ Будем обозначать $f'(x)\,dx$ символом df. Тогда предыдущая формула принимает вид

$$\int f(\phi)\,d\phi = \int f(y)\,dy\Big|_{y=\phi(x)}$$

("интеграл формы не меняется при заменах координат").

Задача 10. Найдите неопределенные интегралы
а) $\displaystyle\int \sin(3x)\,dx$; б) $\displaystyle\int \cos^n x \sin x\,dx$; в*) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$.

Задача 11. Если функции u и v непрерывны вместе с первыми производными, то

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx;$$

▷ Другими словами,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Задача 12. $\displaystyle\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx.$

Задача 13. Найдите неопределенные интегралы
а) $\displaystyle\int \ln x\,dx$; б) $\displaystyle\int xe^x\,dx$; в*) $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$.

Часть 2: Вычисление интегралов

Задача 14. Если F — первообразная непрерывной функции f, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(“формула Ньютона–Лейбница”; вместо $F(b) - F(a)$ используется еще сокращение $F\big|_a^b$).

Задача 15. а) Если функции u и v непрерывны вместе с первыми производными, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

б) Если функции f, ϕ и ϕ' непрерывны, то

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)\,dy.$$

в*) Требование непрерывности функций f и ϕ' можно отбросить.

Задача 16. Вычислите
а) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx$; в*) $\displaystyle\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}\,dx$.

Задача 17. Вычислите
а) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cos mx\,dx$; б) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\sin mx\,dx$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cos mx\,dx$.

Задача 18. а) Последовательность $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n x\,dx$ монотонна.

б) Вычислите a_n (в ответе должны чередоваться рациональные числа и рациональные кратные π).

в) $\dfrac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\ldots} = \dfrac{\pi}{2}$ (“формула Валлиса”).

Задача 19*. Вычислите $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2)\,dx$.

Часть 3: Интегралы и суммы

Задача 20. Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$.

Указание. Представьте дробь как интегральную сумму.

Задача 21. $\ln n! = n\ln n - n + o(n)$ (ср. с формулой Стирлинга).

Задача 22*. Пусть функция f бесконечно дифференцируема на отрезке $[a;b]$.

а) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(a) + \frac{1}{2}f'(\xi)(b-a)^2$ ("формула прямоугольников").

б) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\tfrac{a+b}{2}) + \frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3$ ("формула прямоугольников").

в) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3$ ("формула трапеций").

г) Продолжите эту последовательность квадратурных формул.

(Везде требуется доказать существование точки $\xi \in [a;b]$, такой что выполняется равенство.)

Задача 23*. а) $\displaystyle\int_1^n \ln x\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\ln k + \frac{1}{2}\ln n + C + O(n^{-1})$;

б) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ ("формула Стирлинга").

Программа зачета[11] по курсу 8–11 (v14, январь 2014)

I. Теория множеств, комбинаторика, вероятность

1. Множества и операции над ними, отображения множеств
2а. Счетные множества, теорема Кантора–Бернштейна (без доказательства)
2б. Диагональный метод Кантора, несчетность множества действительных чисел
3а. Сложение, умножение и деление в комбинаторике, формула включений–исключений
3б. Числа сочетаний, треугольник Паскаля, бином Ньютона
4а. Условная вероятность, независимые события, формула Байеса
4б. Матожидание и дисперсия
4в. Схема испытаний Бернулли, неравенство Чебышева, закон больших чисел Бернулли

II. Арифметика, алгебра

1а. Алгоритм Евклида, линейное представление НОД, основная теорема арифметики
1б. Арифметика остатков, китайская теорема об остатках
2. Порядок перестановки, порядок остатка и малая теорема Ферма
3. Поля, характеристика поля, поле частных кольца
4а. Теорема Безу, основная теорема алгебры (без доказательства существования корня)
4б. Интерполяционный многочлен

III. Анализ

1а. Упорядоченные поля, поле действительных чисел
1б. Точные верхние и нижние грани, принцип вложенных отрезков
2а. Асимптотические неравенства, неравенство Бернулли
2б. Бесконечно малые последовательности, пределы последовательностей
3а. Непрерывные функции, теорема о промежуточном значении
3б. Число e, экспонента и логарифм, разложение экспоненты в ряд
3в. Пределы функций, o-малые, производная, вычисление производных
3г. Теоремы Ролля и Лагранжа, исследование функций с помощью производной
4а. Интеграл Римана, интегрируемость непрерывных функций
4б. Формула Ньютона–Лейбница, вычисление интегралов

IV. Геометрия, комплексные числа, линейная алгебра

1. Линейные отображения и их матрицы, повороты и тригонометрические тождества
2. Комплексные числа, композиция поворотных гомотетий, формула Муавра
3а. Системы линейных уравнений, метод Гаусса, альтернатива Фредгольма
3б. Размерность, подпространства и факторпространства
3в. Линейные рекурренты
3г. Определители, определитель Вандермонда

▷ См. также программу «Матшкольник» (исключая раздел «Числовые ряды», вторую половину раздела «Геометрия векторных пространств» и формулу Тейлора).

[11] Зачет не проводился.

Комбинаторика V: Непересекающиеся пути и определители

▷ **Определение 1.** Будем называть граф Γ *направленным*, если на множестве его вершин задана *функция высоты* h (например, в целые числа). Ребра направленного графа будем считать ориентированным так, чтобы все они вели вниз.

Количество путей из вершины s в вершину t будем обозначать через $P(s \to t)$; через $P[S \to T]$ будем обозначать *матрицу* количеств путей из вершин из множества S в вершины из множества T.

Задача 1. Вычислите $P(s \to t)$ для (всех узлов) квадратной решетки.

Задача 2. Количество пар *непересkающихся* путей на квадратной решетке, первый из которых ведет из s_1 в t_1, а второй — из s_2 в t_2 равно[12] определителю матрицы путей

$$\begin{pmatrix} P(s_1 \to t_1) & P(s_2 \to t_1) \\ P(s_1 \to t_2) & P(s_2 \to t_2) \end{pmatrix}.$$

▷ **Определение 2.** *Произведение матриц* определяется формулой

$$(A \circ B)_{ij} = \sum_s A_{is} B_{sj}$$

(естественно, это определение имеет смысл только если количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B).

Задача 3. Пусть Γ — направленный граф, $a > b > c$. Тогда

$$P\big[h^{-1}(a) \to h^{-1}(c)\big] = P\big[h^{-1}(b) \to h^{-1}(c)\big] \circ P\big[h^{-1}(a) \to h^{-1}(b)\big].$$

▷ **Определение 3.** *Определителем* квадратной матрицы (a_{ij}) называется число

$$\det(a_{ij}) := \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

где суммирование ведется по всем перестановкам.

Задача 4. а) При перестановке двух строк матрицы определитель меняет знак. В частности, определитель матрицы с одинаковыми строками равен нулю.
б) При умножении строки матрицы на число λ определитель увеличивается в λ раз.
в) При прибавлении к i-й строке матрицы j-й строки, умноженной на число λ, определитель не меняется.

Задача 5*. Свойства из предыдущей задачи вместе с нормировкой $\det E = 1$ однозначно задают определитель.

Задача 6 (лемма Линдстрёма–Гесселя–Вьено). Сформулируйте и докажите
а) аналог утверждения задачи 2 для наборов из n путей;
б) обобщение последнего утверждения на произвольный направленный граф.
Указание. Попробуйте обойтись без формулы включений–исключений.

[12]По крайней мере, если точки s_i лежат на прямой $y = -x$, а точки t_i — на прямой $x = c$; можете попробовать сформулировать и общее условие, при котором эта формула верна.

▷ **Определение 4.** *Определителем Вандермонда* называется многочлен

$$\Delta(x_1,\dots,x_n) := \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

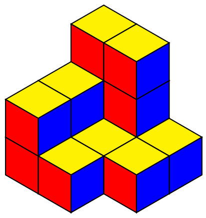
Задача 7. а) Вычислите определитель Вандермонда.
Указание. Какой ответ получается при $n = 3$? А если разложить на множители?

б) Дан набор многочленов $P_0,\dots,P_{n-1}$, причем $\deg P_i = i$. Найдите определитель матрицы $\bigl(P_{i-1}(x_j)\bigr)$.

Задача 8. Пусть $a_1,\dots,a_n$ — набор натуральных чисел. Найдите количество непересекающихся наборов путей на квадратной решетке из точек $(1-i, i-1)$ в точки $(0, a_i)$. Разумеется, требуется не только написать определитель, но и вычислить его.

Задача 9. Найдите число треугольных таблиц из $n(n+1)/2$ целых чисел с верхней строкой $a_1,\dots,a_n$, в которых каждое число не меньше левого верхнего соседа, но меньше правого верхнего соседа *("таблицы Гельфанда–Цетлина")*.

▷ *Трехмерная диаграмма Юнга* — это башня из кубиков в углу комнаты в духе



(дайте формальное определение самостоятельно).

Задача 10. Найдите количесто трехмерных диаграмм Юнга внутри коробки а) $a \times b \times 1$; б) $a \times b \times 2$.

Задача 11. Количество трехмерных диаграмм Юнга внутри коробки $a \times b \times c$ может быть найдено по *формуле Макмагона*

$$\prod \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2},$$

где произведение ведется по ячейкам коробки (т. е. по $1 \leqslant i \leqslant a, 1 \leqslant j \leqslant b, 1 \leqslant k \leqslant c$).

Дополнительная часть: Миноры и матричная теорема о деревьях

▷ **Определение 5.** *Минором* матрицы называется определитель ее (квадратной) подматрицы A_{IJ}, получающейся если оставить только элементы a_{ij}, такие что $i \in I$, $j \in J$.

Задача 12. Миноры произведения могут быть найдены по *формуле Коши–Бине*

$$\det(AB)_{IJ} = \sum_S \det A_{IS} \cdot \det B_{SJ},$$

где суммирование ведется по всем k-элементным подмножествам множества индексов[13]. В частности, для квадратных матриц определитель произведения равен произведению определителей.
Указание. Лемма LGV останется верна и если приписать ребрам графа произвольные веса.

▷ **Определение 6.** Пусть Γ — ориентированный граф. Его (ориентированной) *матрицей инцидентности* называется матрица ∂, строки которой соответствуют вершинам, столбцы — ребрам, а элементы определяются следующим образом

$$\partial_{ve} = \begin{cases} -1, & v \text{ — начало ребра } e; \\ 1, & v \text{ — конец ребра } e; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача 13. Пусть в графе Γ вершин на одну больше, чем ребер. Максимальный минор матрицы Γ равен ± 1, если Γ является деревом, и 0 иначе.

Задача 14. Для произвольного графа Γ главный минор *матрицы Лапласа* $\Delta = \partial\partial^*$ (где ∂^* — *транспонированная* матрица) равен числу остовных деревьев графа.

Задача 15. На диагонали матрицы Δ стоят степени вершин, а вне диагонали — (-1) для пар вершин, соединенных ребром, и 0 для не соединенных.

Задача 16. Найдите число деревьев с n пронумерованными вершинами.
Указание. Примените матричную теорему к полному графу.

[13] Ср. с определением умножения матриц.

Приближение действительных чисел рациональными

Задача 1. Охотник стоит в точке плоскости с координатой $(0,0)$, а в остальных точках с целыми координатами сидят одинаковые зайцы. Докажите, что в каком бы направлении ни выстрелил охотник, он обязательно попадет в зайца.

Задача 2. Найдите $\sup\left(\sin x + \sin\sqrt{2}x\right)$.

Задача 3. Десятичная запись числа 2^n может начинаться с любой последовательности цифр.

▷ **Определение 1.** Будем говорить, что дробь ${}^p/_q$ приближает число α с *коэффициентом качества* δ, если

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{\delta}{q}.$$

Задача 4. Число α может быть сколь угодно качественно приближено дробью тогда и только тогда, когда оно иррационально.

Задача 5. Число $e = \sum \dfrac{1}{i!}$ иррационально.

▷ **Определение 2.** Число α будем называть *k-приближаемым*, если для любого $\delta > 0$ существует такая дробь ${}^p/_q$, что

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{\delta}{q^k}.$$

Если же такой дроби для некоторого $\delta > 0$ не существует, будем називаеть число *k-неприближаемым.*

Задача 6. а) Число $\sqrt{2}$ является 2-неприближаемым.
б) Алгебраическое число степени k является k-неприближаемым *(теорема Лиувилля).*

Задача 7. Число $\sum \dfrac{1}{10^{i!}}$ трансцендентно.

Задача 8. Любое иррациональное число обладает бесконечным число 2-приближений с коэффициентом 1 (в частности, является $(2-\varepsilon)$-приближаемым).

Задача 9*. Множество всех $(2+\varepsilon)$-приближаемых чисел *имеет меру ноль*[14].

[14] Т. е. для каждого положительного δ существует покрытие этого множества не более чем счетным числом интервалов, сумма длин которых не превосходит δ.

Арифметика V: Теорема Лежандра

Соглашение. Все числа в этом листке, про которые не сказано иное, целые. Числа p и q — простые натуральные.

Задача 0. а) Любой ненулевой вычет a по модулю p может быть представлен в виде $a = \frac{x}{y} \pmod p$, так что $0 < |x|, |y| < \sqrt{p}$ *(“лемма Туэ”)*.
б) Выведите из леммы Туэ Рождественскую теорему Ферма.

Задача 1. Пусть a, b, c — попарно взаимно простые свободные от квадратов числа, такие что bc — полный квадрат по модулю a, ca — по модулю b, $-ab$ — по модулю c.
а) Если p — простой делитель числа c, то существуют такие линейные функции L_p и M_p, что

$$ax^2 + by^2 - cz^2 = L_p(x, y, z)M_p(x, y, z) \pmod p.$$

б) Существуют такие линейные функции L и M, что

$$ax^2 + by^2 - cz^2 = L(x, y, z)M(x, y, z) \pmod{abc}.$$

в) Существуют такие числа x, y и z (не все равные нулю), что $ax^2 + by^2 - cz^2$ есть либо 0, либо abc.
Указание. Вспомните доказательство Рождественской теоремы Ферма через лемму Туэ.

Задача 2 (теорема Лежандра). Пусть числа a, b и c попарно взаимно просты и свободны от квадратов. Уравнение

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$$

имеет нетривиальные решения в целых числа если и только если оно имеет нетривиальные решения в действительных числах и по всем простым модулям.
Указание. Пусть $ax^2 + by^2 - cz^2 = abc$. Воспользуйтесь тем, что $abc \cdot z^2 = ab \cdot cz^2$.

Задача 3. Если ни одно из чисел a, b, c не делится на p, то число решений сравнения $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \pmod p$ делится на p; в частности, это сравнение имеет нетривиальные решения.
Указание. Для подсчета числа решений сравнения воспользуйтесь малой теоремой Ферма.

Задача 4. а) Пусть $p = 4k + 3$. Выведите из теоремы Лежандра, что

$$\left(\frac{p}{q}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}.$$

б**) Выведите из теоремы Лежандра квадратичный закон взаимности[15].

[15] Лежандр (1752–1833) пытался сделать это с 1785 года, но преуспел лишь частично. В 1858 году Парижская Академия объявила конкурс на устранение пробела в одной из лемм Лежандра. В 1930 году эта лемма была опровергнута.

Общая топология I: Множества на прямой

▷ **Определение 1.** Множество C точек отрезка $[0;1]$, у которых есть троичная запись без цифры 1, называется *стандартным канторовым множеством.*

Задача 1. Найдите мощность стандартного канторова множества.

Задача 2. а) Множество $[0;1] \setminus C$ является объединением счетного числа непересекающихся интервалов.
б) Найдите сумму длин этих интервалов.
в*) Значение этой суммы не зависит от порядка суммирования.

▷ **Определение 2.** Подмножество X прямой называется *нигде не плотным*, если внутри любого интервала можно найти подинтервал, не пересекающийся с множеством X.

Задача 3. Стандартное канторово множество нигде не плотно.

Задача 4* (теорема Бэра). Отрезок нельзя покрыть счетным объединением нигде не плотных множеств.

▷ **Определение 3.** Пусть M — подмножество прямой. Точка прямой называется *внутренней*, если некоторая ее окрестность целиком содержится в M; *внешней*, если она внутренняя для $\mathbb{R} \setminus M$. Остальные точки прямой называются *граничными.*

Задача 5. Найдите внутренние, внешние и граничные точки следующих множеств:
а) конечное множество; б) отрезок, интервал, полуинтервал; в) $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; г) C.

▷ **Определение 4.** Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Задача 6. Какие из множеств задачи 5 открыты?

Задача 7. Верно ли, что
а) у конечных или счетных множеств нет внутренних точек;
б) граница множества совпадает с границей его дополнения;
в) внутренность любого множества открыта;
г) граница любого множества имеет пустую внутренность;
д) граница открытого множества конечна или счетна?

Задача 8. Верно ли, что
а) пересечение конечного набора; б) пересечение произвольного набора;
в) объединение конечного набора; г) объединение произвольного набора
открытых множеств открыто?

Задача 9. а) Компонента связности (придумайте определение сами) открытого множества — интервал или (открытый) луч.
б) Множество открыто, если и только если оно есть объединение непересекающихся интервалов и лучей; в) ...причем число интервалов не более чем счетно.

▷ **Определение 5.** Пусть M — подмножество прямой. Точка прямой называется *предельной точкой* множества M, если любая ее окрестность содержит бесконечное число точек множества M. Точка множества M называется *изолированной*, если некоторая ее окрестность не содержит других точек M.

Задача 10. Найдите предельные и изолированные точки множеств задачи 5.

▷ **Определение 6.** Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 11. Какие из множеств задачи 5 замкнуты?

Задача 12. Верно ли, что
а) любая точка множества либо предельная, либо изолированная;
б) у конечных множеств все точки изолированные;
в) граничная точка, принадлежащая множеству, является его предельной точкой;
г) внешняя точка не может быть предельной;
д) все предельные точки внутренние;
е) все внутренние точки предельные;
ж) любое несчетное замкнутое множество содержит отрезок;
з) замкнутое множество есть объединение своих предельных и изолированных точек;
и) множество предельных точек любого множества замкнуто?

Задача 13. Множество M замкнуто, если и только если вместе с любой сходящейся последовательностью оно содержит ее предел.

