Григорий Мерзон

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧЕРЕПАХА и ЧИСЛА СОЧЕТАНИЙ

Таблица математической черепахи

В нижней левой клетке доски сидит математическая черепаха. Каждым ходом она умеет сдвигаться на клетку вправо или на клетку вверх (рис. 1). Запишем в каждой клетке таблицы, сколькими способами до неё может добраться черепаха.

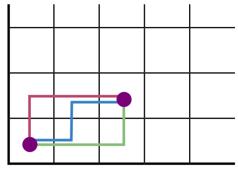


Рис. 1. Все пути черепахи в третью клетку второй строки

Ясно, что в любой клетке первой строки стоит число 1 (в неё можно попасть, только двигаясь всё время вправо). Догадались, какие числа стоят во второй строке? Правильно – последовательные натуральные: 1, 2, 3, ... (рис. 2).

1	3	?	?	?
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

Рис. 2. Начинаем заполнять «таблицу математической черепахи»

Удобно заполнять клетки числами одну за другой: в каждую клетку черепаха может прийти либо слева, либо снизу – поэтому число в каждой клетке равно сумме чисел в её «соседях» слева и снизу (рис. 3).

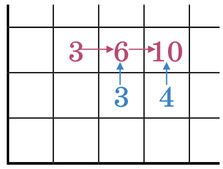
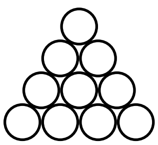
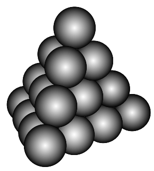


Рис. 3. Число 6 получается как сумма чисел под ним и слева от него; далее аналогично получается число 10...

Например, в третьей строке стоят числа 1, $1+2$, $1+2+3$, $1+2+3+4$, ... – их ещё называют *треугольными* (рис. 4, *а*). А в четвёртой строке стоят суммы последовательных треугольных чисел – это количества шариков в пирамидках (рис. 4, *б*).



а) 4-е треугольное число $1+2+3+4=10$



б) 4-е «тетраэдральное число» $1+3+6+10=20$

Рис. 4.

Задача 1. Найдите формулу для N-го треугольного числа.

Задача 2. Докажите, что в черепашьей таблице все числа на диагонали (кроме левого нижнего) – чётные.

Кодируем пути

Каждый путь черепахи можно закодировать «программой» (последовательностью) из букв П («вправо») и В («вверх»). Если конец пути расположен на X клеток правее и на Y клеток выше начала, то в программе будет X букв «П» и Y букв «В», всего $X+Y$ (рис. 5).

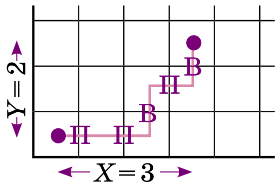


Рис. 5. Путь черепахи в 4-ю клетку 3-й строки («в клетку (3,2)»), соответствующий «программе» ППВПВ

Так значит, каждой клетке можно дать своё имя! Оно состоит из двух чисел: первое – сколько на пути черепахи в эту клетку будет ходов вправо, а второе – сколько ходов будет вверх. Числа будем записывать в скобках через запятую. Например, (0, 0) – это левый угол (никуда идти не надо).

Итак, в клетке (X, Y) черепашьей таблицы стоит количество программ из X букв «П» и Y букв «В». Чтобы задать такую программу, нужно выбрать, на каких позициях будет стоять буква «В». У нас Y букв «В», а мест для них имеется $X+Y$. Значит, программ столько же, сколько есть способов выбрать Y предметов из $X+Y$.

Например, в N-й клетке второй строки («клетке ($N-1$, 1)») стоит число N: выбрать, какой из N ходов будет ходом вверх, можно как раз N способами.

Задача 3. Заменим в программе, ведущей в клетку (X, Y), все «П» на «В», а все «В» на «П». В какую клетку приведёт новая программа?

