Григорий Мерзон

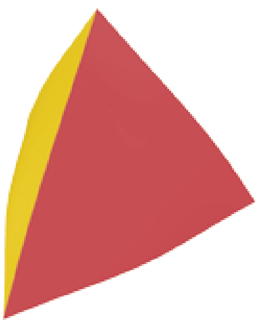
МНОГОГРАННИКИ и РАСКРАСКИ

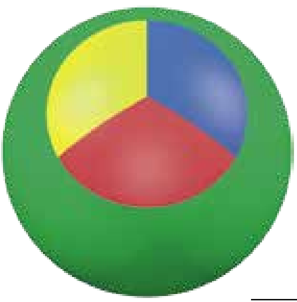
У тетраэдра (треугольной пирамиды) любые две грани – соседние (имеют общее ребро). Бывают ли другие многогранники с таким свойством?

Если представить себе, что тетраэдр сделан из тянущейся, но не рвущейся резины, можно немного его растянуть и превратить в сферу. Каждая грань тетраэдра будет областью на сфере. Если мы захотим покрасить каждую область в какой-то цвет так, чтобы соседние области были разных цветов, то нам потребуется, естественно, 4 цвета.

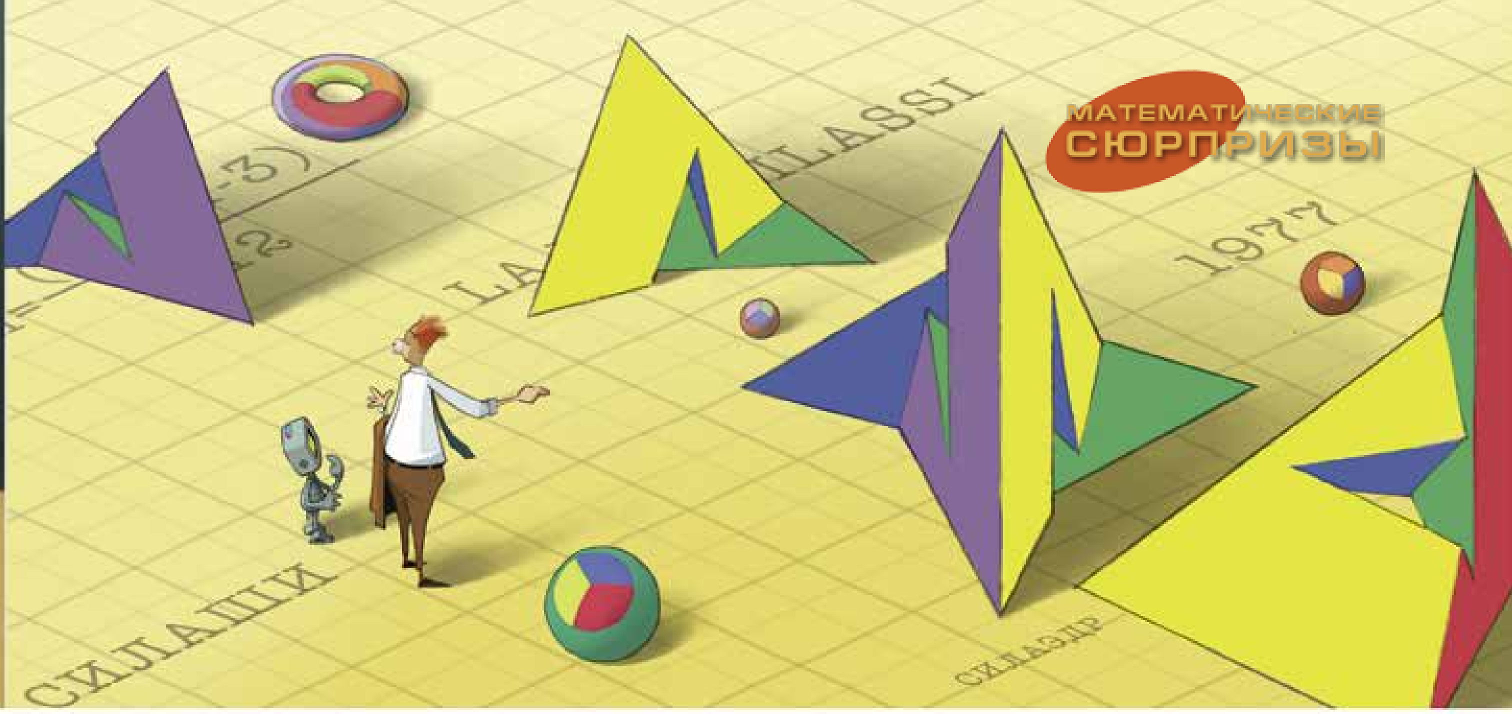
Знаменитая *теорема о четырёх красках* говорит, что четырёх цветов достаточно, чтобы покрасить *любую* карту на сфере. Из неё следует, что разделить сферу на 5 или больше областей, каждая из которых граничит с каждой, не получится[1]. Кажется, что тогда не могут существовать и многогранники с 5 или более гранями, у которых всякие две грани соседние.