Задача 14. Множество замкнуто, если и только если его дополнение открыто.

Задача 15. Решите задачу, аналогичную задаче 8, для замкнутых множеств.

Задача 16*. Любое ли подмножество прямой представимо как объединение счетного числа замкнутых?

▷ **Определение 7.** Множество называется *совершенным*, если оно совпадает с множеством своих предельных точек.

Непустое подмножество отрезка называется *канторовым*, если оно совершенно и не содержит внутренних точек.

Задача 17. а) Любое канторово множество замкнуто и нигде не плотно.
б) Может ли оно содержать изолированные точки?

Задача 18. а) Множество чисел, которые можно записать в пятеричной системе без цифр 1 и 3, канторово. б) Множество чисел, которые можно записать в троичной системе без цифры 2, канторово.

Задача 19. а) Любое канторово множество равномощно стандартному. б*) Эту биекцию можно построить так, чтобы она и обратная к ней переводили сходящиеся последовательности в сходящиеся.

Задача 20*. «Длина» стандартного канторова множества равна нулю. А бывают ли канторовы множества положительной «длины»?

Задача 21. а) Рассмотрим замкнутое множество без внутренних точек. Выбросим все изолированные точки. Получим ли мы совершенное множество? б*) Любое несчетное замкнутое множество имеет мощность континуум... в*) и представляется в виде объединения совершенного множества и не более чем счетного множества.

Кватернионы и вращения

▷ **Определение 1.** Пусть V — трехмерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом i, j, k. Алгеброй *кватернионов* называется векторное пространство $\mathbb{H} := \mathbb{R} \oplus V$ с ассоциативным умножением, определямым правилом $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Задача 1. Составьте таблицу умножения базисных элементов 1, i, j, k.

Задача 2*. Проверьте, что умножение, задаваемое таблицей из предыдущей задачи, действительно ассоциативно.
Утверждением этой задачи можно далее пользоваться без доказательства.

▷ **Определение 2.** *Нормой* кватерниона $q = a + bi + cj + dk$ называется действительное число $N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. *Сопряженным* к кватерниону $q = a + v$ называется кватернион $\overline{q} := a - v$.

Задача 3. а) $N(q) = q\overline{q} = \overline{q}q$; б) $N(q_1q_2) = N(q_1)N(q_2)$.

Задача 4. а) Если два целых числа представимы в виде суммы четырех квадратов, то и их произведение представимо в виде суммы четырех квадратов.
б) Аналогичное утверждение для сумм трех квадратов неверно.

Задача 5. Кватернионы образуют *тело*: для них выполнены все аксиомы поля, за исключением коммутативности умножения.

Задача 6. Выразите $(q_1q_2)^{-1}$ через q_1^{-1} и q_2^{-1}.

▷ **Определение 3.** *Векторным произведением* двух векторов u и v в $\mathbb{R}^3$ называется вектор $[u, v]$, перпендикулярный плоскости векторов u и v и имеющий длину $|u| \cdot |v| \cdot \sin\varphi$.

Задача 7. Если u и v два вектора, то $uv = -(u, v) + [u, v]$, где $(-, -)$ — скалярное произведение, а $[-, -]$ — векторное произведение.

Задача 8. Высните, в какие тождества для скалярного и векторного произведения превращается ассоциативность кватернионного умножения $(uv)w = u(vw)$ и докажите тождество Якоби, $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$.

Задача 9. а) Если v — вектор единичной длины, то $v^2 = -1$.
б) Если u и v два ортогональных вектора, то $uv = -vu$.

Задача 10. Отображение $\mathrm{Ad}_q : v \mapsto qvq^{-1}$ а) переводит вектора в вектора; б) является движением.

Задача 11. Найдите матрицу оператора Ad_q для а) $q = i$; б) $q = \cos\phi + i\sin\phi$; что это за движение?

Задача 12. а) Любой поворот вокруг оси можно представить в виде Ad_q для некоторого кватерниона q единичной нормы.
б) Сколькими способами это можно сделать?

Задача 13. а) Композиция сохраняющих начало координат вращений трехмерного пространства — вращение.
б) Движение пространства, сохраняющее ориентацию и имеющее неподвижную точку, является поворотом вокруг некоторой оси.

Задача 14. а) Пусть r — поворот на угол $\dfrac{\pi}{2}$ вокруг оси $(1, 0, 0)$, а t — на угол $\dfrac{2\pi}{3}$ вокруг оси $(1, 1, 1)$. Найдите ось и угол поворота $s = rt$.
б) Сколько всего вращений можно получить, компонуя преобразования r и t?

Дополнительная часть

Задача 15. Рассмотрим кватернионы как двумерное комплексное векторное пространство: $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$.
а) Найдите матрицы (левого) умножения на элементы 1, i, j, k.
б) Алгебра кватернионов изоморфна алгебре комплексных матриц[16] 2×2 вида $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$.

Задача 16. Убедитесь, что отображение Ad задает сюръективный гомоморфизм $Sp_1 \to SO_3$ и найдите его ядро.

Задача 17. а) Найдите группу вращений тетраэдра.
б) Опишите явно прообраз $2T$ этой группы при гомоморфизме $Sp_1 \to SO_3$.
(Совет: тетраэдр удобно взять вписанным в стандартный единичный куб.)
в*) Выпуклая оболочка точек из $2T$ образует правильный 4-мерный многогранник (какие у него гиперграни и сколько их?).

Задача 18. а) Найдите группу вращений куба (или октаэдра).
б) Опишите явно прообраз этой группы при гомоморфизме $Sp_1 \to SO_3$.
Предупреждение: выпуклая оболочка этих точек правильного многогранника *не* образует.

Задача 19*. а) Группа вращений додекаэдра (или икосаэдра) изоморфна группе A_5.
б) Опишите явно прообраз $2I$ этой группы при гомоморфизме $Sp_1 \to SO_3$.
в) Выпуклая оболочка точек из $2I$ образует правильный 4-мерный многогранник (какие у него гиперграни и сколько их?).

Задача 20. Если q — кватернион единичной нормы, то отображение $\mathbb{H} \to \mathbb{H}, v \mapsto -q\overline{v}q$ является отражением 4-мерного пространства относительно 3-мерного подпространства с нормалью q.

Задача 21. а) Если l и r — кватернионы единичной нормы, то $m_{l,r}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, v \mapsto lvr^{-1}$ — движение 4-мерного пространства.
б) Отображение $m\colon Sp_1 \times Sp_1 \to SO_4$ является сюръективным гомоморфизмом.
в) Найдите ядро этого гомоморфизма.

[16] Отсюда следует, в частности, ассоциативность кватернионного умножения.

Расширения полей II: Степень расширения

▷ **Определение 1.** Пусть L/K — расширение полей (т. е. K — подполе поля L). Тогда L можно рассматривать как векторное пространство над K. Размерность $[L : K]$ этого пространства называется *степенью расширения.* Расширение, имеющее конечную степень, называется *конечным.*

Задача 1. Чему равна а) степень $[\mathbb{C} : \mathbb{R}]$; б) степень $[\mathbb{F}_4 : \mathbb{F}_2]$?

Задача 2. а) Если поле из p элементов вложено в поле из q элементов, то число q — степень числа p. б) Количество элементов конечного поля — степень простого числа.

Задача 3. а) Расширение $K(\sqrt{d})/K$ имеет степень 2.
б) Если P — неприводимый многочлен степени n, то $[K[x]/(P) : K] = n$.

Задача 4. а) Если есть башня из трех полей $F \subset K \subset L$, то $[L : F] = [L : K] \cdot [K : F]$.
б) Если L/F — расширение полей степени n, то степень любого промежуточного расширения K/F делит число n.

Задача 5. Найдите а) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$; б) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$; в) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.

▷ Пусть на плоскости введена система координат. Будем сопоставлять каждому набору $\mathcal{K}$ точек подполе K действительных чисел, порожденное всеми координатами этих точек.

Задача 6. Коэффициенты уравнения
а) прямой, проходящей через пару точек из $\mathcal{K}$;
б) окружности с центром в точке из $\mathcal{K}$ и проходящей через точку из $\mathcal{K}$
лежат в K.

Задача 7. Пусть $\mathcal{L}$ получается из $\mathcal{K}$ добавлением точки пересечения
а) двух прямых; б) прямой и окружности; в) двух окружностей с коэффициентами из K.
Чему может равняться степень расширения L/K?

Задача 8. Если число α можно получить из элементов поля $K \subset \mathbb{R}$ при помощи циркуля и линейки, то $[K(\alpha) : K]$ — степень двойки.

Задача 9. Циркулем и линейкой нельзя построить отрезок в $\sqrt[3]{2}$ длиннее данного (то есть задача об удвоении куба не имеет решения).

Задача 10. Найдите минимальный многочлен числа а) $\cos\dfrac{\pi}{9}$; б) $\cos\dfrac{\pi}{5}$; в*) $\cos\dfrac{\pi}{7}$.
Указание. Используйте равенства вида $\cos n\varphi = \cos m\varphi$.

Задача 11. Задача о трисекции угла не имеет решения.

Задача 12. а) Конечное расширение алгебраично[17]. (Верно ли обратное?)
б) Если расширение порождено (как поле) конечным набором алгебраических элементов, то оно конечно и его степень не превосходит произведения степеней этих элементов.

Задача 13. Если L/K — произвольное расширение, то множество его элементов, алгебраичных над K, образует поле (в частности, алгебраические числа образуют поле).

[17] Определение можно найти в листке «Расширения полей I».

Группы

▷ **Определение 1.** Совокупность биекций множества E на себя называется *группой преобразований* (множества E), если она замкнута относительно композиции и взятия обратного и содержит тождественное отображение.

Примеры:
- группа перестановок (всех биекций фиксированного множества на себя);
- группа движений плоскости (биекций плоскости на себя, сохраняющих расстояния);
- группа симметрий фигуры (движений, сохраняющих данную фигуру);
- группа автоморфизмов поля (биекций поля на себя, согласованных с операциями).

Задача 0. Сколько элементов в группе симметрий а) прямоугольника; б) квадрата? Сколько среди них поворотов, а сколько отражений?

Задача 1. Являются ли группами
а) множество A_n четных перестановок; б) множество нечетных перестановок;
в) множество поворотов плоскости; г) множество параллельных переносов плоскости?

▷ **Определение 2.** Отображение групп называется *гомоморфизмом*, если оно переводит тождественное преобразование в тождественное, а композицию — в композицию. Биективный гомоморфизм называется *изоморфизмом*.

Задача 2. а$_0$) Группа вращений правильного треугольника изоморфна A_3.
а) Группа вращений (правильного) тетраэдра изоморфна A_4.
б) Группа вращений куба изоморфна S_4.
в*) Группа вращений додекаэдра изоморфна A_5.
(Вопрос-указание: какие объекты переставляют эти группы?)

▷ **Определение 3.** Множество G вместе с бинарной операцией $\cdot : G \times G \to G$ и выделенным элементом $e \in G$ называется (абстрактной) *группой*, если
1) $\forall a, b, c \in G\ (ab)c = a(bc)$; 2) $\forall a \in G\ ae = a = ea$; 3) $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G : aa^{-1} = e = a^{-1}a$.

Примеры:
- $\mathbb{Z}/n$ или $\mathbb{Z}$ по сложению (“циклическая группа”);
- произвольное кольцо R по сложению;
- множество обратимых элементов $R^\times$ произвольного кольца R по умножению.

Определение 2 легко переносится на абстрактные группы. Если группы G и G' изоморфны, пишут $G \cong G'$. Примеры: $S_2 \cong \mathbb{Z}/2$, $A_3 \cong \mathbb{Z}/3$.

Задача 3. а$_1$) $\mathbb{R}^\times_{>0} \cong \mathbb{R}$ (“группа положительных вещественных чисел по умножению изоморфна группе вещественных чисел по сложению”); а$_2$) $\mathbb{R}^\times \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{R}$;
б) $\mathbb{C}^\times \cong S^1 \times \mathbb{R}$ (где окружность S^1 можно понимать либо как множество комплексных чисел единичной нормы, либо как $\mathbb{R} \bmod 2\pi$ с естественной операцией);
в) $\mathbb{Q}^\times \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ (где символ $\mathbb{Z}^{\oplus\mathbb{N}}$ обозначает совокупность финитных последовательностей целых чисел);
г$_1^*$) $\mathbb{F}_p^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)$; г$_2^*$) $\mathbb{F}_q^\times \cong \mathbb{Z}/(q-1)$.

Задача 4. Изоморфны ли группы а) $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m$ и $\mathbb{Z}/nm$; б*) S_n и $A_n \times \mathbb{Z}/2$;
й$_1$) симметрий квадрата и $\mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2$; й$_2$) симметрий прямоугольника и $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$;
в) симметрий тетраэдра и $A_4 \times \mathbb{Z}/2$; г) симметрий тетраэдра и S_4?

Задача 5. Любая абстрактная группа изоморфна группе преобразований некоторого множества *("теорема Кэли")*.

▷ **Определение 4.** Пусть G — группа, H — ее подгруппа. Фактор-множество группы G по отношению эквивалентности "отличаться умножением справа на элемент из H" обозначается G/H.

Задача 6. а) $|G| = |G/H| \cdot |H|$; в частности, порядок[18] подгруппы делит порядок группы *("теорема Лагранжа")*.
б) Порядок элемента делит порядок группы (в частности, $\forall g \in G\ g^{|G|} = e$).

Задача 7. Если число a взаимно просто с n, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, где $\varphi(n)$ — количество обратимых остатков по модулю n; в частности, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Задача 8. Опишите все подгруппы и отношения включения между ними для
а) $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/n$; б) $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$; в) S_3; г*) S_4; д*) S_5.

Задача 9а. Группа из p элементов является циклической.

Задача 9*. Опишите все группы из б) p^2; в) $2p$; г) pq элементов (p и q простые).

▷ **Определение 5.** *Ядром* гомоморфизма групп $\varphi\colon G \to G'$ называется прообраз единицы при этом отображении (обозначение: $\operatorname{Ker}\varphi$).

Задача 9$\frac{1}{2}$. Убедитесь, что четность — гомоморфизм из S_n в $\mathbb{Z}/2$. Что является его ядром?

Задача 10. Пусть $\varphi\colon G \to G'$ — гомоморфизм.
а) $\operatorname{Ker}\varphi$ — подгруппа группы G; б) $\forall g \in G\ \forall h \in \operatorname{Ker}\varphi\ \ g^{-1}hg \in \operatorname{Ker}\varphi$.

▷ **Определение 6.** Подгруппа $H \subset G$ называется *нормальной*, если

$$\forall g \in G\ \forall h \in H\ g^{-1}hg \in H.$$

(Естественно, любая подгруппа коммутативной группы нормальна.)

Задача 11. Какие из следующих подгрупп являются нормальными
а) $A_n \subset S_n$;
б) $S_{n-1} \subset S_n$ (слева — все перестановки, оставляющие на месте последний элемент);
в) $\{\pm E\} \subset O_2$ (где O_2 — все матрицы 2×2, сохраняющие расстояния);
г*) $\{\pm 1\} \subset Sp_1$ (где Sp_1 — кватернионы единичной нормы)?

Задача 12. Если подгруппа $H \subset G$ нормальна, то на множество G/H корректно спускается операция умножения, превращая его в группу.

Задача 13. $\operatorname{Im}\varphi \cong G/\operatorname{Ker}\varphi$ для любого[19] гомоморфизма φ.

Задача 14. Подгруппа нормальна тогда и только тогда, когда она является ядром некоторого гомоморфизма.

Задача 15. Найдите факторгруппы по нормальным подгруппам из задачи 11.

---

[18] Т. е. количество элементов.

[19] «Гомоморфный образ группы
канонический морфизмом
изоморфен факторгруппе
по ядру гомоморфизма.»

Задача 16. а) Опишите все нормальные подгруппы групп S_3 и S_4; б) найдите соответствующие факторгруппы.

Задача 17. У а) A_5; б*) A_n (при $n \geqslant 5$) нет (нетривиальных) нормальных подгрупп.

Задача 18. При $n \geqslant 5$ знак — единственный (по существу) нетривиальный гомоморфизм из перестановок в коммутативную группу.

Задача 19*. Любая конечно-порожденная коммутативная группа является произведением циклических.

Формула Эйлера–Маклорена и числа Бернулли

▷ **Определение 1.** Экспонентой оператора A называется оператор

$$\exp(A) := E + A + \frac{A^2}{2} + \ldots$$

(например, экспонента оператора умножения на λ есть оператор умножения на e^{λ}).

Задача 1. а) Пусть $\frac{d}{dx}$ — оператор, переводящий многочлен в его производную. Тогда $\exp(\frac{d}{dx})f(x) = f(x+1)$ (“формула Тейлора”).
б) Выразите значение многочлена в точке x через значения его производных в нуле (“формула Маклорена”).

▷ **Определение 2.** *Рядом Тодда* называется формальный степенной ряд

$$\mathrm{td}(x) := \frac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1 x + B_2\frac{x^2}{2} + B_3\frac{x^3}{3!} + \ldots;$$

коэффициенты B_k называются *числами Бернулли.*

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\boldsymbol{B_n}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

Задача 2. Пусть f — многочлен, F — его *первообразная* (такой многочлен, что $F' = f$).
а) $f(x) + \ldots + f(x+n-1) = \mathrm{td}\bigl(\frac{d}{dx}\bigr)\bigl(F(x+n) - F(x)\bigr)$;
б) $f(0) + \ldots + f(n-1) = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx + B_1(f(n) - f(0)) + B_2\frac{f'(n) - f'(0)}{2} + \ldots,$
где интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ можно формально понимать как разность $F(b) - F(a)$ (“формула Эйлера–Маклорена”).

Задача 3. Выразите сумму $S_k(n) := 1^k + \ldots + n^k$ через числа Бернулли.

Задача 4. $B_0 = 1$; $B_n = -\displaystyle\sum_{k<n}\binom{n}{k}\frac{B_k}{n-k+1}$.

▷ Напомним, что число сюръекций n-элементного множества на k-элементное есть $k!\left\{ n \atop k \right\}$ (это можно считать определением *чисел Стирлинга второго рода*).

