МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

Григорий Мерзон

РОЖДЕСТВЕНСКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА И КРЫЛАТЫЕ КВАДРАТЫ СПИВАКА

Задача о суммах двух квадратов

Какие целые числа могут быть представлены в виде суммы двух квадратов? С этого вопроса началась классическая теория чисел, а ответ на него нашёл Пьер Ферма ещё в XVII веке (мы дадим этот ответ в конце статьи).

Начнём с того, что квадрат целого числа даёт остаток 0 или 1 при делении на 4. Поэтому сумма двух квадратов даёт при делении на 4 остаток 0, 1 или 2. То есть никакое число вида $4k+3$ в виде суммы двух квадратов не представимо. А вот среди чисел вида $4k+1$ есть как представимые (например $5=2^2+1^2$, $9=3^2+0^2$), так и нет (например 21 или 33).

Замечательная **Рождественская теорема Ферма** гласит: *любое простое число вида* $4k+1$ *представимо в виде суммы двух квадратов.*

С Рождества 1640 года (когда Ферма объявил, что доказал эту теорему – поэтому её и называют Рождественской) был найден не один десяток разных доказательств. Мы обсудим замечательное элементарное доказательство с «крылатыми квадратами», найденное А. В. Спиваком уже в XXI веке (см. kvan.tk/spivak-sq).

Крылатые квадраты

Пусть p – простое число вида $4k+1$. Рассмотрим все такие тройки целых неотрицательных чисел (x, y, z), что $p=4xy+z^2$. Наша цель – доказать, что среди них есть хотя бы одна тройка, для которой $x=y$: тогда $p=(2x)^2+z^2$ – сумма двух квадратов.

Все тройки, для которых $x\neq y$, разбиваются на пары $(x, y, z)\leftrightarrow(y, x, z)$. Поэтому достаточно доказать, что количество наших троек нечётно (тогда все они разбиться на пары не могут).

Пришло время добавить к разговорам картинки. По каждой тройке (x, y, z) мы нарисуем клетчатую фигуру («крылатый квадрат»): начнём с квадрата $z\times z$ и приставим к нему (начиная с пра-

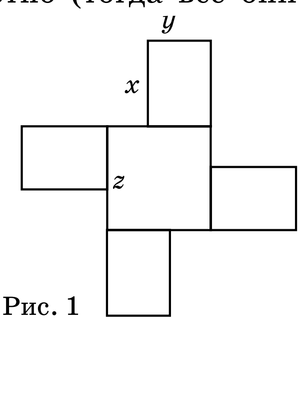

Рис. 1

вого верхнего угла)[1] 4 равных прямоугольника $x \times y$ (рис. 1). Если $p = 4xy + z^2$, мы получим крылатый квадрат площади p.

Но если число p простое, то почти каждый крылатый квадрат площади p можно получить ровно из двух троек! Действительно, как восстановить тройку, имея в распоряжении крылатый квадрат? Надо разрезать его на обычный квадрат и четыре одинаковых прямоугольника: взять один из «вогнутых» углов и начать от него отрезать либо по горизонтали, либо по вертикали (рис. 2).

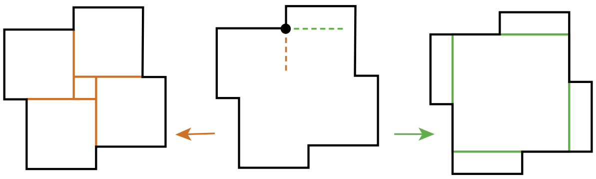
Рис. 2

Единственное исключение (единственное, если p простое[2]) – крест, соответствующий тройке $(1, k, 1)$, где $p = 4k + 1$ (рис. 3). А все остальные тройки мы разбили на пары. Значит, общее количество троек нечётно, что и требовалось.

От простых чисел к составным

Мы начинали с вопроса о представимости произвольных целых чисел в виде суммы двух квадратов, но дальше занимались только представимостью *простых* чисел.

Дело в том, что наша задача, как говорят, *мультипликативна*: если числа M и N представимы в виде суммы двух квадратов, то в таком виде представимо и число MN (действительно, если $M = a^2 + b^2$ и $N = c^2 + d^2$, то $MN = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$); и наоборот, если число MN представимо в виде суммы двух квадратов, а числа M и N взаимно просты (не имеют общих делителей), то и M, и N тоже представимы в виде суммы двух квадратов (это непростой факт).

