Числа Бернулли и змеи

▷ Определение чисел Бернулли состоит в том, что $\sum B_m \dfrac{t^m}{m!} = \dfrac{t}{e^t - 1} = 1 - \dfrac{t}{2} + \dfrac{t^2}{12} - \cdots$.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B_m	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$

1. Докажите, что $B_{2l+1} = 0$ при $l > 0$.

2. Выразите коэффициенты разложения в ряд функции а) $t \operatorname{ctg} t$; б) $\operatorname{tg} t$ через числа Бернулли (для тех, кто совсем забыл школьную тригонометрию: $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg}(2x)$).

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$$

3. а) Докажите, что существует такая последовательность T_n многочленов *с целыми неотрицательными коэффициентами*, что $(\operatorname{tg} x)^{(n)} = T_n(\operatorname{tg} x)$.

б*) Найдите комбинаторную интерпретацию коэффициентов многочленов T_n.

4. а) Вычислите экспоненциальную производящую функцию $\sum_n T_n(z)t^n/n!$. Что получается при подстановке $z = 0$?

б) Докажите, что $(-1)^{l-1}\dfrac{2^{2l}(2^{2l}-1)}{2l}B_{2l}$ — целое неотрицательное число.

▷ Следующая задача объясняет комбинаторный смысл этой последовательности целых чисел.

5. *Треугольник Эйлера–Бернулли* E_n^k задается рекуррентой $E_n^k = E_n^{k-1} + E_{n-1}^{n-k}$ и начальным условем $E_0^0 = 1$ ($E_n^k = 0$ при $k > n$, $k < 0$).

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & 2 & & 2 & & \\
 & 0 & & 2 & & 4 & & 5 & & 5 & \\
0 & & 5 & & 10 & & 14 & & 16 & & 16
\end{array}$$

а) Докажите, что $E_n := E_n^n = \sum_k E_{n-1}^{k-1}$ есть количество «змей длины n» — таких перестановок, что $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \ldots \lesseqgtr \sigma(n)$. Объясните, какой характеристике змеи соответствует число k.

б) Докажите комбинаторно, что $\displaystyle\sum_i (-1)^i \binom{2l+1}{2i} E_{2l+1-2i} = (-1)^l$.

(Рассмотрите перестановки, т. ч. $\sigma(1) < \ldots < \sigma(2i)$ и $\sigma(2i+1) < \sigma(2i+2) > \ldots > \sigma(2l+1)$.)

в) Найдите экспоненциальную производящую функцию чисел E_{2l+1}. г*) И чисел E_{2l}.

6. Пусть $E(n,1)$ — количество перестановок n элементов с ровно одним *подъемом* (т.е. таких перестановок σ, что $\sigma(i+1) > \sigma(i)$ ровно для одного i). Например, $E(3,1) = |\{132, 213, 231, 312\}| = 4$.
а) Докажите, что $E(n+1,1) = 2E(n,1) + n$.
б) Найдите производящую функцию и явную формулу для чисел $E(n,1)$.

7. а) Найдите рекурренту, получающую следующую строчку чисел $E(n,m)$ в «треугольнике Эйлера» из предыдущей.

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&4&&1&& \\ &1&&11&&11&&1& \\ 1&&26&&66&&26&&1 \end{array}$$

б) Докажите, что $\sum\limits_k (-1)^{k-1} k^n t^k = \dfrac{t \cdot E_n(-t)}{(1+t)^{n+1}}$, где $E_n(t) = \sum\limits_m E(n,m) t^m$.

▷ Эйлер заметил, что если модифицировать определение ζ-функции и положить $\eta(s) = \sum_k (-1)^{k-1} k^{-s}$, то при $s = -n$ можно *определить* значение расходящегося ряда $\eta(-n)$ как значение *рациональной* функции $\sum_k (-1)^{k-1} k^n t^k$ в точке $t = 1$. Вместе с равенством $\zeta(s) = (1 - 2^{1-s})^{-1} \eta(s)$ (очевидным при $s > 1$) это дает рецепт вычисления ζ-функции в целых отрицательных точках.

8. Докажите, что знакопеременная сумма строки треугольника Эйлера равна E_{2l+1}. Выведите отсюда, что если понимать $\zeta(-m)$ "по Эйлеру", то

$$\zeta(-m) = -\frac{B_{m+1}}{m+1}.$$

(Ср. с $1^m + 2^m + \ldots + (N-1)^m = \dfrac{(B+N)^{m+1} - B_{m+1}}{m+1}$.)

▷ Замечательным образом это тот же ответ, который дает аналитическое продолжение.

9. а) Многограниик в $\mathbb{R}^m$ задан неравенствами $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_m \leqslant 1$. Найдите его объем.
б) Многогранник $\Pi_{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}_{\geqslant 0}$ задан неравенствами

$$\begin{gathered} \phi_1 + \phi_2 \leqslant \pi/2; \\ \phi_2 + \phi_3 \leqslant \pi/2; \\ \ldots \\ \phi_{2n} + \phi_1 \leqslant \pi/2. \end{gathered}$$

Выразите его объем через число змей подходящей длины.

10. а) Докажите, что

$$\mathrm{Vol}(\Pi_{2n}) = \int\limits_{[0,1]^{2n}} \frac{dx_1 \dots dx_{2n}}{1 - x_1^2 x_2^2 \dots x_{2n}^2} = 1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \dots$$

(указание: $x_1 = \sin\phi_1 / \cos\phi_2$, $x_2 = \sin\phi_2 / \cos\phi_3, \dots$ — ср. с заменой $x = \sin\phi / \cos\phi$, вычисляющей интеграл функции $(1+x^2)^{-1}$).

б) Выведите из предыдущего пункта, что

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}.$$

▷ Как обнаружил Эйлер и доказал Риман, ζ-функция удовлетворяет функциональному уравнению

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s).$$