Задача 5*. а) $x^n = \displaystyle\sum_{k\leqslant n}\left\{ n \atop k \right\} x^{\downarrow k}$; б) $B_n = \displaystyle\sum_{k\leqslant n}\frac{(-1)^k}{k+1}\,k!\left\{ n \atop k \right\}$.

Задача 6. Выразите коэффициенты ряда а) $\frac{x}{2}\operatorname{cth}\frac{x}{2}$; б) $\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; в*) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ через числа Бернулли.

Дополнительная часть: Значения ζ-функции

Задача 7. Формула Эйлера для котангенса имеет вид

$$\pi \operatorname{ctg} \pi x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}.$$

а) Обе части формулы обладают свойством $f(x) = \frac{1}{2}[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)]$.
б) Если непрерывная на всей прямой функция, удовлетворяющая функциональному уравнению выше, принимает максимальное значение, то она принимает его и в нуле.
в) Докажите формулу Эйлера.

▷ **Определение 3.** $\zeta(s) := \sum \dfrac{1}{n^s}$.

Задача 8. а) Как функция $\sum \zeta(2k)x^{2k}$ связана с котангенсом?
б) Выразите $\zeta(2k)$ через B_{2k} и вычислите $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$.

Задача 9. Положим $\eta(-s) := \sum (-1)^{n-1} n^s$. Тогда $\eta(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s)$.

▷ Эйлер заметил, что при фиксированном натуральном k формальный ряд $\sum(-1)^{n-1}n^k t^n$ является рациональной функцией от t и определил $\eta(-k)$ как значение этой функции при $t=1$, а $\zeta(-k)$ — как $-\frac{\eta(-k)}{2^{k+1}-1}$.

Задача 10. Вычислите $\zeta(0)$ («$1+1+1+\ldots$») и $\zeta(-1)$ («$1+2+3+4+\ldots$») «по Эйлеру».

Задача 11. а) $\sum\limits_{n>0}(-1)^{n-1}n^k t^n$ — рациональная функция от t. б) $\zeta(-k) = -\dfrac{B_{k+1}}{k+1}$.

Конечные поля и конечные тела[1]

Задача 1. Пусть K — конечное поле, $K^\times := K \setminus \{0\}$ — его мультипликативная группа. Тогда в $K^\times$ не более d элементов порядка d.

▷ **Определение 1.** Число обратимых остатков по модулю n называется *функцией Эйлера* числа n и обозначается $\varphi(n)$.

Задача 2. а) $\varphi(p) = p - 1$; б) $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Задача 3. Пусть G — коммутативная группа порядка n, $G_d := \{g \in G \mid g^d = 1\}$.
а) Если группа G циклическая, то $|G_d| = d$ при всех d, делящих n.
б) Если $|G_d| \leqslant d$ при всех d, то группа G циклическая.
Указание. Сколько в группе G элементов порядка n?

Задача 4. Мультипликативная группа конечного поля циклическая.

Задача 5. а) $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \mod p$ ("критерий Эйлера").

б) Форма $x^2 + y^2$ представляет 0 по модулю p, если и только если $p \neq 4k + 3$.

Задача 6. Пусть L — конечное поле, K — его q-элементное подполе. Тогда $|L| = q^n$.

▷ Напомним, что *тело* — это кольцо (вообще говоря, некоммутативное), в котором каждый ненулевой элемент обратим ("некоммутативное поле").

Теорема Веддербёрна утверждает, что любое конечное тело является полем.

▷ **Определение 2.** *Центром* кольца R называется множество его элементов, коммутирующих со всеми элементами кольца, $Z(R) = \{a \in R \mid \forall x \in R\ ax = xa\}$.

Централизатором элемента a кольца R называется множество элементов кольца, коммутирующих с этим элементом, $Z_a = \{x \in R \mid ax = xa\}$.

Аналогичным образом определяется центр группы и централизатор элемента группы.

Задача 7. Пусть G — группа. Два ее элемента, g_1 и g_2 называются *сопряженными*, если $\exists h \in H : g_2 = hg_1h^{-1}$.
а) Сопряженность — отношение эквивалентности.
б) Класс сопряженности элемента g имеет размер $|G|/|Z_g|$.

Задача 8. Пусть D — конечное тело, $|Z(D)| = q$.
а) $|D| = q^n$; б) для любого элемента a тела $|Z_a| = q^d$, причем $d \mid n$;
в) $q^n - 1 = q - 1 + \sum \dfrac{q^n - 1}{q^{d_i} - 1}$ (причем все d_i делят n).
Указание. Примените предыдущую задачу к группе $D^\times := D \setminus \{0\}$.

▷ **Определение 3.** n-м *круговым многочленом* называется многочлен $\varPhi_n(x) = \prod(x - \zeta_n)$, где произведение берется по всем примитивным корням степени n из единицы.

Задача 9. а) $\varPhi_p(x) = x^{p-1} + \ldots + 1$; б) $\deg \varPhi_n = \varphi(n)$; в) $\prod\limits_{d|n} \varPhi_d(x) = x^n - 1$; г) $\varPhi_n \in \mathbb{Z}[x]$.

Задача 10. Конечное тело является полем.
Указание. Рассмотрите равенство из задачи 2в) по модулю $\varPhi_n(q)$.

Задача 11. а) В кватернионной алгебре над конечным полем $(\mathbb{F}_q[i,j]/(i^2 = j^2 = -1, ij = -ji))$ есть делители нуля.
б) Форма $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ представляет 0 по любому простому модулю.

Задача 12*. Любое целое число является суммой четырех квадратов.

[1]Листок написан по мотивам лекции Д. Каледина 30.03.2013.

Формальные ряды

Задача 1. а) Если $f(x) = e^x$, то $f' = f$. б) Если $f(x) = \cos x$ или $\sin x$, то $f'' = -f$.

Задача 2. Решите уравнение а) $f' = 0$; б) $f' = a$; в) $f' = f$.

▷ **Определение 1.** Пусть K — поле[20]. *Формальным степенным рядом* называется (бесконечная) формальная запись вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ (a_i — элементы поля K, а x — формальный символ). Кольцо формальных степенных рядов обозначается $K[[x]]$.

Задача 3. Вычислите в кольце $K[[x]]$ а) $\frac{1}{1+x}$; б) $\frac{1}{1+x+x^2}$; в*) $\sqrt{1+2x}$.

Задача 4. а) Выясните, когда у формального ряда есть обратный.
б) Как в кольце $K[[x]]$ обстоит дело с основной теоремой арифметики?

Задача 5. а) Если $\varphi(t) = t + a_2t^2 + \cdots$, то для любого $f \in K[[t]]$ определен ряд $f(\varphi(t))$.
б) Множество $t + t^2K[[t]]$ образует группу относительно композиции (с единицей t).

▷ **Определение 2.** *Производной* ряда $f(t) = \sum_k a_k t^k$ называется ряд $f'(t) = \sum_k k a_k t^{k-1}$.

Задача 6. а) $(fg)' = f'g + fg'$; б) $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

▷ Напомним, что формальной экспонентой называется ряд $\exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$.

Задача 7. а) $\exp(u + v) = \exp(u)\exp(v)$.
б*) Единственная дифференцируемая функция на прямой, такая что $\exp(u + v) = \exp(u)\exp(v)$, $\exp(0) = 1$, $\exp'(0) = 1$, — это e^x.

Задача 8*. $\exp(\ln(1 + x)) = 1 + x$, где $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k} + \cdots$.

Задача 9*. Пусть $\alpha \in K$, $f \in 1 + xK[[x]]$. Положим $f^\alpha = \exp(\alpha \ln f)$. Тогда $f^{\alpha+\beta} = f^\alpha \cdot f^\beta$ (в частности, для натуральных степеней это определение согласованно с естественным).

Задача 10*. $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha^{\downarrow k}}{k!}x^k + \cdots$.

▷ **Определение 3.** *Линейным однородным дифференциальном уравнением с постоянным коэффициентами* степени n называется уравнение вида

$$a_0 f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} f' + a_n f = 0, \qquad (*)$$

где a_i — фиксированные элементы поля, $a_0 \neq 0$.

Задача 11. Все решения уравнения $f' = f$ имеют вид $f = C\exp(x)$.

Задача 12. Совокупность формальных решений[21] уравнения $(*)$ является линейным пространством размерности n.

Задача 13. Опишите все решения уравнения $(*)$ в случае, когда его характеристическое уравнение не имеет кратных корней.

Задача 14. В кольце формальных степенных рядов над комплексными числами

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

где cos и sin — базис (формальных) решений уравнения $f'' = -f$.

Задача 15*. Сформулируйте и докажите аналог задачи 7 для синуса и косинуса.

---

[20] Далее будет предполагаться, что $\operatorname{char} K = 0$; можно считать, что K — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.
[21] Т. е. решений в кольце формальных степенных рядов (а не среди настоящих функций).

Дополнительная часть: Аналитические функции

▷ **Определение 4.** *Значением* формального ряда $f(x) = \sum_i a_i x^i$ в точке x_0 называется сумма ряда
$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x_0^i := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i x_0^i.$$
Радиусом сходимости ряда f называется число $\sup\{|x_0| : \text{ряд } f(x_0) \text{ сходится}\}$.

Задача $15\frac{1}{3}$. а) Если ряд $\sum a_i$ сходится, то $\lim a_i = 0$. б) Верно ли обратное?

▷ **Определение $4\frac{1}{2}$.** Говорят, что ряд $\sum a_i$ сходится *абсолютно*, если сходится ряд $\sum |a_i|$.

Задача $15\frac{2}{3}$. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Задача 16. а) Если последовательность (a_i) такова, что $|a_i| \leqslant q^i$ для некоторого $0 < q < 1$, то ряд $\sum_i a_i$ сходится, причем абсолютно.
б) Если радиус сходимости ряда f равен R, то при $|x| < R$ ряд $f(x)$ сходится, причем абсолютно (а при $|x| > R$ — расходится).
в*) Радиус сходимости R формального ряда $\sum_i a_i x^i$ может быть найден по формуле
$$R = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$
где $\underline{\lim}_n x_n = \lim_n \inf_{m\geqslant n}\{x_m\}$.

Задача 17. Найдите радиусы сходимости рядов а) exp, cos, sin; б) $\frac{1}{1+x}$; $\frac{1}{1+x^2}$; $\ln(1+x)$.
в) Приведите пример формального ряда с нулевым радиусом сходимости.

Задача 18*. Пусть $f(x) = \sum_i a_i x^i$ — формальный ряд с радисом сходимости R.
а) Последовательность функций $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на области $|x| \leqslant r$ для любого $r < R$ (“последовательность функций f_n сходится к функции f *равномерно на компактах*”).
б) В области $|x| < R$ функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема и ее формальная производная совпадает с обычной[22].

▷ **Определение 5.** Функция, совпадающая в окрестности нуля с некоторым степенным рядом, называется *аналитической* (в нуле).

Задача 19. Для аналитической функции в некоторой окрестности нуля имеет место “формула Маклорена”:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Задача 20. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha^{\downarrow k}}{k!}x^k + \ldots$ (“бином Ньютона”).

Задача 21. Функция
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \exp(-\frac{1}{x^2}), & x \geqslant 0. \end{cases}$$
бесконечно дифференцируема на всей прямой, но не аналитична в нуле.

---

[22] Далее этим утверждением можно пользоваться без доказательства.

Задача $21\frac{1}{2}$. а) Если $f'' = -f$, то $f^2 + (f')^2 = \mathrm{const}$.
б) Если $f'' = -f$ и $f(0)^2 + f'(0)^2 = 1$, то $(\arcsin f)' = \pm 1$.
в) Если $f'' = -f$ и $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, то $f(x) = \sin x$.
г) Синус и косинус могут быть разложены в ряд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\,; \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\,.$$

▷ Задача 16 показывает, что *вещественно*-аналитическая функция с радиусом сходимости R может быть канонически продолжена на *комплексный* круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

Задача 22. Для аналитических продолжений экспоненты, синуса и косинуса на комплексную плоскость

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Формальные ряды II: Вычеты и формула обращения Лагранжа

▷ **Определение 1.** *Рядом Лорана* над полем k называется (бесконечная вправо) формальная запись вида $a_{-N}x^{-N}+\dots+a_{-1}x^{-1}+a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$. Кольцо рядов Лорана обозначается $k((x))$ или $k[x^{-1},x]]$.

Задача 1. $k((x))$ — поле частных кольца $k[[x]]$.

▷ **Определение 2.** Определим $\Omega_{k((x))/k}$ как фактор векторного пространства над $k((x))$, формально порожденного символами df $(f\in k((x)))$, по двум соотношениям:
1) $\forall f_i\in k((x))\ d(\sum f_i)=\sum df_i,\quad \forall f\in k((x))\,\forall c\in k\ d(cf)=c\,df$;
2) $\forall f,g\in k((x))\ d(fg)=f\,dg+g\,df$.

Задача 2. $\Omega_{k((x))/k}$ — одномерное векторное пространство над полем $k((x))$ с образующей dx. (Контрольный вопрос: чему равно $\frac{df}{dx}$?)

▷ **Определение 3.** *Вычетом* формы $f\,dx\in\Omega_{k((x))/k}$ (в нуле) называется коэффициент $[x^{-1}]f$ (коэффициент при x^{-1} ряда f). Обозначение: $\mathrm{res}_x(f\,dx)$.

Задача 3. а) Вычет задает изоморфизм $\Omega_{k((x))/k}/\operatorname{Im} d\to k$. б) $\mathrm{res}(u\,dv)=-\mathrm{res}(v\,du)$.

Задача 4. Вычет формы не зависит[23] от выбора локальной координаты:

$$\operatorname*{res}_x\bigl(f\,dx\bigr)=\operatorname*{res}_t\bigl(f\,dx\bigr)$$

для любого ряда $x(t)\in k^\times t+t^2k[[t]]$ (другими словами, $[x^{-1}]f(x)=[t^{-1}]f(x(t))x'(t)$).

▷ **Определение 4.** Вычетом рациональной формы $\omega\in\Omega_{\mathbb{C}(z)/\mathbb{C}}$ в точке z_0 называется вычет в нуле формы $\omega(z+z_0)$ (т.е. коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении формы ω по степеням $z-z_0$); вычетом формы ω на бесконечности называется вычет в нуле формы $\omega(1/z)$.

Задача 5. Найдите вычеты во всех точках формы а) $\dfrac{dz}{z-a}$; б) $\dfrac{z\,dz}{(z-a)(z-b)}$.

Задача 6. Сумма вычетов рациональной формы по всем точкам $\mathbb{C}P^1:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ равна нулю.

Задача 7. Если P — многочлен[24] степени не выше $n-1$, то

$$\tfrac{P(z_0)}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)\dots(z_0-z_n)}+\tfrac{P(z_1)}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)\dots(z_1-z_n)}+\dots+\tfrac{P(z_n)}{(z_n-z_0)(z_n-z_1)\dots(z_n-z_{n-1})}=0.$$

Задача 8. Если $x=f(y)$ $(f\in k^\times t+t^2k[[t]])$, то $[x^k]y=\dfrac{1}{k}\,\mathrm{res}\left(\dfrac{dy}{f^k(y)}\right)$ ("формула обращения Лагранжа").

Задача 9. Корень уравнения x^d-x-a может быть (при $|a|\ll 1$) найден по формуле[25]

$$x=-\sum_{n\geqslant 0}\binom{dn}{n}\frac{a^{(d-1)n+1}}{(d-1)n+1}.$$

Задача 10. Найдите ряд $f\in\mathbb{Q}[[t]]$, такой что коэффициент при t^{n-1} ряда f^n равен 1.

[23] Именно поэтому мы определяем вычет для форм, а не для функций.
[24] Уже случай $P=1$ содержателен.
[25] Отметим, что в радикалах это уравнение (при $d\geqslant 5$) неразрешимо.

Задача 11. Если C_n — n-е число Каталана, $C(x) = 1 + C_1x + C_2x^2 + \cdots$, то
а) $C - 1 = xC^2$; б) $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Задача 12*. Решите аналогичную задачу для числа разрезаний многоугольника диагоналями на $(d+1)$-угольники[26].

▷ **Определение 5.** *Экспоненциальной производящей функцией* последовательности (R_n) называется формальный ряд $R := \sum R_n \frac{x^n}{n!}$.

Задача 13. Если экспоненциальная производящая функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $y = xR(y)$, то $y_k = (R^k)_{k-1}$.

Задача 14. Пусть T_n — число корневых деревьев на множестве $\{1, \dots, n\}$, $T = \sum T_n \frac{x^n}{n!}$.
а) $T = x\exp(T)$; б) найдите явную формулу для T_n.

[26]Напомним, что C_n есть число разрезаний $(n+2)$-угольника на треугольники.

Приближение действительных чисел рациональными II: Цепные дроби

▷ **Определение 1.** Пусть a_0 — целое число, a_i — натуральные числа. Выражение вида

$$[a_0; a_1; \ldots] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}}$$

называется *цепной дробью*; число $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; \ldots; a_n]$ называется n-й *подходящей дробью* или *конвергентой.*

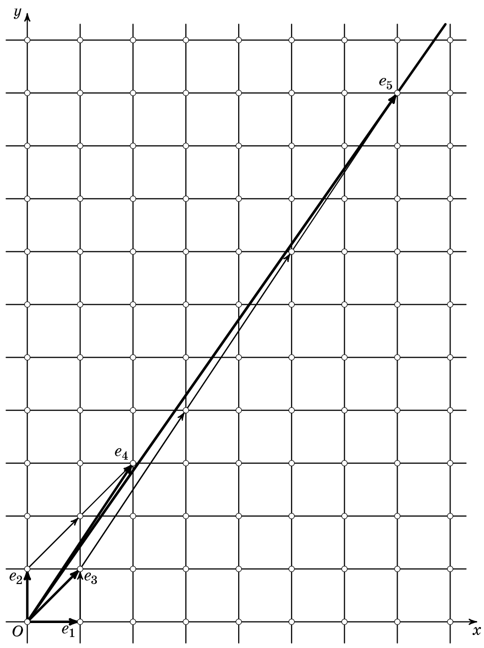
Задача 1. а) Вычислите $[3; 7; 15; 1]$ (с точностью до 7 знаков после запятой) и $[1; 1; \ldots]$; б) разложите в цепную дробь числа $10/7$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

Задача 2. Для любой бесконечной цепной дроби $[a_0; \ldots]$ последовательность конвергент сходится к некоторому действительному числу.