Треугольник Паскаля

Количество способов выбрать k предметов из n обозначают $\binom{n}{k}$ или C_n^k (в двух обозначениях k и n действительно в разных местах, это не опечатка). А «таблицу математической черепахи» обычно поворачивают и рисуют в виде треугольника из чисел, который называют *треугольником Паскаля* (рис. 6). Будем нумеровать и его строки, и числа в строках, причём счёт начинаем с нуля. Например, самое верхнее число треугольника – это нулевое число нулевой строки (а, скажем, 2-е число 5-й строки равно 10). Тогда k-е число в n-й строке треугольника Паскаля – это как раз число $\binom{n}{k}$.

Мы уже умеем вычислять эти числа последовательно, строка за строкой: на левой и правой сторонах треугольника Паскаля стоят единицы, а каждое число внутри – сумма двух чисел над ним. Другими словами, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (на рисунке 6 эти числа соединены стрелочками для $n = 4$, $k = 2$).

1	4	10	20
1	3	6	10
1	2	3	4
1	1	1	1

$\longrightarrow$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Рис. 6. Таблица математической черепахи и треугольник Паскаля

Задача 4. Как связаны числа $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{n-k}$? Как эту связь объяснить?

Задача 5. Найдите суммы чисел в первых нескольких строках треугольника Паскаля. Что получается? Почему?

Задача 6. Выпишите первые 10 строк треугольника Паскаля и обведите в них все нечётные числа. Разберитесь, в каких строках будут обведены все числа.

Если внимательно посмотреть на треугольник Паскаля, можно обнаружить ещё массу замечательных закономерностей (попробуйте!).

Строки треугольника Паскаля

Решим такую задачу: сколькими способами можно выбрать в классе из n человек команду из k обычных игроков и одного капитана?

Можно сначала выбрать обычных игроков – одним из $\binom{n}{k}$ способов, а потом назначить одного из оставшихся $n - k$ людей капитаном. Получаем ответ $\binom{n}{k} \cdot (n-k)$.

Но можно рассуждать иначе! Сначала выберем всю команду из $k + 1$ игроков – одним из $\binom{n}{k+1}$ способов, а потом пусть они выберут среди себя капитана – одним из $k + 1$ способов. Получаем ответ $\binom{n}{k+1} \cdot (k+1)$.

Какое из этих рассуждений правильное? Оба правильные! На самом деле, мы доказали тождество

$$\binom{n}{k} \cdot (n-k) = \binom{n}{k+1} \cdot (k+1).$$

Задача 7. Докажите похожим образом, что

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}\cdot\frac{n}{k}.$$

Возможно, вы уже заметили, что числа в строках треугольника Паскаля сначала возрастают (до середины), а потом убывают – такое свойство называется *унимодальность*. Можно объяснить это так: по только что доказанному, $(k+1)$-е число в n-й строке получается из k-го умножением на $(n-k)/(k+1)$; пока $k<(n+1)/2$, числитель больше знаменателя и следующее число больше предыдущего (а потом наоборот).

Задача 8. Докажите, что при $1<k<n-1$ число $\binom{n}{k}$ не может быть простым.

Формула для числа сочетаний

Те, кто решили задачу 6, доказали фактически и явную формулу для чисел сочетаний:

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\binom{n-2}{k-2}=\ldots=$$

$$=\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\binom{n-k+1}{1}=\frac{n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

(где $k!$ – обозначение для произведения $1\cdot2\cdot\ldots\cdot k$).

Можно объяснить эту формулу и по-другому. Будем выбирать k предметов из n последовательно всевозможными способами и записывать каждый выбор на бумажку. Первый предмет можно выбрать одним из n способов; после того как первый выбран, второй можно выбрать $n-1$ способами (любой из оставшихся) и так далее. То есть мы запишем на бумажке всего $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ строк. Но в них каждый из $\binom{n}{k}$ наборов предметов будет встречаться $k!$ раз: переставленный всевозможными способами. Вот и получается, что

$$\binom{n}{k}=\frac{n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Эта явная формула не всегда удобна. Так, если мы хотим найти число способов выбрать 99 предметов из 100, вряд ли разумно сначала вычислять 100! и 99!, а потом делить одно на другое... Для вычислений (в том числе компьютерных) обычно удобнее рекуррентное задание (последовательное вычисление строки за строкой). А для доказательства разных фактов про числа сочетаний полезно помнить про их комбинаторный смысл (выбор k предметов из n, количество путей...).

Художник Мария Усеинова