Пользуясь этим, уже не очень сложно вывести из Рождественской теоремы и общее утверждение: *число N представимо в виде суммы двух квадратов тогда*

[1] Или начиная с левого верхнего. Мы не различаем равные фигуры (в том числе получающиеся друг из друга зеркальным отражением).

[2] Подумайте, почему важна простота числа p. Чтобы разобраться, какие иначе могут возникнуть неприятности, полезно порисовать крылатые квадраты площади 21 и площади 16.

и только тогда, когда каждое простое число вида $4k+3$, входящее в разложение числа N на простые сомножители, входит в него в чётной степени.

Например, число $21 = 3 \cdot 7$ не представимо в виде суммы двух квадратов, а число $2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 = 6370$ представимо (действительно, $6370 = 21^2 + 77^2$).

На рисунке 3 изображён случай $p = 37$. В каждой строке – по одному крылатому квадрату площади p (в данном случае их 4) и соответствующие ему тройки (x, y, z) (для всех, кроме первого креста, их две). Стрелки соединяют тройки (x, y, z) и (y, x, z). Единственная тройка, остающаяся без пары, – (3, 3, 1) – и соответствует представлению числа 37 в виде суммы двух квадратов: $37 = 6^2 + 1^2$.

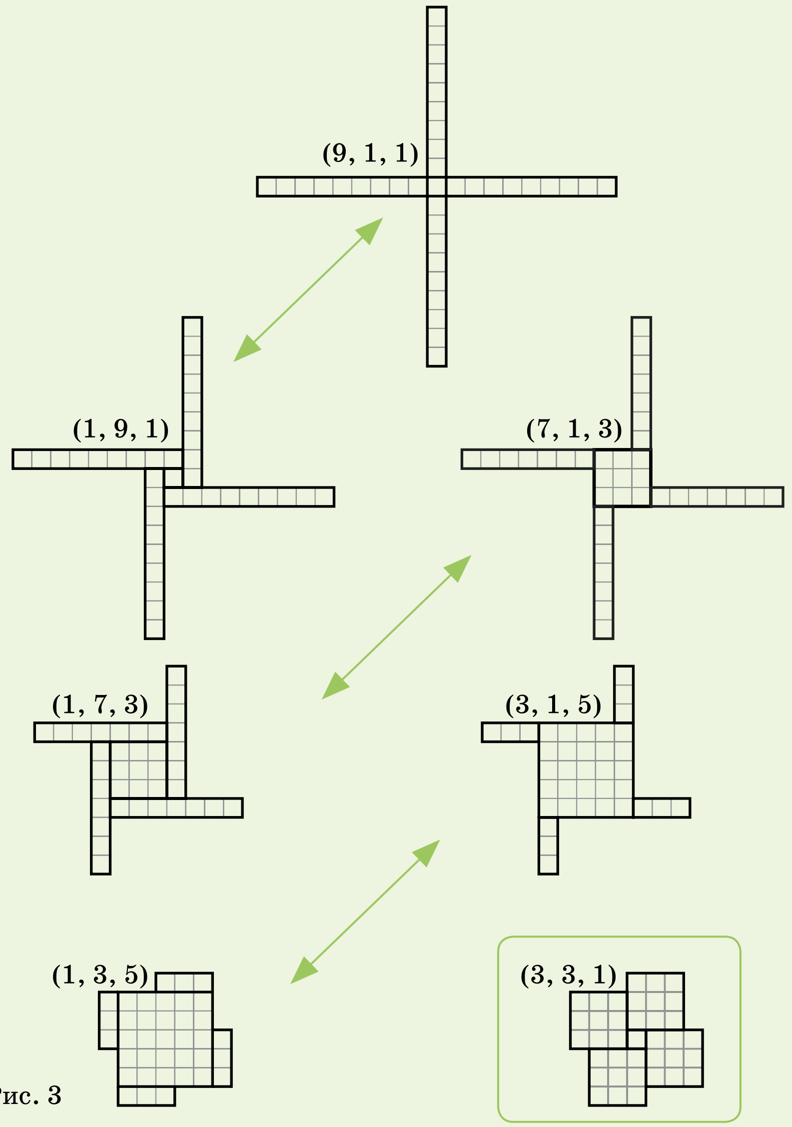

Рис. 3