Задача 3. а) Ненулевое рациональное число может разложено в цепную дробь (“алгоритм Евклида”), причем ровно двумя способами: вида $[a_0; \ldots; a_n]$ и $[a_0; \ldots; a_n - 1; 1]$.
б) Иррациональное число может разложено в цепную дробь ровно одним способом.

Задача 4. а) $[a_0; a_1; \ldots; a_n; z]$ — дробно-линейная функция от z.
б*) Функция $\frac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Z})$ представима в виде $[a_0; \ldots; a_n; z] \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$.

Задача 5. Если разложение иррационального числа в цепную дробь периодично, то это квадратичная иррациональность[27].



Задача 6. Пусть α — положительное число. Рассмотрим последовательность векторов (e_i): $e_1 = (1\ 0)$, $e_2 = (0\ 1)$; $e_{i+1} = e_{i-1} + a_{i-2}e_i$, где в качестве a_{i-2} берется наибольше натуральное число, при котором e_{i+1} остается с той же стороны от прямой $y = \alpha x$, что и e_{i-1} (“алгоритм вытягивания носов”).
а) Пара векторов (e_i, e_{i+1}) — базис целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$.
б) Вектора (e_{2k-1}) и (e_{2k}) являются вершинами выпуклой оболочки части $\mathbb{Z}^2$ под и над прямой $y = \alpha x$ соответственно.
в) $\alpha = [a_0; a_1; \ldots]$, $e_{n+2} = (q_n\ p_n)$.
г) n-я подходящая дробь является наилучшим[28] приближением к α среди дробей со знаменателем, не превосходящим q_n.

Задача 7. а) $\det \begin{pmatrix} q_n & q_{n+1} \\ p_n & p_{n+1} \end{pmatrix} = (-1)^{n+1}$.
б) У любого иррационального числа α бесконечно много приближений, таких что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$. (Ср. с задачей 8 листка 15д.)

Задача 8*. У любого иррационального числа α бесконечно много приближений, таких что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, причем константу $\sqrt{5}$ нельзя улучшить (“теорема Гурвица–Бореля”).

[27] Как мы увидим позже, верно и обратное (“теорема Лагранжа”).
[28] В смысле коэффициента качества приближения $q|\alpha - \frac{p}{q}|$ из листка 15д.

Дополнительная часть: Комбинаторные аспекты цепных дробей

Задача 9. Числитель и знаменатель подходящей дроби для $[1;1;\ldots;1]$ — два последовательных числа Фибоначчи (в частности, $\lim \frac{F_{n+1}}{F_n} = [1;1;\ldots]$).

Задача 10*. Последовательность (a_i) удовлетворяет некоторой линейной рекурренте тогда и только тогда, когда ее производящая функция $a_0 + a_1t + a^2t^2 + \ldots$ рациональна.

▷ **Определение 2.** *Пути Дика* — это пути из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, состоящие из шагов $(1,1)$ и $(1,-1)$ и не опускающиеся ниже прямой $y=0$. Количество таких путей — это n-е число Каталана.

Пути Моцкина – это пути из точки $(0,0)$ в точку $(n,0)$, состоящие из шагов $(1,1)$, $(1,0)$ и $(1,-1)$ и не опускающиеся ниже прямой $y=0$. Количество таких путей называется n-м *числом Моцкина.*

Задача 11. а) Производящая функция для чисел Каталана равна (обобщенной) цепной дроби

$$\frac{1}{1-\frac{t}{1-\frac{t}{1-\ldots}}}.$$

б) Ее k-я конвергента дает производящую функцию для путей Дика, не поднимающихся выше прямой $y=k$...
в) ...и она же равна производящей функции для плоских корневых деревьев[29], имеющих высоту не более k.

Задача 12. а) Производящая функция для чисел Моцкина равна (обобщенной) цепной дроби

$$\frac{1}{1-t-\frac{t^2}{1-t-\frac{t^2}{1-\ldots}}}.$$

б) Ее k-я конвергента дает производящую функцию для путей Моцкина, не поднимающихся выше прямой $y=k$.

(Упражнение: придумайте несколько комбинаторных интерпретаций чисел Моцкина, аналогичных вашим любимым интерпретациям чисел Каталана; попробуйте описать подмножества этих объектов, соответствующие конвергентам цепной дроби.)

[29]Ср. с задачей 7 листка «Числа Каталана».

Приближение действительных чисел рациональными III: Уравнение Пелля

▷ **Определение 1.** Пусть d — целое число, свободное от квадратов. *Нормой* элемента $z = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ называется целое число $N(z) = x^2 - dy^2$.

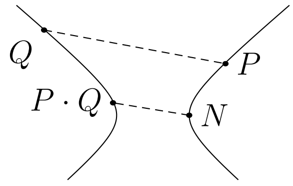
Задача 1. Норма мультипликативна: $N(zw) = N(z)N(w)$.

▷ **Определение 2.** Пусть d — целое число, свободное от квадратов. Диофантово уравнение $x^2 - dy^2 = 1$ называется *уравнением Пелля.*

Решением уравнения Пелля мы будем называть как пару целых чисел $(x\ y)$, так и соответствующий элемент единичной нормы $x + y\sqrt{d}$ кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Задача 2. а) Если уравнение Пелля имеет нетривиальное (отличное от $(\pm 1\ 0)$) решение, то оно имеет бесконечно много решений.
б) Если уравнение Пелля имеет нетривиальное решение, то группа его положительных решений изоморфна $\mathbb{Z}$.

Задача 3*. Пусть $N = (1\ 0)$; P и Q — пара точек на гиперболе $x^2 - dy^2 = 1$. Проведем через точку N секущую, параллельную хорде PQ.
а) Эта секущая пересекает гиперболу еще ровно в одной точке[30].
б) Построенная точка соответствует произведению элементов единичной нормы, соответствующих точкам P и Q.



Задача 4. Решите уравнение а) $x^2 - 3y^2 = -2$; б) $x^2 - 3y^2 = -1$.

Задача 5. Найдите формулу для k-го треугольного числа, являющегося точным квадратом.

▷ **Определение 3.** Значением *квадратичной формы* с (симметричной) матрицей Q на векторе v называется число (v, Qv). Таким образом, матрица $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ задает квадратичную форму $ax^2 + bxy + cy^2$.

Задача 6*. Отображение Q квадратично тогда и только тогда, когда отображение $(u, v) \mapsto Q(u + v) - Q(u) - Q(v)$ билинейно[31].

Задача 7. Как меняется квадратичная форма при замене координат с матрицей C?

Задача 8. а) Существует лишь конечное число целочисленных квадратичных форм с $ac < 0$ и фиксированным дискриминантом $-d < 0$.
б) Целочисленная квадратичная форма $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$ имеет нетривиальный автоморфизм (т. е. существует обратимая целочисленная замена координат, при которой эта форма не меняется). Указание. Рассмотрите алгоритм вытягивания носов для $\sqrt{d}$.
в) Уравнение Пелля имеет нетривиальное решение.
г) Разложение числа $\sqrt{d}$ в цепную дробь периодично.
д*) Разложение иррационального числа в цепную дробь периодично тогда и только тогда, когда это квадратичная иррациональность (“теорема Лагранжа”).

---

[30] Если отрезок PQ оказался вертикальным, то надо считать, что вторая точка совпадает с N (в этом случае наша “секущая” как раз касается гиперболы).

[31] Это можно считать определением квадратичного отображения — а доказывать, соответственно, что любое квадратичное отображение задается некоторой симметричной матрицей.

Задача 9. У числа $\sqrt{d}$ бесконечно много приближений, таких что $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{(2\sqrt{d}-\varepsilon)q^2}$.

Задача 10*. а) Период цепной дроби числа $\sqrt{d}$ без последнего числа — палиндром.
б) Уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ имеет решение тогда и только тогда, когда период цепной дроби числа $\sqrt{d}$ имеет нечетную длину.

Гамма-функция

Задача 1. Для целых z имеет место равенство

$$\binom{N+z}{N} = N^z\left(\frac{1}{z!}+o(1)\right) \qquad (N\to\infty,\ N\in\mathbb{N}),$$

или, что то же самое,

$$z! = \lim_{N\to\infty}\frac{N^z}{\binom{N+z}{N}}.$$

▷ Следуя Эйлеру, будем воспринимать формулу выше как определение $z!$ для произвольных (вещественных или даже комплексных) z.

Задача 2. $(z+1)! = (z+1)\cdot z!$.

Задача 3. $z! = \lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{N^z}{\prod_{n=1}^N(1+\frac{z}{n})}$.

Задача 4. а) Существует предел $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{n}-\ln N\right) =: \gamma$; б) $z! = \exp(-\gamma z)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\exp(\frac{z}{n})}{1+\frac{z}{n}}$.

▷ **Определение 1.** *Логарифмической производной* функции f называется функция $\frac{f'}{f}$. Логарифмическое дифференцирование будем обозначать символом dlog.

Ясно, что для положительных функций $\operatorname{dlog} f = (\ln f)'$.

Задача 5. $\operatorname{dlog}(fg) = \operatorname{dlog} f + \operatorname{dlog} g$.

Задача 6. а) $\xi(z) := \operatorname{dlog}(z!) = -\gamma + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right)$; б) $\xi(-z)-\xi(z) = \pi\operatorname{ctg}\pi z - \dfrac{1}{z}$.

Задача 7. а) $\sin\pi z = \pi z\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z^2}{n^2}\right)$; б) $(-z)!z! = \dfrac{\pi z}{\sin\pi z}$.

Задача 8. Вычислите $\frac{1}{2}!$ и докажите *формулу Валлиса*, $\dfrac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\ldots} = \dfrac{\pi}{2}$.

▷ **Определение 2.** $\mathit{\Gamma}(z) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ $(z>0)$; $\psi(z) := \operatorname{dlog}\mathit{\Gamma}(z)$.

Несобственный интеграл вида $\int_a^\infty$ следует понимать как предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b$ обычных интегралов.

Задача 9. а) Вычислите $\mathit{\Gamma}(0)$, $\mathit{\Gamma}(1)$, $\mathit{\Gamma}(2)$; б) $\mathit{\Gamma}(z+1) = z\mathit{\Gamma}(z)$; $\mathit{\Gamma}(n) = (n-1)!$.

Задача 10*. $\psi(z+1) = \ln z + o(1)$ *(можно далее пользоваться без доказательства).*

Задача 11. а) $\psi(z+1) = \dfrac{1}{z}+\psi(z)$; б) $\psi(1) = -\gamma$; в) $\psi(z) = -\gamma+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+z}\right)$.

Задача 12. $\mathit{\Gamma}(z+1) = z!$ (при $z>0$); $\mathit{\Gamma}(z)\mathit{\Gamma}(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin\pi z}$.

Задача 13. $\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}n!\zeta(n+1)$.

▷ Можно показать, что $\mathit{\Gamma}$-функция аналитична. Поэтому последняя задача дает разложение в ряд Тейлора (сходящийся при $|z|<1$):

$$\ln z! = -\gamma z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n}(-z)^n.$$

Задача 14*. Положим $B(s,t) := \displaystyle\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$. Тогда $B(s,t) = \dfrac{\mathit{\Gamma}(s)\mathit{\Gamma}(t)}{\mathit{\Gamma}(s+t)}$.

Цикл 5. Разные листки на выбор (11 кл.)

Общая топология II: Метрические пространства, полнота, компактность

Часть 1: Метрические пространства

▷ **Определение 1.** *Метрическим пространством* называется множество M вместе с функцией $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ (называемой *метрикой* или *расстоянием*), удовлетворяющей следующим требованиям:
1) $d(x,y) \geqslant 0$ (неотрицательность);
2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (разделение точек);
3) $d(x,y) = d(y,x)$ (симметричность);
4) $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$ (неравенство треугольника).

Первые примеры метрических пространств:
- $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$; $X = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$;
- X произвольное, $d(x,y) = 1$, если $x \neq y$, и $d(x,x) = 0$ (*"дискретная топология"*).

Любое подмножество метрического пространства имеет естественную структуру метрического пространства.

Задача 1. Следующие пары (X,d) являются метрическими пространствами:
а) $X = C[a;b]$ — множество непрерывных функций на отрезке $[a,b]$, $d(f,g) = \max|f(x) - g(x)|$ ($\sup$-*метрика* или *равномерная метрика) на функциях*;
б) $X = l_\infty$ — множество ограниченных последовательностей, $d\big((a_n),(b_n)\big) = \sup|a_n - b_n|$ ($\sup$-*метрика) на последовательностях*;
в*) $X = \mathbb{Z}$, $d(m,n) = p^{-\alpha}$, где p^α — наибольшая степень числа p, на которую делится $m-n$ (при $m = n$ полагаем $d(m,n) = 0$) *(p-адическая метрика)*;
г*) $X = \mathbb{R}^2$, $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |y_1 - y_2|$, если $x_1 = x_2$ и $|y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2|$, если $x_1 \neq x_2$ *(джунгли Амазонки)*.

Задача 2. Положим $\|(x,y)\|_p = \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}$. При каких p функция $d_p\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\|_p$ является метрикой на $\mathbb{R}^2$? (Начать можно с $p = 1, 2, 1/2, \infty$.)

▷ **Определение 2.** *Открытым* (соответственно, замкнутым) *шаром* радиуса $r > 0$ с центром в точке a называется множество $U_r(X) = \{x \in M \mid d(x,a) < r\}$ (соответственно, $\{x \in M \mid d(x,a) \leqslant r\}$). Открытый шар радиуса ε с центром в точке a называют также ε-*окрестностью* этой точки.

Задача 3. Нарисуйте замкнутые шары в метриках d_p на $\mathbb{R}^2$.

Задача 4. а) Сформулируйте определение предела последовательности элементов метрического пространства.
б) Сформулируйте два определения непрерывного отображения метрических пространств («по Коши» и «по Гейне») и докажите их эквивалентность.

▷ **Определение 3.** Подмножество метрического пространства называется *открытым*, если каждую свою точку оно содержит вместе с некоторой окрестностью.

Подмножество метрического пространства называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 5. а) Подмножество метрического пространства замкнуто тогда и только тогда, когда дополнение к нему открыто.
б) Конечное объединение и произвольное пересечение замкнутых множеств замкнуто.
в) Произвольное объединение и конечное пересечение открытых множеств открыто.

Часть 2: Полнота

▷ **Определение 4.** Последовательность (x_n) точек метрического пространства называется *фундаментальной*, если расстояние между ее членами стремится к нулю, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N : \forall k, l > N\ d(x_k, x_l) < \varepsilon.$$

Задача 6. Сходящаяся последовательность фундаментальна. (Верно ли обратное?)

▷ **Определение 5.** Метрическое пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.

Задача 7. Какие из следующих метрических пространств полны:
а) интервал, отрезок, прямая, (стандартное) канторово множество;
б) непрерывные функции, многочлены, ступенчатые функции (с равномерной метрикой на отрезке)?

Задача 8. а) Замкнутое подпространство полного пространства полно.
б) Полное подпространство произвольного пространства замкнуто.

Задача 9. В полном метрическом пространстве последовательность вложенных замкнутых шаров со стремящимся к нулю радиусом имеет общий элемент.

Задача 10. Существенно ли в предыдущей задаче условие а) полноты; б*) стремления радиуса к нулю?

▷ **Определение 6.** Отображение T метрического пространства в себя называется *сжимающим*, если

$$\exists c < 1 : \forall x, y\ d(T(x), T(y)) \leqslant c d(x, y).$$

Задача 11. а) Сжимающее отображение полного метрического пространства имеет ровно одну неподвижную точку.
б) Останется ли утверждение верным, если ослабить требование на отображение T до $\forall x \neq y\ d(T(x), T(y)) < d(x, y)$?

Задача 12. На карту России масштаба $1 : 5\,000\,000$ положили карту России масштаба $1 : 20\,000\,000$. Докажите, что найдется точка, изображения которой на обеих картах совпадут.

Задача 13. Пусть f — *равномерно* непрерывная функция из подмножества Q метрического пространства X в полное метрическое пространство Y. Тогда непрерывное продолжение этой функции на замыкание[1] Q существует и единственно.

$$\begin{tikzcd} \overline{Q} \arrow[dr, dashed] & \\ Q \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Задача 14. Функция 2^x может быть продолжена с рациональных чисел на все вещественные.

[1]Напомним, что замыкание множества Q — это минимальное замкнутое множество, содержащее множество Q. Его можно получить, добавив к множеству Q все его предельные точки.

▷ **Определение 7.** Функция на отрезке $[a; b]$ называется *ступенчатой*, если существует такое разбиение этого отрезка, что на каждом из интервалов разбиения эта функция постоянна.

Задача 15. а) Замыкание пространства ступенчатых функций на отрезке $[a; b]$ (в sup-метрике) содержит все непрерывные на этом отрезке функции.
б*) Опишите это замыкание. (Какие точки разрыва могут иметь соответствующие функции?)

Задача 16*. Определенным интегралом ступенчатой функции, равной c_i на интервале $(x_i; x_{i+1})$, называется число $\sum c_i(x_{i+1} - x_i)$.
а) Существует и единственно продолжение функционала $\int_a^b (-)\, dx$ с пространства ступенчатых функций на его замыкание в sup-метрике ("интеграл Коши").
б) Интеграл Коши линеен, аддитивен, сохраняет нестрогие неравенства.
в) Любая непрерывная функция интегрируема по Коши, причем выполняется теорема о среднем.
г) Может ли функция быть интегрируема по Риману, но не по Коши? по Коши, но не по Риману? интегрируема и по Коши, и по Риману, но с разными результатами?

▷ **Определение 8.** Подмножество метрического пространства называется *всюду плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством; *нигде не плотным*, если его замыкание не имеет внутренних точек.

Задача 17. а) Объединение конечного числа нигде не плотных множеств нигде не плотно.
б) Верно ли, что дополнение к всюду плотному множеству нигде не плотно? Верно ли, что дополнение к нигде не плотному множеству всюду плотно?