И всё же такой многогранник есть! Чтобы его построить, будем рисовать области *не на сфере, а на торе* (поверх-





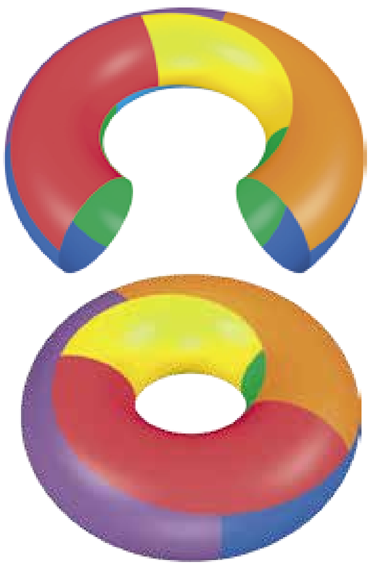
[1] Вместо очень сложной теоремы о четырёх красках можно воспользоваться формулой Эйлера, о которой «Квантик» рассказывал в №11 за 2020 год (статья «Игры Конвея, рисунки Эйлера и прочие проблемы»).

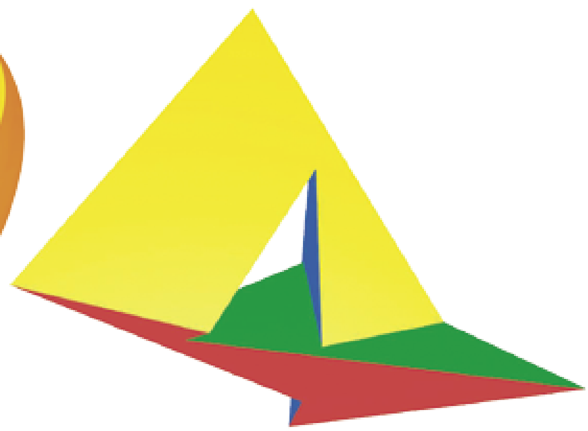


ности бублика). Его уже можно разбить на целых 7 областей, каждая из которых граничит с каждой[2] (см. рисунки; мы начинаем с картинки на прямоугольной полоске, из которой склеивается цилиндр, а из цилиндра – тор).

Оказывается, такую карту тора можно продеформировать в настоящий многогранник. Такой семигранник построил венгерский математик Ла́йош Си́лаши (Lajos Szilassi) в 1977 году. Рассмотреть этот многогранник с разных сторон можно на странице kvan.tk/etudes-szilassi сайта «Математические этюды».

А вопрос о том, существует ли многогранник, отличный от тетраэдра и многогранника Силаши, у которого любые две грани имеют общее ребро, всё ещё остаётся открытым.





[2] Это значит, кстати, что для раскраски карт на торе иногда требуется как минимум 7 цветов. На самом деле, 7 цветов хватит для любой карты на торе – и доказать это намного проще, чем теорему о четырёх красках для плоских карт.

Художник Алексей Вайнер