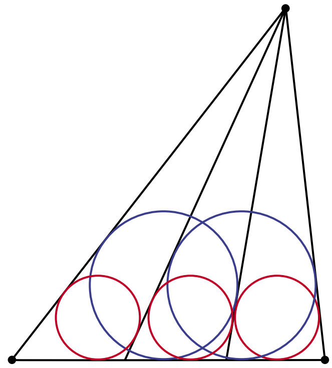
Григорий Мерзон

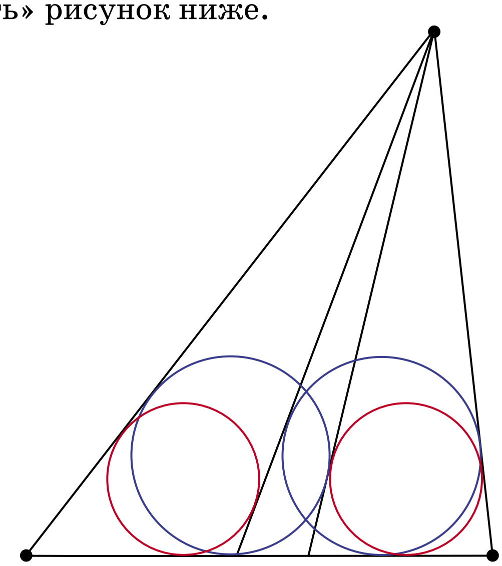
ОБОБЩАЯ САНГАКУ: ТЕОРЕМА О ЧЕТЫРЁХ КРУГАХ

В № 7 «Квантика» за 2012 год рассказывалось (А. Полянский, «Японские сангаку») о нескольких красивых геометрических теоремах, обнаруженных в Японии в XVII – XIX вв. Одна из них была такая.

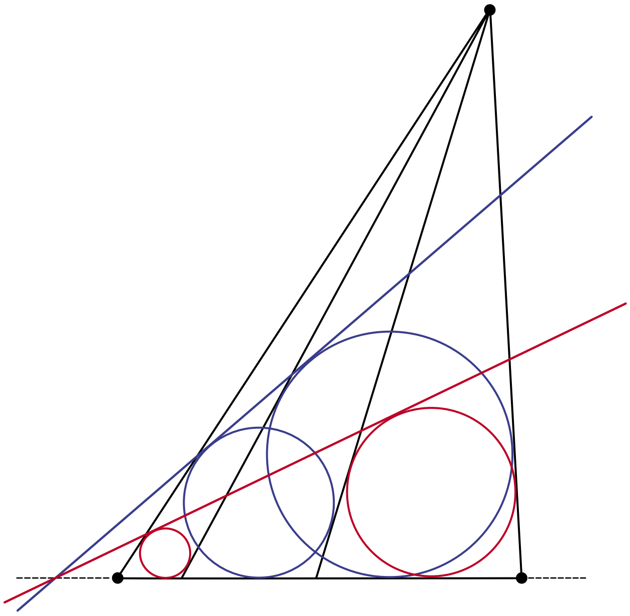
Из одной точки провели к прямой четыре отрезка и получили три примыкающих друг к другу треугольника. Отрезки проводили так, чтобы окружности, вписанные в эти треугольники, были одинаковыми (они изображены красным цветом). Оказывается, если теперь вписать по окружности в треугольники, образованные из двух соседних маленьких треугольников, то эти окружности тоже окажутся одинаковыми (они изображены синим цветом)!



Эту теорему можно обобщить: уже равенства двух красных окружностей достаточно, чтобы синие были равны! По ссылке geogebra.org/m/ah6rtgpx можно «подвигать» рисунок ниже.

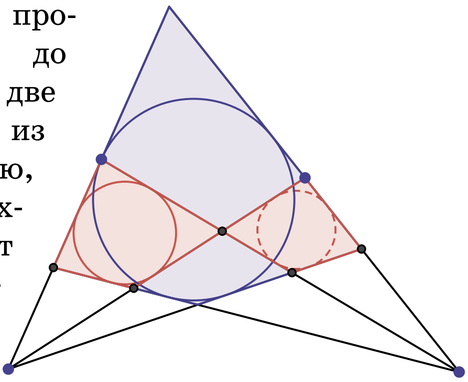


А что если красные окружности не равны? Оказывается, тогда общая касательная к красным окружностям и общая касательная к синим пересекаются на продолжении стороны треугольника – см. рисунок ниже или «живой чертёж» geogebra.org/m/kead458m

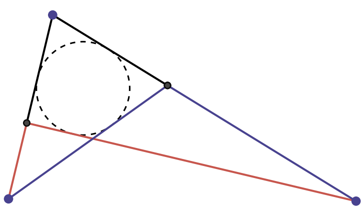


Эти теоремы опубликовал болгарский математик Йордан Табов в 1989 году. Оказывается, их все можно вывести из другого замечательного факта.

В синий четырёхугольник вписана окружность. Продолжим пары его противоположных сторон до пересечения, получим две точки. Через каждую из них проведём прямую, пересекающую четырёхугольник. Возникнет ещё два четырёхугольника (красные). Тогда если в один из красных четырёхугольников можно вписать окружность, то и во второй тоже!



Сам факт, кстати, не слишком сложный. Только сначала докажите, что в четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда сумма красных отрезков равна сумме синих.



Художник Мария Усеинова