Задача 18 (теорема Бэра). Будем называть *тощим* (meagre) не более чем счетное объединение нигде не плотных подмножеств полного метрического пространства.

Докажите, что в полном метрическом пространстве дополнение к тощему множеству всюду плотно (в частности, непусто).

Задача 19. Множество а) не монотонных ни на каком интервале; б) не дифференцируемых ни в одной точке функций всюду плотно в пространстве непрерывных функций на отрезке с равномерной метрикой.

Часть 3: Компактность

▷ **Определение 9.** *Открытым покрытием* метрического пространства называется набор его открытых подмножеств, такой что каждая из точек пространства лежит хотя бы в одном из этих множеств.

Пространство называется *компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 20. Отрезок компактен.

Задача 21. а) Замкнутое подпространство компактного пространства компактно.
б) Компактное подпространство произвольного пространства замкнуто.
в) Непрерывный образ компактного пространства компактен.

Задача 22. Подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

▷ **Определение 10.** Пространство называется *секвенциально компактным*, если из любой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

▷ **Определение 11.** Подмножество метрического пространства называется *ε-сетью*, если любая точка пространства удалена от этого множества менее, чем на ε.

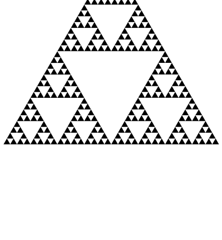
Задача 23+29. Следующие свойства метрического пространства X эквивалентны:
• X компактно;
• X секвенциально компактно;
• X полно и имеет конечную ε-сеть для любого положительного ε.

Задача $23\frac{1}{2}$*. Следующие свойства метрического пространства X эквивалентны:
• в X есть счетное всюду плотное подмножество (“X *сепарабельно*”);
• любое семейство непересекающихся открытых подмножеств X не более чем счетно;
• из любого открытого покрытия X можно выделить счетное подпокрытие.

Задача 24. Непрерывная функция на компакте а) ограничена; б) равномерно непрерывна.

Задача 25*. Множество непрерывных отображений из компактного пространства в полное пространство с sup-метрикой — полное метрическое пространство.

Задача 26*. а) Если $d(a,X) := \inf_{x\in X} d(a,X) = 0$ и множество X замкнуто, то $a \in X$.
б) Функция $d_H(X,Y) = \max\bigl(\sup_{x\in X} d(x,Y), \sup_{y\in Y} d(X,y)\bigr)$ — метрика на множестве $K(M)$ всех компактных подмножеств метрического пространства M (“метрика Хаусдорфа”).
в) Если M полно, то и $K(M)$ полно (“теорема Бляшке”).
г) Пусть $T_1, \ldots, T_n$ — сжимающие отображения полного пространства M. Тогда существует и единственен компакт K, такой что $K = T_1(K) \cup \ldots \cup T_n(K)$.



Задача $26\frac{1}{2}$*. Компактное метрическое пространство либо не более чем счетно, либо имеет мощность континуум.

Задача 27*. Любое компактное метрическое пространство является непрерывным образом канторовского множества.

Задача 28*. Любое счетное метрическое пространство вкладывается в канторовское множество.

Дополнительная часть: Размерность по Хаусдорфу

▷ **Определение 12.** Определим *d-меру Хаусдорфа* компактного метрического пространтсва как нижний предел суммы d-х степеней диаметров покрывающих его множеств по максимальному диаметру элемента покрытия:

$$M_d(X) = \lim_{\delta\to 0} \inf\Big\{\sum_i \delta(U_i)^d \;\Big|\; \bigcup U_i = X,\ \delta(U_i) \leqslant \delta\Big\}.$$

Задача 30. $M_d([a;b]) = \begin{cases} 0, & d > 1; \\ b-a, & d = 1; \\ \infty, & d < 1. \end{cases}$

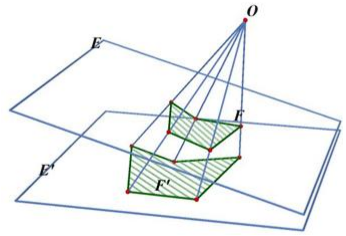
▷ **Определение 13.** *Размерностью Хаусдорфа* компактного метрического пространства называется точная нижняя грань чисел d, при которых его d-мера конечна.

Задача 31. Размерность Хаусдорфа равна $\lim \log_n N_{1/n}(X)$, где $N_\varepsilon(X)$ — размер наименьшей ε-сети.

Задача 32. Найдите размерность Хаусдорфа а) квадрата, куба; б) (стандартного) канторова множества; в) ковра Серпинского (множества с картинки на предыдущей странице).

Задача 33. Множество разбивается на n частей, каждая из которых подобна исходному множеству с коэффициентом c. Чему равняется его размерность Хаусдорфа?

Геометрические преобразования III: Проективные преобразования



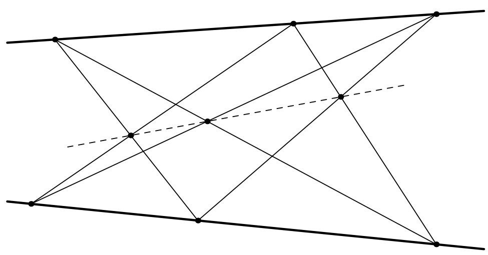
▷ **Определение 1.** Пусть α и α' — две плоскости в пространстве, не проходящие через точку O. *Центральным проектированием* называется отображение, сопоставляющее точке A плоскости α точку A' пересечения плоскости α' с прямой OA.

Задача 1. а) Если плоскости α и α' не параллельны, то центральное проектирование — биекция между $\alpha \setminus l$ и $\alpha' \setminus l'$, где l и l' — некоторые прямые (“исключительные прямые”).
б) Точки, лежащие на одной прямой, переходят при центральном проектировании в точки, лежащие на одной прямой.
в) Прямые, пересекающиеся вне исключительной прямой переходят при центральном проектировании в пересекающиеся прямые. Прямые, пересекающиеся на исключительной прямой, переходят в параллельные прямые. Прямые, параллельные друг другу, но не исключительной прямой, переходят в прямые, пересекающиеся на исключительной прямой. Прямые, параллельные исключительной прямой, переходят в прямые, параллельные исключительной прямой.

Задача 2. Подходящим центральным проектированием можно перевести любую пару прямых в пару параллельных прямых.

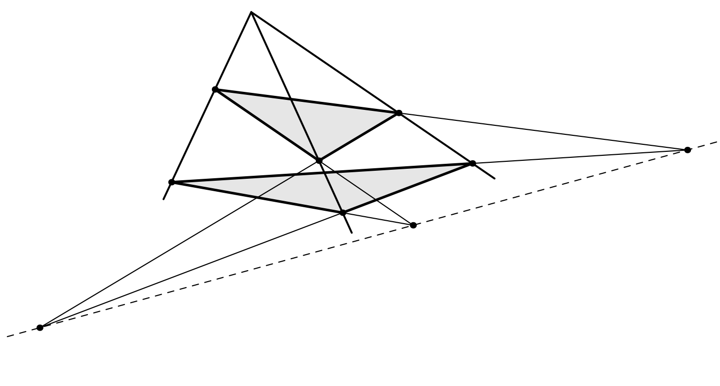
Задача 3. Пусть A, B и C — три точки на одной прямой, A', B' и C' — три точки на другой прямой.

Докажите, что точки $AB' \cap A'B$, $BC' \cap B'C$ и $CA' \cap C'A$ лежат на одной прямой (“теорема Паппа”).



Задача 4. Будем говорить, что два треугольника ABC и $A'B'C'$ *перспективны относительно точки*, если прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке; будем говорить, что эти треугольники *перспективны относительно прямой*, если точки $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ и $CA \cap C'A'$ лежат на одной прямой.

Докажите, что два треугольника перспективны относительно точки тогда и только тогда, когда они перспективны относительно прямой (“теорема Дезарга”).



Задача 5*. а) Центральное проектирование с прямой на прямую имеет в координатах вид $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, т. е. является *дробно-линейным преобразованием.*
б) Группа дробно-линейных преобразований прямой есть группа PGL_2 (фактор группы GL_2 обратимых матриц 2×2 по умножению на константы).
в) Любую тройку точек прямой можно перевести в любую другую тройку точек прямой ровно одним дробно-линейным преобразованием.

▷ **Определение 2.** *Проективная плоскость* — это обычная (аффинная) плоскость вместе с добавленными к ней бесконечно удаленными точками: по одной для каждого направления.

Прямая на проективной плоскости — это либо аффинная прямая вместе с соответствующей бесконечно удаленной точкой, либо совокупность всех бесконечно удаленных точек ("бесконечно удаленная прямая").

В силу задачи 1 центральное проектирование является биекцией проективных плоскостей, переводящее прямые в прямые (*коллинеацией*).

Задача 6. Через любые две точки проективной плоскости проходит ровно одна прямая. Любые две прямые на проективной плоскости пересекаются ровно в одной точке.

Задача 7*. Дайте определение абстрактной проективной плоскости в духе листка 8д, так чтобы любая проективная плоскость получалась из аффинной (и наоборот).

▷ **Определение 3.** Рассматривая аффинную плоскость как плоскость $z = 1$ в трехмерном пространстве, можно отождествить
- точки проективной плоскости с проходящими через начало координат прямыми,
- прямые на проективной плоскости с проходящими через начало координат плоскостями.

Если прямая имеет вид (at, bt, ct), то говорят, что соответствующая точка проективной плоскости имеет *однородные координаты* $(a : b : c)$ (числа a, b и c не все равны нулю и определены с точностью до одновременного умножения на ненулевую константу).

Если уравнение плоскости имеет вид $Ax+By+Cz = 0$, то говорят, что соответствующая прямая на проективной плоскости имеет *однородные координаты* $(A : B : C)$.

Задача 8. а) Какие однородные координаты имеет бесконечно удаленная прямая?
б) Когда точка $(a : b : c)$ лежит на прямой $(A : B : C)$?
в) Найдите координаты прямой, проходящей через точки $(a : b : c)$ и $(a' : b' : c')$.
г) Найдите координаты точки пересечения прямых $(A : B : C)$ и $(A' : B' : C')$.

Задача 9. Запишите уравнение а) гиперболы $x^2 - y^2 = 1$; б) параболы $y = x^2$; в) окружности $x^2 + y^2 = 1$ в однородных координатах и найдите все их точки на бесконечности.

▷ **Определение 4.** Через GL_n обозначается группа невырожденных линейных преобразований n-мерного пространства (т. е. обратимых матриц $n \times n$).

Однородные координаты определены с точностью до умножение на константу, поэтому на точках проективной плоскости действует (заменами координат) группа PGL_3, фактор GL_3 по умножению на константы. Такие преобразования называются *проективными.*

Задача 10. а) Проективное преобразование является коллинеацией.
б) Аффинное преобразование $(x \mapsto Ax + b)$ является проективным (с какой матрицей?).
в) Центральное проектирование является проективным преобразованием.
г*) Любое проективное преобразование — композиция центральных проектирований и аффинных преобразований.

Задача 11. а) Проективным преобразованием можно перевести любую четверку точек общего положения в любую другую такую четверку...
б*) ...причем ровно одним способом.

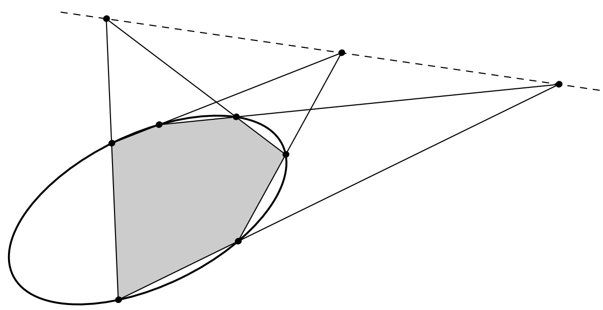
Задача 12. а) Образ кривой второй степени при проективном преобразовании — кривая второй степени.
б) Все эллипсы, параболы и гиперболы проективно эквивалентны.

Задача 13. Существует проективное преобразование, переводящее данную окружность в себя и
а) переводящую данную (не пересекающую ее) прямую на бесконечность;
б) данную хорду в диаметр;
в) данную точку (внутри нее) в ее центр.

Задача 14. При помощи одной линейки нельзя а) разделить данный отрезок пополам; б) построить центр данной окружности.

Задача 15. Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью, пересекаются в одной точке.

Задача 16. Точки пересечения трех пар противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой (“теорема Паскаля”).



▷ **Определение 5.** Говорят, что прямая и точка *инцидентны*, если точка лежит на прямой.

Задача 17. Если в верном утверждении о точках и прямых проективной плоскости, использующем только отношение инцидентности, поменять местами слова «точка» и «прямая», то оно останется верным (“проективная двойственность”).

Задача 18*. а) Уточните последнее утверждение: постройте отображение, переводящая точки в прямые, а прямые в точки, сохраняющее отношение инцидентности (такие отображения называются *корреляциями*).
б) Найдите множество самосопряженных (инцидентных своей двойственной прямой) точек на *комплексной* проективной плоскости.
в) Как, имея это множество точек, построить одной линейкой прямую, двойственную данной точке?

Задача 19. Какая теорема двойственна
а) теореме Дезарга; б) теореме Паскаля; в*) теореме Чевы?

Векторные поля I: Индекс

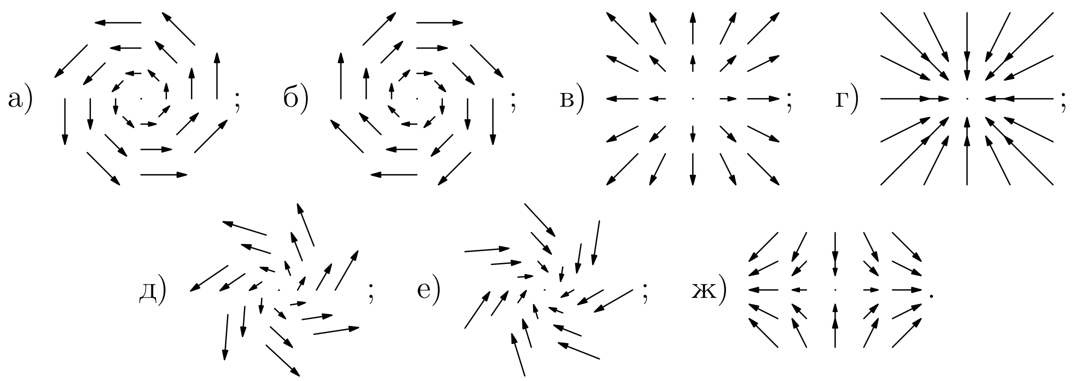
▷ **Определение 1.** Говорят, что на плоскости задано *векторное поле*, если в каждой точке (x, y) задан вектор $v(x, y)$. Мы будем рассматривать только непрерывные (как отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) векторные поля; желающие могут также считать все поля кусочно-линейными.

Точки, в которых векторное поле обращается в ноль, называются *особыми.*

Задача 1. Нарисуйте векторные поля, укажите их особые точки
а) $v(x, y) = (x, y)$; б) $v(x, y) = (-x, -y)$; в) $v(x, y) = (2x, -y)$; г) $v(x, y) = (x, y^2)$.

▷ **Определение 2 (неформальное).** *Индексом векторного поля вдоль кривой* называется число оборотов, совершаемых векторным полем при обходе[2] вдоль этой кривой.

Задача 2. Найдите индексы нарисованных векторных поле вдоль маленькой окружности с центром в начале координат.



Задача 3*. Индекс не меняется при деформации кривой, не задевающей особых точек. *(Утверждением этой задачи можно далее пользоваться без доказательства.)*

▷ **Определение 3.** В силу предыдущей задачи индекс векторного поля не зависит от выбора простой кривой, внутри которой лежит только эта особая точка. Это число назывется *индексом особой точки* векторного поля.

Задача 4. Приведите примеры[3] особых точек индекса а) 0; б) ± 2; в) $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 5. а) Если внутри простой кривой нет особых точек векторного поля, то индекс вдоль нее равен 0.
б) Индекс векторного поля вдоль простой кривой, внутри которой лежит конечное число особых точек, равен сумме индексов этих точек.
в*) Как правильно понимать последнее утверждение для самопересекающихся кривых?

Задача 6. Нарисуйте векторное поле, которое вне круга радиуса 1 тождественно равно $(1, 0)$, а внутри круга
а) имеет ровно 2 особые точки с индексами $+1$ и -1;
б) имеет несколько особых точек, среди них одна имеет индекс 2 и одна индекс 1;
в) имеет ровно одну особую точку.

---

[2]Обход совершается против часовой стрелки; обороты считаются с учетом направления. Кривая не должна проходить через особые точки векторного поля.

[3]В первых двух пунктах достаточно рисунка. В последнем пригодится еще и явная формула.

Задача 7. Непрерывное отображение круга в себя имеет неподвижную точку (“теорема Брауэра”).

Задача 8. Не существует непрерывного отображения круга на его граничную окружность, тождественного на этой окружности (“барабан нельзя смять на его обод”).

Задача 9. Будем рассматривать функцию из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ как векторное поле. Нарисуйте соответствующие векторные поля и найдите индексы вдоль окружности $|z| = R \gg 0$ для функции а) z; б) z^2; в) $z^2 + z$; г) z^{-1}; д) z^n.

Задача 10. Дама гуляет с собачкой вокруг столба, причем в каждый момент времени расстояние от дамы до столба больше длины поводка собачки. Тогда собачка обходит столб столько же раз, сколько и дама.

Задача 11. а) Индекс векторного поля $z \mapsto P(z)$ вдоль окружности $|z| = R \gg 0$ зависит только от степени многочлена P.
б) Непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет корень (“основная теорема алгебры”).

▷ **Определение 4.** Говорят, что на поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле, если в каждой ее точке x задан вектор $v(x)$, *лежащий в касательной к S плоскости T_xS.*

Задача 12. Постройте векторное поле
а) на сфере с одной особой точкой;
б) на торе без особых точек; с одной особой точкой; с особыми точками индекса ± 1.

Задача 13. а) У любого векторного поля на сфере есть особая точка.
б) Сумма индексов особых точек векторного поля[4] на сфере равна 2.

Задача 14. Непрерывное отображение сферы в себя имеет либо неподвижную, либо переходящую в диаметрально противоположную точку.

[4] Любого, лишь бы этих особых точек было конечное число.

Общая топология III: Гомеоморфизмы

Задача 1. Верно ли, что при непрерывном отображении
а) образ открытого множества открыт; б) прообраз открытого множества открыт;
в) образ замкнутого множества замкнут; г) прообраз замкнутого множества замкнут;
д*) образ компактного множества компактен?

Задача 2. Отображение метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества при этом отображении открыт.

▷ **Определение 1*.** *Топологическим пространством* называется множество вместе с совокупностью его подмножеств ("топологией"), называемых *открытыми*, такой что
• пустое множество и все пространство открыты;
• произвольное объединение и конечное пересечение открытых множеств открыто.

Метрическое пространство обладает естественной топологией. Примеры топологий на произвольном множестве X:
• *дискретная топология* (открыты все подмножества),
• *антидискретная топология* (открыты только $\varnothing$ и X),
• *кофинитная топология* (открыты $\varnothing$ и дополнения к конечным множествам).

Непрерывным отображением топологических пространств называется отображение, при котором прообраз открытого множества открыт.

Задача 3. Приведите пример непрерывного взаимно однозначного отображения метрических пространств, обратное к которому не является непрерывным.

▷ **Определение 2.** Непрерывное взаимно однозначное отображение, обратное к которому также непрерывно, называется *гомеоморфизмом.*

Задача 4*. Непрерывное взаимно однозначное отображение компакта — гомеоморфизм.

▷ **Определение 3.** Пространство называется *(топологически) связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств.

Задача 5. Следующие свойства пространства X эквивалентны
1) у X нет собственных открыто-замкнутых[5] подмножеств; 2) X связно;
3) любое непрерывное отображение из X в $\{0,1\}$ постоянно.

Задача 6. Для связного пространства выполнена теорема о промежуточном значении.

Задача $6\frac{1}{2}$. Связно ли множество рациональных чисел?

▷ **Определение 4.** Пространство называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путем[6].

Задача 7. а) Отрезок связен. б) Линейно связное пространство связно.

Задача 8. а) Открытое подмножество плоскости[7] связно тогда и только тогда, когда оно линейно связно.
б*) Верно ли, что функция непрерывна тогда и только тогда, когда ее график связен?
в*) Приведите пример связного, но не линейно связного пространства.

---

[5] По-английский говорят забавное слово "clopen".
[6] Т. е. для любой пары точек $a, b \in X$ существует непрерывное отображение $f\colon [0;1] \to X$, такое что $f(0) = a$, $f(1) = b$.
[7] Можно попробовать придумать более общую формулировку.

Задача 9. Сохраняется ли при гомеоморфизме а) полнота; б) компактность; в) связность; г) линейная связность; д*) хаусдорфова размерность?

Задача 10. Гомеомеорфны ли а) отрезок и интервал; б) буквы «С», «Т», «О»; в) остов тетраэдра и окружность вместе с двумя параллельными хордами; г) отрезок и квадрат; д*) канторово множество и его квадрат?

Задача 11*. Два графа гомеоморфны[8] тогда и только тогда, когда один из другого можно получить последовательностью разбиений ребер (добавления на ребро вершины) и обратных операций.
(Следствие: эйлерова характеристика графа — инвариант гомеоморфизма.)

Задача 12*. Если n-мерный куб ($[0;1]^n$) гомеоморфен m-мерному, то $n = m$.

Задача 13*. а) Счетное метрическое пространство гомеоморфно подмножеству прямой. б) Счетное метрическое пространство без изолированных точек гомеоморфно пространству рациональных чисел (“теорема Серпинского”).

Дополнительная часть: Топологии

Задача 14. Сколько существует различных топологий на а) 2-элементом; б) 3-элементном; в**) n-элементном множестве?

Задача 15*. Будем называть множество целых чисел открытым, если оно является объединением арифметических прогрессий.
а) Это топология на множестве целых чисел.
б) Арифметическая прогрессия в этой топологии (не только открыта, но и) замкнута[9].
в) Выведите отсюда, что простых чисел бесконечно много.
Указание. Множество $\{-1, 1\} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup(p)$ не может быть открытым.

▷ **Определение 5.** Пусть A_1 и A_2 — подпространства топологического пространства X, $\varphi\colon A_1 \to A_2$ — гомеоморфизм. Рассмотрим фактормножество X', получающееся из X отождествлением точек x и $\varphi(x)$ (“склейкой A_1 с A_2 по отображению φ”). Будем называть открытыми те подмножества множества X', прообраз которых в X открыт.

Примеры: трубка (боковая поверхность цилиндра) и лента Мёбиуса — результаты двух различных склеек противоположных сторон прямоугольника; тор и бутылка Клейна — результаты двух различных склеек противоположных концов трубки.

Задача 16. а) Описанные открытые множества доставляют топологию на множестве X'.
б) Результат склейки двух копий $\mathbb{R}$ по $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не является метризуемым.
(Таким образом, даже если X было метрическим пространством, топология на X' не задается, вообще говоря, никакой метрикой).

---

[8] Здесь допускается, конечно, вольность речи: граф Γ — это комбинаторный объект (множество V вершин, множество E ребер и пара отображений $s, t\colon E \to V$), но по нему может быть построено метрическое пространство $\left(|\Gamma| := \frac{V \sqcup E \times [0;1]}{(e,0) \sim s(e),\, (e,1) \sim t(e)}\right)$; о гомеоморфизме таких пространств и идет речь.

[9] Замкнутые подмножества суть дополнения к открытым.

Векторные поля II: Траектории

▷ **Определение 1.** Кривая $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ называется *траекторией* векторного поля v, если $\dot\gamma = v(\gamma)$. (В частности, вне особых точек траектория касается векторного поля.)

Задача 1*. Пусть v — гладкое (непрерывно дифференцируемое) векторное поле. Тогда (i) через каждую точку проходит траектория; (ii) две траектории, имеющие общую точку, совпадают в некоторой окрестности этой точки ("теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения")
(Утверждением этой задачи можно далее пользоваться без доказательства.)

Задача 2. Найдите все траектории и нарисуйте их эскизы для векторного поля
а) $v(x, y) = (2x, y)$; б) $v(x, y) = (x, -y)$; в) $v(x, y) = (-y, x)$; г) $v(x, y) = (x, y^2)$.

Задача 3. Может ли траектория гладкого векторного поля за конечное время а) приходить в особую точку; б) уходить на бесконечность?

Задача 4. Приведите пример непрерывного векторного поля, для которого не выполнено утверждение теоремы существования и единственности.

▷ **Определение 2.** Для гладкого векторного поля v можно рассмотреть отображение *фазового потока* (эволюции за время t) g_v^t, переводящее точку $\gamma(0)$ в точку $\gamma(t)$.

Задача 5*. Для любого t и любой точки x можно найти ее окрестность $U(x)$, на которой отображение g_v^t гладко и биективно ("теорема о зависимости от начального условия").
(Утверждением этой задачи можно далее пользоваться без доказательства.)

Задача 6. $g^{t+s} = g^t \circ g^s$; $g^0 = \mathrm{id}$ ("g^t — однопараметрическая группа").

Задача 7. Найдите преобразование g^t для поля а) $(2x, y)$; б) $(-y, x)$.

▷ **Определение 3.** Говорят, что точка y принадлежит *ω-предельному множеству* точки x, если в любой окрестности точки y выходящая из точки x траектория оказывается сколь угодно поздно. Обозначение: $\omega(x)$.

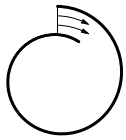
Задача 8. Существует ли такое векторное поле на плоскости, что ω-предельное множество одной из точек — две параллельные прямые?

Задача 9. а) $\bigcap\limits_N \overline{\{x_n \mid n \geqslant N\}}$ есть множество предельных точек последовательности (x_n).
б) $\omega(x) = \bigcap\limits_{T\geqslant 0} \overline{\{g^t(x) \mid t \geqslant T\}}$ (черта везде обозначает замыкание).

Задача 10. ω-предельное множество а) одинаково для точек на одной траектории; б) инвариантно (содержит траекторию каждой своей точки); в) замкнуто.

Задача 11. $\omega(\omega(x)) \subset \omega(x)$ (где $\omega(X) = \bigcup_{x\in X} \omega(x)$).

Задача 12. Для векторного поля на замкнутой поверхности (например, на сфере или торе) ω-предельное множество любой точки а) непусто; б) (топологически) связно.



Задача 13. Отмеченная на рисунке жирным траектория ("мешок Бендиксона") не может быть ω-предельной.

Задача 14. Пусть у гладкого векторного поля на сфере число особых точек конечно.
а) Если $y \in \omega(x)$, то либо y лежит на замкнутой траектории, либо $\omega(y)$ — особая точка.
б) ω-предельное множество любой точки является либо особой точкой, либо замкнутой траекторией, либо объединением (каких-то) особых точек и соединяющих их траекторий ("теорема Пуанкаре–Бендиксона").

Задача 15. Выведите из теоремы Пуанкаре–Бендиксона, что гладкое векторное поле на сфере имеет особую точку.

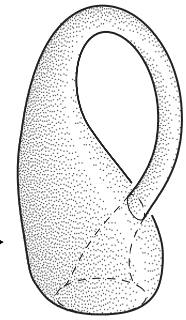
Задача 16. Может ли в ω-предельное множество точки сферы входить бесконечное число траекторий?

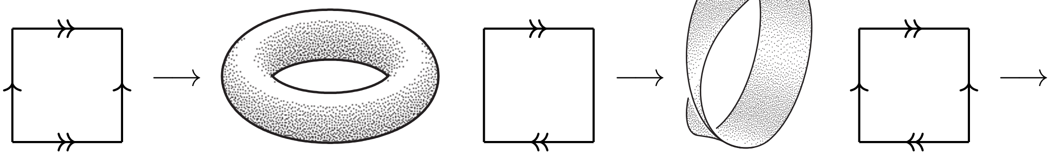
Задача 17. Приведите пример векторного поля на торе без особых точек, для которого ω-предельное множество одной из точек а) совпадает со всем тором; б) несчетно, но не совпадает со всем тором.

Поверхности

▷ **Определение 1.** *(Топологическим) многообразием* размерности n называется метризуемое пространство, локально гомеоморфное[10] $\mathbb{R}^n$ с не более чем счетным числом компонент связности. В этом листке многообразия будут интересовать нас с точностью до гомеоморфизма.

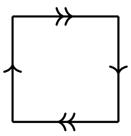
Двумерные многообразия называют *поверхностями*. Один из способов получать поверхности — клеить их (или скорее сшивать, как лоскутное одеяло) из многоугольников.





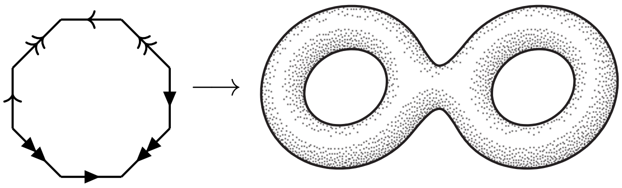
Задача 0. Следующие определения проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ эквивалентны:
- множетсво прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через ноль;
- сфера S^2 с отождествленными противоположными точками;
- диск D^2 с отождествленными противоположными точками границы.

Задача 1. а) Проективная плоскость получается попарной склейкой противоположных сторон квадрата с перекруткой (см. рис. справа).
б) Что останется, если вырезать из проективной плоскости маленький диск?



Задача 2. Отождествим в торе $S^1 \times S^1$ точки (x, y) и (y, x) ("симметрический квадрат окружности"). Что получится?

▷ **Определение 2.** *Связной суммой* поверхностей X и Y называется поверхность $X \# Y$, получающееся склейкой $X \setminus U_\varepsilon(x_0)$ и $Y \setminus U_\varepsilon(y_0)$ по граничной окружности. Взятие связной суммы с тором называется *приклеиванием ручки.*

Задача 3. а)  ("сфера с двумя ручками").

б) Как склеить сферу с g ручками из $4g$-угольника?

Задача 4*. Задайте сферу с ручками полиномиальным уравнением в $\mathbb{R}^3$. (Указание: сначала задайте полиномиальным уравнением в $\mathbb{R}^2$ цепочку из g окружностей.)

Задача 5. Что получится, если склеить две ленты Мёбиуса по граничной окружности?

Задача 6. $T^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

Задача 7*. а*) Любая поверхность может быть склеена из треугольников *(этим утверждением в оставшихся пунктах можно пользоваться без доказательства)*.
б) Любую поверхность[11] можно получить как $(T^2)^{\# n} \# (\mathbb{R}P^2)^{\# m}$.
в) Единственное соотношение при этом описано в предыдущей задаче.

[10]Т. е. такое, что у любой его точки есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$.
[11]Считаем, что $n = m = 0$ соответствует S^2.

Задача 8. Если векторное поле на сфере с g ручками имеет конечное число особых точек, то сумма их индексов равна $2-2g$ (следствие: при $g \neq 1$ любое векторное поле на сфере с g ручками имеет особую точку).

Задача 9. Выведите из предыдущей задачи, что для любой триангуляции сферы с g ручками $V-E+F=2-2g$ (следствие: сферы с разным количеством ручек негомеоморфны).

Задача 10*. а) Существует ли отображение $\mathbb{R}P^2$ в себя без неподвижных точек?
б) Существует ли отображение $\mathbb{R}P^3$ в себя без неподвижных точек?

Задача 11*. SO_3 как топологическое пространство гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$.

Задача 12*. Опишите симметрический квадрат сферы S^2.

Задача 13*. Сколькими способами можно склеить сферу из $2n$-угольника? (Способы, отличающиеся только поворотом, считаются различными.)

Элементы комплексного анализа

▷ **Определение 1.** Пусть f — отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Если в окрестности точки x_0 для некоторого линейного отображения $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ верно, что

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0),$$

то говорят, что функция f (вещественно) *дифференцируема* в точке x_0. Линейное отображение A называется *дифференциалом* функции f.

▷ **Определение 2.** Пусть f — отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Если в окрестности точки z_0 для некоторого комплексного числа a верно, что

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + o(z - z_0),$$

то говорят, что функция f *комплексно дифференцируема* в точке z_0 и пишут $f'(z_0) = a$.

Функция называется *голоморфной* на некотором открытом множестве, если она комплексно дифференцируема в каждой его точке; говорят, что функция *голоморфна в точке*, если она голоморфна в некоторой окрестности этой точки.

Задача 1. Найдите (комплексные) производные (если они есть) следующих функций
а) z; б) $\overline{z}$; в) $\operatorname{Re} z+2i\operatorname{Im} z$; г) z^n; д) $\dfrac{1}{1+z}$; е) $\dfrac{1}{\overline{z}}$; ж) $|z|$; з) $\dfrac{|z|^2}{\overline{z}}$; и) $\sqrt{z}$; к) $\operatorname{Arg} z$.

Задача 2. Какие из аффинных преобразований голоморфны?

Задача 3. Если функция имеет ненулевую комплексную производную в точке, то она сохраняет углы между кривыми в этой точке (“является конформным отображением”; ср., например, с сохранением углов при инверсии).

Задача 4. Вещественно-дифференцируемая функция $x+iy \mapsto u(x,y)+iv(x,y)$ комплексно дифференцируема тогда и только тогда, когда выполнены *условия Коши–Римана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

▷ **Определение 3.** Положим $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

Задача 5. а) Как операторы $\dfrac{\partial}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ действуют на z^n и $\overline{z}^n$?

б) Вещественно-дифференцирумая функция f комплексно дифференцируема, тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}f = 0$; в этом случае ее (комплексная) производная равна $\dfrac{\partial}{\partial z}f$.

в) Функция $x+iy \mapsto u(x,y)+iv(x,y)$, где u и v — (вещественные) многочлены, голоморфна тогда и только тогда, когда может быть представлена в виде $z \mapsto P(z)$ для некоторого (уже комплексного) многочлена P.

▷ Аналогично определению интеграла Римана вещественной функции по отрезку можно определить интеграл $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ комплексной функции по кривой как предел интегральных сумм вида $f(\xi_i)(z_i - z_{i-1})$.

Задача 6. Вычислите интеграл $\int\limits_{|z|=r} z^n\,dz$ (для всех целых n; обход совершается против часовой стрелки).

Задача 7. а) Если $f(z) = az+b$, то интеграл $\int f(z)\,dz$ по границе любого треугольника равен нулю.
б*) Пусть функция f голоморфна внутри области Ω, ограниченной гладкой кривой $\partial\Omega$, и непрерывна на $\Omega \cup \partial\Omega$. Тогда

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0.$$

(Последним утверждением можно далее пользоваться без доказательства.)
в) Интеграл голоморфной функции не меняется при деформации контура.

▷ **Определение 4.** Пусть функция f голоморфна в *проколотой* окрестности точки z_0. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z_0)} f(z)\,dz =: \operatorname{res}_{z_0} f(z)\,dz$$

($\partial U(z_0)$ — маленькая кривая, обходящая один раз вокруг точки z_0; в силу предыдущей задачи от выбора конкретной кривой интеграл не зависит) называется *вычетом* в точке z_0.

Задача 8. а) Найдите вычет в нуле функции $P(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n$.
б*) Для аналитических функций определение вычета выше согласовано с определением (формального) вычета из листка «Формальные ряды II».

Задача 9. а) Индекс особой точки векторного поля, задаваемого голоморфной функцией f, равен вычету $\operatorname{dlog} f := \frac{f'}{f}\,dz$ в этой точке.
б*) Как обобщить последнее утверждение на произвольные (гладкие) векторные поля?

Задача 10. Если функция f голоморфна в точке z_0, то

$$f(z_0) = \operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

(“интеграл Коши”).

Задача 11. а) Если две голоморфные функции равны на границе диска, то они равны и внутри диска.
б) Любую ли бесконечно гладкую функцию на границе диска можно продолжить до голоморфной функции на диске?

Задача 12. Модуль голоморфной на открытом множестве функции не имеет локальных максимумов на этом множестве (“принцип максимума”).

Задача 13. Найдите все двоякопериодические (имеющие два линейно независимых над $\mathbb{R}$ периода) голоморфные на всей плоскости функции.

Задача 14. Выведите из принципа максимума основную теорему алгебры.

Задача 15. а) Если функция f голоморфна в точке z_0, то

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

б) Любая голоморфная функция является бесконечно комплексно-дифференцирумой.

Задача 16. Голоморфная на $\mathbb{C}$ ограниченная функция постоянна (“теорема Лиувилля”).

Задача 17. Голоморфная в точке функция аналитична в некоторой окрестности этой точки. Указание. Докажите, что $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \ldots + (z - z_0)^n \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \cdots$.

Задача 18. Существует не более одного способа продолжить данную фукнцию на вещественной прямой до голоморфной функции на $\mathbb{C}$ (“аналитическое продолжение”).

Задача 19. Аналитическое продолжение экспоненты дается формулой

$$\exp(\rho + i\varphi) = e^{\rho}(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Задача 20. Существует ли голоморфная в нуле функция f, такая что $f(1/n) = 2^{-n}$?

Плоские алгебраические кривые

Задача 0. Изобразите на плоскости множество точек
а) $x^2 - y^2 = c$; б) $2x^2 + y^2 + y = c$; в) $y^2 = x^3 + px + q$.

▷ **Определение 1.** Кривая на плоскости (аффинной или проективной), задаваемая уравнением[12] степени d называется *плоской алгебраической кривой* степени d. Кривая степени 2 называется *квадрикой*, степени 3 — *кубикой.*

(Отметим, что на эти уравнения не накладывается никаких условий. В частности, мы считаем пару прямых квадрикой, а тройку прямых кубикой.)

Задача 1. По скольким точкам могут пересекаться кривая степени n и прямая на
а) вещественной аффинной плоскости; б) комплексной аффинной плоскости;
в) комплексной проективной плоскости?

Задача 2*. Как на комплексной проективной плоскости пересекаются окружность и бесконечно удаленная прямая?

Задача 3. В кольце а) $\mathbb{Z}[x]$; б) $K[x, y]$ выполнена основная теорема арифметики.
Указание. 1. В кольце многочленов над полем а) $\mathbb{Q}$; б) $K(x)$ она уж заведомо выполнена.
2. Произведение *примитивных* (с НОДом коэффициентов, равным 1) многочленов примитивно.

Задача 4. Если алгебраическая кривая содержит прямую, то ее уравнение делится на уравнение этой прямой.

Задача 5. Если O — рациональная точка невырожденной квадрики с рациональными коэффициентами[13], то ее точка P рациональна тогда и только тогда, когда прямая OP имеет рациональный угол наклона.

Задача 6. Решите в целых числах уравнение а) $x^2 + y^2 = z^2$; б) $x^2 + 2y^2 = 3z^2$.

Задача 7. Если невырожденная квадрика над полем из q элементов содержит точки, то она содержит ровно $q + 1$ точку проективной плоскости.

Задача 8. Если многочлены P и Q взаимно просты, то кривые $P = 0$ и $Q = 0$ имеют конечное число общих точек.

Задача 9. Можно ли одну ветвь гиперболы задать полиномиальным уравнением?

Задача 10. Может ли плоская кривая совпадать со всей плоскостью? не иметь точек?

▷ **Теорема Безу.** Кривые степеней d_1 и d_2, задаваемые взаимно простыми многочленами, имеют не более $d_1 d_2$ общих точек.

Задача 11. а) Если две квадрики пересекаются по двум точкам прямой, то существует их линейная комбинация, содержащая эту прямую.
б) Совокупность (уравнений) квадрик, проходящих через данные 4 точки, образует векторное пространство.
в) Если точки находятся в общем положении, размерность этого пространства равна 2.
Указание. Какими квадриками оно порождено?

[12] В проективном случае это уравнение должно быть однородным.
[13] Выяснить, есть ли на данной квадрике рациональные точки, позволяет *теорема Лежандра* (узнать о которой можно из одноименного листка).

Задача 12. а) Через 5 точек общего положения проходит ровно одна квадрика.
б) Теорема Безу выполняется для пары квадрик.

Задача 13. Чему равна размерность пространства всех (уравнений) кубик? всех кубик, проходящих через данную точку?

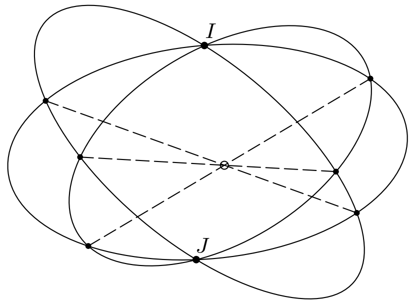
▷ **Теорема Шаля.** Если две кубики в $\mathbb{C}P^2$ пересекаются по 9 точкам, а третья кубика проходит через 8 из этих точек, то она проходит и через девятую.

В частности, если на плоскости проведено 3 черные и 3 красные прямые общего положения, то кубика, проходящая через 8 из 9 точек пересечения разноцветных прямых, проходит и через девятую.

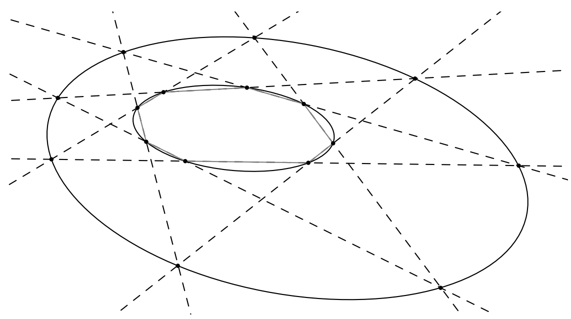
Задача 14. Выведите из (частного случая) теоремы Шаля а) теорему Паппа; б) теорему Паскаля.

Задача 15. а) Если две кубики пересекаются по 3 точкам прямой, то существует их линейная комбинация, содержащая эту прямую.
б) Если на плоскости проведено 3 черные и 3 красные прямые общего положения, то пространство уравнений всех кубик, проходящих через (данные) 8 из точек пересечения разноцветных прямых, двумерно (в частности, в этом случае верна теорема Шаля).

Задача 16. Пусть три коники все проходят через пару точек. Тогда любые две из них пересекаются еще по двум точкам — проведем через них по прямой. Докажите, что эти 3 прямые пересекаются в одной точке (“теорема о трех кониках”).



Задача 17. Будем называть стороны восьмиугольника *почти противоположными*, если с одной стороны между ними лежит 1 вершина, а с другой — 3 вершины. Докажите, что точки попарных пересечений почти противоположных сторон вписанного в квадрику восьмиугольника сами лежат на квадрике (“мистическая октограмма”).



Линейная алгебра III: Двойственность и скалярное произведение

Часть 1. Двойственность

▷ **Определение 1.** Пусть V — векторное пространство над полем k. *Двойственным* к нему пространством называется пространство $V^* := \mathrm{Hom}(V, k)$. Элементы двойственного пространства называются *функционалами* на V.

Задача 1*. Какой может быть размерность ядра функционала на n-мерном пространстве?

Задача 2*. Опишите пространство, двойственное пространству $l_0(\mathbb{R})$ — финитных последовательностей вещественных чисел.

Задача 3*. Пусть $U \subset V$ — линейное подпространство. Постройте каноническое вложение $(V/U)^*$ в V^* и докажите, что фактор изоморфен U^*.

▷ **Определение 2.** Пусть A — линейное отображение из V в W. *Двойственным отображением* называется отображение A^* из W^* в V^*, такое что $[A^*f](v) = f(Av)$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "A^*f"'] & W \arrow[d, "f"] \\ & k \end{tikzcd}$$

Задача 4*. Пусть в пространствах V и W выбраны базисы. Как связаны матрицы отображений A и A^*?

Задача 5*. $(AB)^* = B^*A^*$.

Задача 6*. а) Отображение $(x, f) \mapsto f(x) \colon V \times V^* \to k$, линейно по каждому аргументу.
б) Найдите в предыдущем пункте каноническое отображение $V \to V^{**}$. Докажите, что оно всегда инъективно, а в конечномерном случае и сюръективно.
в) При отождествлении пространства с дважды двойственным оператор A^{**} отождествляется с A.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ V^{**} \arrow[r, "A^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Часть 2. Скалярное произведение

▷ **Определение 3.** Пусть V — векторное пространство над полем k. *Скалярным произведением* называется билинейное (линейное по каждому из аргументов) симметричное отображение $(-,-) \colon V \times V \to k$.

Примеры:
• $V = k^n$, $(u, v) = \sum_i u_i v_i$; • $V = C[0;1]$, $(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$;
• V — совокупность случайных величин на данном конечном вероятностном пространстве, $(\xi, \eta) = \mathrm{Cov}(\xi, \eta)$.

Задача 7. Положим $\|v\| = (v, v)$. а) $\|u + v\| = \|u\| + \|v\| + 2(u, v)$.
б) (Если характеристика основного поля не равна двум, то) скалярное произведение может быть восстановлено по функции $v \mapsto (v, v)$.

▷ **Определение 4.** *Евклидовым пространством* называется вещественное пространство с таким скалярным произведением, что 1) $\forall v\ (v, v) \geqslant 0$; 2) $(v, v) = 0 \implies v = 0$.

Длиной вектора v евклидова пространства называется число $|v| := \sqrt{(v, v)}$. Вектора, скалярное произведение которых равно нулю, называются *ортогональными*.

Задача 8. Какие из примеров, приведенных после первого определения, являются примерами евклидовых пространств?

Задача 9. а) $2|(u,v)| \leqslant |u|^2 + |v|^2$; б) найдите $\inf\bigl\{|\lambda u|^2 + |\lambda^{-1}v|^2 \bigm| \lambda \in \mathbb{R}^\times\bigr\}$;
в) $|(u,v)| \leqslant |u| \cdot |v|$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда вектора u и v пропорциональны (“неравенство Коши”)[14].

Задача 10. а) $\left(\sum x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)$; б) $\left(\int f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int f^2(t)\,dt \cdot \int g^2(t)\,dt$;
в) $\operatorname{Cov}(\xi,\eta)^2 \leqslant V(\xi)\cdot V(\eta)$.

Задача 11. а) Для любого ненулевого вектора u множество $\{v \mid (u,v)=0\}$ — гиперплоскость.
б) Для любого подпространства U евклидова пространства V его *ортогональное дополнение* $U^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in U \ (u,v)=0\}$ является векторным пространством размерности $\dim V - \dim U$.

Задача 12. У любого конечномерного евклидова пространства можно выбрать базис, в котором скалярное произведение примет стандартный вид.

Задача 13. Если у двух векторов конечномерного евклидова пространства совпадают скалярные произведения со всеми векторами, то они равны.

▷ **Определение 5.** Скалярное произведение называется *невырожденным*, если отображение $v \mapsto (u \mapsto (u,v))\colon V \to V^*$ является изоморфизмом.

Задача 14*. Скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве невырождено.

Задача 15*. Утверждение задачи 11 выполнено для любого невырожденного скалярного произведения.

Задача 16*. Сколько существует различных (с точностью до изометрии) а) трехмерных; б) n-мерных векторных пространств с невырожденным скалярным произведением?

Часть 3. Векторное произведение

▷ **Определение 6.** Пусть V — трехмерное евклидово пространство с ориентированным объемом vol. *Векторным произведением* называется отображение $[-,-]\colon V\times V \to V$, такое что $(u,[v,w]) = \operatorname{vol}(u,v,w)$ (“смешанное произведение трех векторов равно объему натянутого на них параллелепипеда”).

Задача 17. Векторное произведение векторов v и w ортогонально обоим этим векторам и имеет длину $|v|\cdot|w|\cdot|\sin\angle(v,w)|$.

Задача 18. Векторное произведение билинейно и кососимметрично.

Задача 19. $[v,w] = \det\begin{pmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ (определитель понимается формально, как сумма 6 произведений).

Задача 20. а) Квадрат площади произвольного параллелограмма в пространстве равен сумме квадратов площадей его проекций на три координатные плоскости.
б*) Сформулируйте и докажите многомерное обобщение.

[14]Неравенство Коши позволяет определить угол между векторами евклидова пространства, так что $(u,v) = |u|\cdot|v|\cdot\cos\angle(u,v)$.

Вероятность III: Случайное блуждание и центральная предельная теорема

▷ **Определение 1.** *Случайное блуждание* на (целых точках) прямой — это последовательность случайных величин (ξ_N) ("положение после хода N"), такая что ξ_N — сумма N независимых случайных величин, принимающих с равными вероятностями значения ± 1.

(Другими словами, мы ходим по целым точкам прямой, каждую секунду подкидывая монету и перемещаясь на ± 1 в зависимости от того, выпадет орел или решка.)

Задача 0. В какой точке вероятность обнаружить частицу после N шагов случайного блуждания на прямой максимальна?

▷ Как мы знаем из предыдущего листка по вероятности, дисперсия величины ξ_N пропорциональна N, то есть ее *среднеквадратичное отклонение* имеет порядок $\sqrt{N}$.

Задача 1. Если $R_N \gg \sqrt{N}$, то $P\{|\xi_N| < R_N\} = 1 - o(1)$ (для $R_N = \varepsilon N$ это закон больших чисел Бернулли).

Задача 2. Оцените вероятность того, что при 100 подкидываний монеты орел выпадет более 60 раз, с абсолютной погрешностью $\pm 0{,}01$. (Для справки: $\binom{100}{61} \cdot 2^{-100} \approx 0{,}0071$.)

Пусть $p_k(2N) = P\{\xi_{2N} = 2k\}$.

Задача 3. а) $p_k = 2^{-2N}\binom{2N}{N+k}$; б) $p_k = p_0\bigl(1 - \frac{1}{N+1}\bigr)\bigl(1 - \frac{3}{N+2}\bigr)\dots\bigl(1 - \frac{2k-1}{N+k}\bigr)$.

Задача 4. а) $p_k \approx p_0 \exp\bigl(-\frac{k^2}{N}\bigr)$ (указание: $\ln(1+x) \approx x$); б) $p_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} + o(N^{-1/2})$.

Задача 5. Если $R_N \ll \sqrt{N}$, то $P\{|\xi_N| < R_N\} = o(1)$.

Задача 6. а) Матожидание числа возвращений частицы в начало координат бесконечно. б) При случайном блуждании на прямой частица почти наверное хоть раз возвращается в начало координат.

Задача 7*. После каждого подкидывания монетки первый игрок платит второму рубль, если выпал орел, и наоборот. Игра заканчивается, когда у одного из игроков заканчиваются деньги. У первого игрока n рублей, у второго — N рублей. Какова вероятность того, что первый игрок разорится?

▷ Как показывают задачи 1 и 5, при случайном блуждании частица почти наверное уходит от нуля на расстояние порядка $\sqrt{N}$. Естественный следующий вопрос — об аналогичных вероятностях для $R \sim \sqrt{N}$.

Задача 8. $P(a\sqrt{n} \leqslant \xi_n \leqslant b\sqrt{n}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_a^b \exp\left(-\tfrac{x^2}{2}\right) dx + o(1)$;
в частности, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{x^2}{2}\right) dx = \sqrt{2\pi}$.

▷ **Определение 2 (неформальное).** Будем говорить, что вещественнозначная случайная величина F имеет *плотность распределения* $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, если

$$P\{a \leqslant F \leqslant b\} = \int_a^b p(x)\, dx.$$

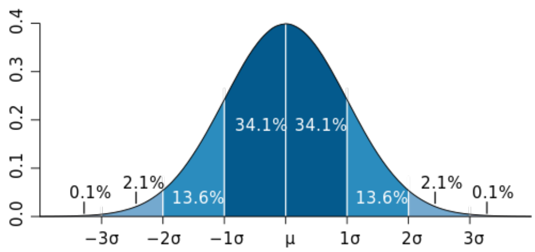
Распределение с плотностью $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ называется *нормальным распределением Гаусса* с матожиданием μ и дисперсией σ^2 и обозначается $N(\mu, \sigma^2)$.

▷ Задача 5 показывает, что при случайном блуждании на прямой для величин $\eta_n = \xi_n/\sqrt{n}$ имеет место *слабая сходимость*[15] к величине F с плотностью $N(0, 1)$.

Это частный случай *центральной предельной теоремы* (состоящей, говоря очень грубо, в том, что нормальное распределение возникает при подобном усреднении *любых* случайных величин).

Задача 9. Пусть (ξ_N) — случайное блуждание на прямой, при котором на каждом шаге вероятность пойти вправо равна p.
а) Найдите матожидание μ_N и дисперсию σ_N^2 величины ξ_N.
б) Последовательность случайных величин $\eta_N = (\xi_N - \mu_N)/\sqrt{N}$ слабо сходится к величине F с плотностью $N(0, \sigma^2)$.

Задача 10. При достаточно больших N число орлов при N подкидываниях несимметричной монеты отклоняется от матожидания не более чем на $3\sigma_N$ с вероятностью, большей[16] 99,7% ("правило трех сигм"). С другой стороны, вероятность отклонения хотя бы на σ_N больше 30%.



Задача 11. а) Случайная величина F имеет плотность распределения p. Какую плотность распределения имеет величина $F + c$?
б) *Независимые* случайные величины F_1 и F_2 имеют плотности распределения p_1 и p_2. Какую плотность имеет случайная величина $F_1 + F_2$?

Задача 12. Сумма двух независимых нормально распределенных случайных величин — нормально распределенная случайная величина (выведите из предыдущей задачи и объясните, почему это было очевидно и без нее).

[15] Т. е. для любого отрезка $P(\eta_n \in I) \to P(F \in I), \quad n \to \infty$.
[16] Для оценки интеграла не возбраняется воспользоваться компьютером.

Вычеты и суммы

▷ **Определение 1.** Пусть f — функция, голоморфная в *проколотой* окрестности точки z_0. *Вычетом* формы $f(z)\,dz$ в точке z_0 называется интеграл

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)\,dz := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U(z_0)} f(z)\,dz.$$

Задача 0. Если $f(z) = \frac{a}{z-z_0} + g(z)$, а функция g голомофрна в точке z_0, то $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z)\,dz = a$.

Задача 1. Найдите вычеты формы а) $\dfrac{dz}{z^2+1}$; б) $\operatorname{tg} z\,dz$; в) $z^n \sin z\,dz$ во всех точках.

Задача 2. Вычет формы не зависит[17] от выбора локальной координаты:

$$\operatorname*{res}_{z=Z(w_0)} f(z)\,dz = \operatorname*{res}_{w=w_0} f(Z(w))Z'(w)\,dw$$

для любой функции $Z(w)$, голоморфной в точке w_0.

Задача 3. а) $\operatorname{res}\left\{(1-z)^{-(n+1)}\dfrac{dz}{z^{k+1}}\right\} = \operatorname{res}\left\{(1+w)^{n+k}\dfrac{dw}{w^{k+1}}\right\}$; б) $\operatorname{res}\left\{(1-4z)^{-1/2}\dfrac{dz}{z^{k+1}}\right\}$.

Задача 4. Найдите вычет на бесконечности формы $z^n\,dz$.

Задача 5. Сумма вычетов голоморфной формы по всем точкам *сферы Римана* $\mathbb{C}P^1 := \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ равна нулю.

Задача 6. Найдите вычеты формы $z^2 \operatorname{ctg} z\,dz$ во всех точках сферы Римана.

▷ Напомним, что (для натуральных k) по определению $\zeta(k) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{n^k}$.

Задача 7. $\zeta(2k) = -\frac{1}{2}[z^{2k-1}]\big\{\operatorname{ctg}(\pi z)\big\} = (-1)^{k-1}\dfrac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!}B_{2k}$ (второе равенство можно считать определением чисел Бернулли).

Задача 8. Вычислите сумму $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{n^2+1}$.

[17] Именно поэтому мы определяем вычет для форм, а не для функций.

▷ Напомним[18], что $\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} t^s e^{-t} \frac{dt}{t}$ (при $s > 1$).

Задача 9. а) $\int\limits_0^{+\infty} t^s e^{-nt} \frac{dt}{t} = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$; б) $\Gamma(s)\zeta(s) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^s}{e^t - 1} \frac{dt}{t}$ (при $s > 1$).

Задача 10. а) (При $\operatorname{Re} s > 1$) $\int\limits_C \frac{z^s}{e^z - 1} \frac{dz}{z} = (e^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s)\zeta(s)$, где контур C обходит вокруг луча $[0; +\infty)$.

б) $\frac{\Gamma(1-s)e^{-\pi i s}}{2\pi i} \int\limits_C \frac{z^s}{e^z - 1} \frac{dz}{z}$ — аналитическое продолжение ζ-функции на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{>0}$;

Задача 11. а) $\zeta(-k) = -k! \cdot [z^{k+1}] \left\{ \frac{z}{e^z - 1} \right\} = -\frac{B_{k+1}}{k+1}$.

б*) Почему суммирование расходящихся рядов по Эйлеру (см. листок про формулу Эйлера–Маклорена и числа Бернулли) дает тот же ответ?

Задача 12. а) $\widehat{\zeta}(2k) = \widehat{\zeta}(1-2k)$, где $\widehat{\zeta}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$.
б*) $\widehat{\zeta}(s) = \widehat{\zeta}(1-s)$.

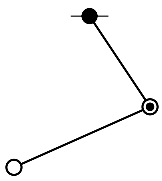
[18] Определение гамма-функции, пригодное для произвольных комплексных s, можно узнать из одноименного листка.

Конфигурационные пространства шарнирных механизмов

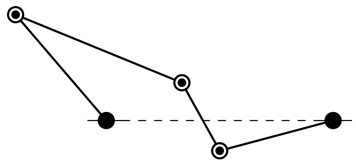
▷ **Определение 1.** Конфигурационное пространство механической системы — это совокупность всех ее возможных положений (рассматриваемая с естественной топологией).

Например, конфигурационное пространство (плоского) маятника (штыря, один конец которого закреплен на шарнире) — окружность.

Задача 1. Конфигурационное пространство двухколенного маятника — тор.



▷ **Определение 2.** Конфигурационное пространство k-звенных ломаных, концы которых закреплены на расстоянии l_0, а звенья имеют длины $l_1, \ldots, l_k$ ("шарнирных многоугольников со сторонами l_i"), будем обозначать $\mathrm{Conf}(l_0; l_1, \ldots, l_k)$.



Задача 2. $\mathrm{Conf}(3-\varepsilon; 1, 1, 1)$ — окружность.

Задача 3. Найдите а) $\mathrm{Conf}(1; 1, 1, 1)$; б*) $\mathrm{Conf}(l_0; l_1, l_2, l_3)$.

Задача 4. $\mathrm{Conf}(4-\varepsilon; 1, 1, 1, 1)$ — сфера.

Задача 5. Найдите а) $\mathrm{Conf}(3; 3, 1, 1, 3)$; б) $\mathrm{Conf}(1; 1, 1, 1, 1)$.

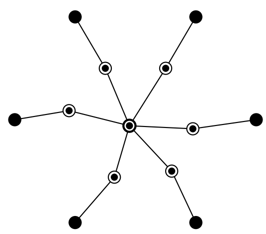
Задача 6. Перестановка длин $l_0, l_1, \ldots, l_k$ а) сохраняющая первый элемент; б) произвольная не меняет конфигурационное пространство $\mathrm{Conf}(l_0; l_1, \ldots, l_k)$.

▷ **Определение 3.** Будем говорить, что $\mathrm{Conf}(l_0, l_1 \ldots, l_k)$ — шарнирный многоугольник *общего положения*, если $\pm l_0 \pm \ldots \pm l_k \neq 0$ (ни для какой расстановки знаков).

Задача 7*. В ситуации общего положения $\mathrm{Conf}(l_0; l_1, l_2, l_3, l_4)$ — замкнутая[19] поверхность.

Задача 8. Какие поверхности реализуются как конфигурационные пространства шарнирных многоугольников общего положения?

Задача 9. Найдите конфигурационное пространство "паука", "лапы" которого закреплены в вершинах правильного n-угольника радиуса $2-\varepsilon$, а все звенья имеют длину 1.



Задача 10.** Все замкнутые ориентируемые 3-мерные многообразия реализуются как конфигурационные пространства шарнирных механизмов[20] с 3 степенями свободы ("теорема Тёрстона").

[19] Т. е. компактная, без края.

[20] Произвольного вида, не обязательно цепочек.

Арифметика VI: Суммы Гаусса и Якоби

Задача 1. а) Чему равна сумма k-х степеней всех корней n-й степени из единицы в $\mathbb{C}$? б) Чему равна сумма k-х степеней всех элементов $\mathbb{F}_p$? в*) ...$\mathbb{F}_q$?

▷ Все переменные далее лежат в $\mathbb{F}_p$. Через $\#\{F(x)=0\}$ обозначается число решений уравнения $F(x)=0$.

Задача 2. Пусть F — однородный многочлен степени d от n переменных.
а) $\#\{F=0\}=\sum_{x\in\mathbb{F}_p^n}(1-F^{p-1}) \pmod p$.
б) Если $d<n$, уравнение $F(x)=0$ имеет ненулевое решение ("т-ма Шевалле–Варнинга").

Задача 3. Чему равна сумма а) $\displaystyle\sum_t\left(\frac{t}{p}\right)$; б) $\displaystyle\sum_t\left(\frac{t}{p}\right)\left(\frac{t+c}{p}\right)$; в) $\displaystyle\sum_{s+t=1}\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{t}{p}\right)$?

Задача 4. а) Сколько решений имеет уравнение $x^2+y^2=1$?
б) Сколько точек может быть на квадрике в $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p)$?

▷ **Определение 1.** *Мультипликативным характером* по модулю n называется гомоморфизм $\chi\colon(\mathbb{Z}/n)^\times\to\mathbb{C}^\times$; будем также рассматривать χ как отображение $\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, нулевое на необратимых остатках. Пример: квадратичный характер $\left(\frac{-}{p}\right)$.

Задача 5. а) Нетривиальный характер по модулю p, такой что $\chi^d=1$, существует тогда и только тогда, когда $d|p-1$. В этом случае он может быть задан формулой $\left(\frac{-}{p}\right)_d\colon\lambda^n\to\exp(2\pi in/d)$, где λ — некоторая образующая $\mathbb{F}_p^\times$. б) $\#\left\{x^d=a\right\}=\displaystyle\sum_{\chi^d=1}\chi(a)$.

Задача 6. $\#\left\{x^3+y^3=1\right\}=p-2+2\operatorname{Re}\displaystyle\sum_{x+y=1}\left(\frac{x}{p}\right)_3\left(\frac{y}{p}\right)_3$.

▷ **Определение 2.** Комплексное число

$$J_a(\chi,\chi')=\sum_{x+y=a}\chi(x)\chi'(y).$$

называется *суммой Якоби* (соответствующей данной паре характеров). Вместо $J_1(\chi,\chi')$ будем писать просто $J(\chi,\chi')$.

▷ **Определение 3.** Напомним, что *суммой Гаусса*, соответствующей характеру χ по модулю p, называется комплексное число

$$g_a(\chi)=\sum\chi(t)\zeta_p^{at},$$

где ζ_p — примитивный корень степени p из 1. Вместо $g_1(\chi)$ будем писать просто $g(\chi)$.

Задача 7. Пусть χ — нетривиальный характер.
а) $g_a(\chi)=\chi(a^{-1})g(\chi)$; б) $\sum_a g_a(\chi)\overline{g_a(\chi)}=(p-1)p$; в) $|g(\chi)|=\sqrt{p}$.

Задача 8. а) $J(\chi,\chi')=\dfrac{g(\chi)g(\chi')}{g(\chi\chi')}$ (если произведение $\chi\chi'$ нетривиально).
б) $|J(\chi,\chi')|=\sqrt{p}$, $J(1,1)=p$, $J(1,\chi)=0$, $J(\chi,\chi^{-1})=-\chi(-1)$ (считая, что $\chi,\chi',\chi\chi'\neq 1$).

Задача 9. а) $\#\{x^3+y^3=1\}\approx p-2\pm2\sqrt{p}$;
б) $\#\{x^n+y^n=1\}\approx p+1-\#\{x^n+1=0\}\pm(n-1)(n-2)\sqrt{p}$.

Задача 10. а) Если $p=4k+1$, то p представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел ("рождественская теорема Ферма"). Указание. Если $a+bi=J(\chi,\chi^2)$, то $p=a^2+b^2$.
б) $\#\{y^2=x^3-x\}=p+2a$. в) $a=\dfrac12\dbinom{2k}{k} \pmod p$ ("явная формула Гаусса").

Поверхности II: Эйлерова характеристика и накрытия

▷ **Определение 1.** *Эйлерова характеристика* компактной триангулированной поверхности S — это целое число $\chi(S) := V - E + F$, где V, E, F — количества, соответственно, вершин, ребер, треугольников триангуляции[21].

Это число не зависит от выбора триангуляции и для замкнутой поверхности совпадает с суммой индексов особых точек векторного поля (см. листок «Поверхности»).

Можно распространить это определение и на многообразия (и не только) произвольной размерности.

Задача 1. $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$ для компактных A и B.

Задача 2. Что происходит с эйлеровой характеристикой при связной сумме?

▷ **Определение 2.** Непрерывное отображение $\widetilde{X} \to X$ называется k-листным *накрытием*, если у любой точки пространства X есть окрестность U, прообраз которой гомеоморфен[22] несвязному объединению k копий U.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[d] & U^{\sqcup k} \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ X & U \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

Любое пространство можно накрыть k его копиями ("тривиальное накрытие"). Пример нетривиального (бесконечнолистного) накрытия: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$.

Задача 3. $z \mapsto z^k \colon S^1 \to S^1$ (где $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) — k-листное накрытие.

Задача 4. Приведите пример нетривиального накрытия восьмерки.

Задача 5. Если пространство X накрыто k-листно пространством Y, то $\chi(Y) = k \cdot \chi(X)$.

Задача 6. У сферы не бывает нетривиальных а$_1$) компактных; а$_2^*$) никаких накрытий. Вторым пунктом можно пользоваться далее без доказательства.
б*) $\mathbb{R}P^2$ может быть нетривиально накрыто только сферой S^2 (или несвязным объединением нескольких сфер).

Задача 7. Существует додекаэдр (правильный многогранник с пятиугольными гранями).
Указание. Если правильными пятиугольниками не получается замостить сферу, то получится замостить какое-то ее накрытие.

▷ **Определение 3.** Говорят, что связная замкнутая поверхность имеет *род* g, если она представляет собой сферу с g ручками.

Задача 8. При каких g и $\tilde{g}$ поверхность рода g можно накрыть поверхностью рода $\tilde{g}$?

Задача 9. а) Проекция «$(x, y) \mapsto x$» кривой $y^k = P(x)$ на $\mathbb{C}P^1$ является k-листным *разветвленным накрытием* (т. е. k-листным накрытием вне конечного числа точек).
б) Если многочлен P не имеет кратных корней, то комплексная кривая $y^k = P(x)$ в $\mathbb{C}P^2$ является замкнутой поверхностью; в) ...причем ориентируемой.

Задача 10. Найдите род следующих комплексных кривых:
а) квадрики;
б) *эллиптической кривой* $y^2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$;
в) *гиперэллиптической кривой* $y^2 = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k)$;
г) *кривой Ферма* $X^n + Y^n = Z^n$.
Указание. Число точек на бесконечности надо считать равным числу компонент связности "над проколотой окрестностью бесконечности".

[21] Кроме триангуляций можно рассматривать и разбиения на произвольные многоугольники.
[22] Причем проекция совпадает со стандартной.

Дополнительная часть: Подъем отображений

Задача 11. а) Если $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ — накрытие, то каждый путь $\gamma\colon [0;1] \to X$ может быть поднят до пути $\tilde{\gamma}\colon [0;1] \to \widetilde{X}$ (такого, что $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$).

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[d, dashed] & \widetilde{Y} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

б) Каждое отображение $f\colon S^1 \to S^1$ может быть поднято до отображения $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
в*) Если $\widetilde{Y} \to Y$ — накрытие, то каждое отображение $f\colon X \to Y$ может быть поднято до отображения $\tilde{f}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, область определения которого — какое-то (возможно, зависящее от f) накрытие $\widetilde{X} \to X$.

Задача [34д]10а. Отображение $\mathbb{R}P^2$ в себя имеет неподвижную точку.

▷ **Определение 4.** *Степенью* отображения $\gamma\colon S^1 \to S^1$ называется целое число $\tilde{\gamma}(1)-\tilde{\gamma}(0)$ для подъема отображения γ на накрытие $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$.

Задача 12. а) Степень отображения не меняется при непрерывных деформациях: если $t \mapsto \gamma_t\colon [0;1] \to \mathrm{Map}(S^1, S^1)$ — непрерывное отображение, то $\deg\gamma_0 = \deg\gamma_1$.
б*) Степень — единственный такой инвариант (т. е. если два отображения окружности в себя имеют равные степени, одно можно продеформировать в другое).

Монодромия

▷ **Определение 1.** Пусть P — неприводимый комплексный многочлен от двух переменных. Будем рассматривать $P(z,a) = 0$ как уравнение на z, зависящее от параметра a. Если параметр проходит по петле γ, не содержащей точек ветвления (т. е. точек, в которых уравнение имеет кратные корни), то корни уравнения как-то переставляются. Эта перестановка называется *преобразованием монодромии* уравнения вдоль петли γ.

Формально можно говорить о разветвленном накрытии пространства параметров комплексной кривой $P(z,a) = 0$ и подъемах петли γ (см. конец листка «Эйлерова характеристика и накрытия»), индуцирующих отображение $\tilde{\gamma}(0) \mapsto \tilde{\gamma}(1)$ слоя над началом пути.

Задача 1. а) Преобразование монодромии биективно.
б) Совокупность преобразований монодромии, соответствующих путям с началом и концом в данной точке, образует группу ("*группа монодромии* уравнения").
в) Группа монодромии не зависит от выбора точки.
г) Преобразование монодромии при обходе по петле является произведением преобразований монодромии, соответствующих особым точкам внутри пути.

Задача 2. Найдите группу монодромии уравнения а) $\exp z = a$; б) $z^n = a$; в) $z^3 - z = a$.

▷ Будем также говорить о монодромии многозначных функций, не выписывая явно соответствующее уравнение (например, вместо монодромии уравнения $z^n = a$ — о монодромии многозначной функции $z \mapsto \sqrt[n]{z}$).

С точки зрения комплексных кривых и разветвленных накрытий можно говорить о *римановой поверхности данной многозначной функции* — (разветвленном) накрытии, в котором над каждой точкой $\mathbb{C}$ висит множество значений многозначной функции.

Задача 3. Найдите точки ветвления и группу монодромии многозначной функции
а) $\sqrt{z} + \sqrt{1-z}$; б) $\sqrt[3]{1+\sqrt{z}}$.

▷ **Определение 2.** Если у группы G есть нормальная подгруппа H_1, фактор по которой изоморфен группе H_2, то говорят, что группа G является *расширением* группы H_2 при помощи группы H_1 и пишут

$$1 \to H_1 \to G \to H_2 \to 1.$$

Тривиальный пример:

$$1 \to H_1 \to H_1 \times H_2 \to H_2 \to 1;$$

еще примеры:

$$0 \to \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4 \to \mathbb{Z}/2 \to 0;$$

$$1 \to A_n \to S_n \xrightarrow{\text{sgn}} \{\pm 1\} \to 1; \quad 1 \to SO(n) \to O(n) \xrightarrow{\det} \{\pm 1\} \to 1.$$

Задача 4. Когда расширение $0 \to \mathbb{Z}/m \to \mathbb{Z}/nm \to \mathbb{Z}/n \to 0$ тривиально?

Задача 5. Группа монодромии композиции двух многозначных функций является расширением группы монодромии одной из них при помощи другой.

▷ **Определение 3.** Разрешимая группа — это группа, которая получается (из тривиальной) последовательностью расширений при помощи циклических групп.

Задача 6. а) Коммутативная группа разрешима.
б) Группы S_3 и S_4 разрешимы. в) Группа S_5 не разрешима.

Задача 7. Если уравнение $f(z) = a$ разрешимо в радикалах, то группа монодромии этого уравнения разрешима.

Задача 8. Группа монодромии уравнения $z^5 - z = a$ не разрешима (и как следствие, корень этого уравнения не может быть выражен через a в радикалах).