Григорий Мерзон

КОСЫЕ КВАДРАТЫ:
ОТ ПИФАГОРА ДО ФЕРМА

Дима. Чем это ты занимаешься?

Маша. Пытаюсь разобраться, квадраты какой площади можно нарисовать на клетчатой бумаге.

Дима. А что тут разбираться? Все знают эти числа, $1 \times 1 = 1$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, $4 \times 4 = 16$... – их так и называют, квадраты (рис. 1).

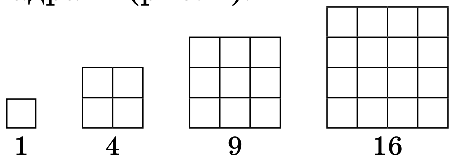


Рис. 1

Маша. Про квадраты я, конечно, знаю. Но ты говоришь только про случай, когда стороны квадрата идут по линиям сетки. А бывают и другие, косые квадраты: у них вершины всё ещё в узлах сетки, а стороны уже могут идти и косо. Вот несколько примеров (рис. 2).

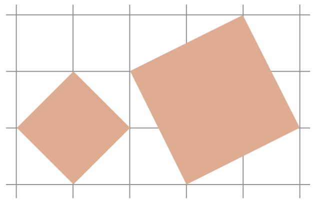
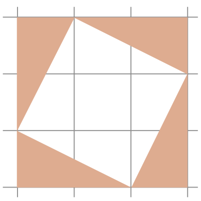


Рис. 2

Задача 1. а) Найдите площади квадратов на рисунке 2. б) Существует ли косой квадрат площади 200 клеток?

Дима. Слушай, а площади косых квадратов – всегда целые числа? Я тут мерил линейкой сторону второго квадрата, получилось чуть больше 2,2 клеточек...



$5 = 3^2 - 4$

Рис. 3

Маша. Конечно, целые! Смотри, нарисуем вокруг квадрата рамку (рис. 3). Получается, что площадь нашего квадрата – это площадь рамки минус учетверённая площадь закрашенного треугольника. Поэтому площадь косого квадрата всегда целое число.

Задача 2. Верно ли, что площадь вообще любого многоугольника с вершинами в узлах сетки составляет целое число клеток? Если не верно, то что верно?

Дима. Слушай, а я такую картинку уже где-то видел... Точно, в доказательстве теоремы Пифагора: можно переложить эти треугольники. Не занятая ими площадь не меняется, и получается, что $c^2 = a^2 + b^2$ (рис. 4).

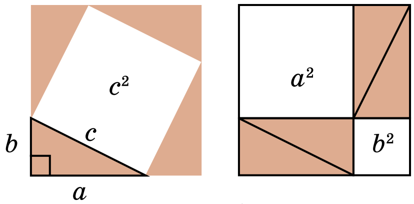


Рис. 4

Выходит, я измерил линейкой приближённое значение квадратного корня из 5.

Маша. Классно. Я-то думала, что по геометрии решаю задачу, а оказывается, по теории чисел. Давай число – площадь косого квадрата – тоже называть косым квадратом. Тогда косые квадраты – это в точности суммы двух квадратов целых чисел. Как бы только понять, какие числа так представляются?..

***

Маша. Я тут написала на Питоне программу[1], которая про первые 100 чисел выясняет, они косые квадраты или нет. Только что-то никакой закономерности не видно...

```
N = 101
sq_reps = [0] * N
for x in range(N):
    for y in range(N):
        s = x**2+y**2
        if s < N:
            sq_reps[s] += 1
for s,n in enumerate(sq_reps):
    print(s,": +" if n>0 else ": -")
```

Дима. А я на бумажке пока только с числами до 20 справился. Но кое-что всё-таки видно!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
+	+	–	+	+	–	–	+	+	+	–	–	+	–	–	+	+	+	–	+

Смотри, я вот выписал отдельно только для нечётных чисел:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
+	–	+	–	+	–	+	–	+	–

Маша. Ой как здорово! Как же это я не заметила такой простой закономерности?..

[1] Её можно запустить по ссылке kvan.tk/squares-py

Дима. Осталось разобраться с чётными числами, но у меня и про них есть идея. Там можно по диагонали всё рисовать и...

Задача 3. а) Докажите, что если N – сумма двух квадратов, то и $2N$ тоже. (*Указание:* полезно вспомнить формулы квадрата суммы и квадрата разности... или подумать про диагональ косого квадрата.)

б) Докажите, что если $2N$ – сумма двух *нечётных* квадратов, то и N – сумма двух квадратов.

Маша. Подожди, тут что-то не то! Вот уже для числа 21 твоя закономерность для нечётных чисел не выполняется.

Дима. Не может такая хорошая закономерность не выполняться. Да у тебя, наверное, в программе ошибка просто!

Маша. ...

Дима. М-да, ты права, 21 действительно в виде суммы двух квадратов не представишь. Жалко, но гипотеза неправильная.

Маша. Ну... что-то в этом всё-таки есть. Я смотрю на результаты работы программы только для нечётных чисел, и часто твоя закономерность выполняется... но не всегда. После 21 исключение 33, потом 57...

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	–	–	+	–	+	–	–

35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67
–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	–	–	+	–	+	–

69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99
–	–	+	–	–	–	+	–	+	–	+	–	–	–	+	–

Дима. Это уже не математика. Нам биолог показывал как-то в лесу «вороний глаз» и говорит: «Замечательная особенность этого растения – у него всегда 4 чашелистика... гм, у этого, правда, их 5...».

Маша. Не придирайся. Надо просто уточнить гипотезу. Вот, смотри, я отметила исключения в таблице красным – что у них общего?

Дима. Да они же все на 3 делятся... А, нет – там ещё 77... Ну что это такое? Сначала мы оставили на потом числа, делящиеся на 2, потому что для нечётных была прекрасная гипотеза. Она провалилась, и вроде бы только из-за чисел, делящихся на 3, – но нет, есть ещё 77... Может, просто выбросить числа, которые хоть на что-то делятся?

Маша. Так ты вообще всё выбросишь.

Дима. Я понял. Давай только простые числа рассматривать!

Маша. Гм?! И что, там будет всё чередоваться? 3 – нет, 5 – да, 7 – нет, 11 – нет... – что-то не получается.

Дима. Да нет, не так! Закономерность прежняя, мы считаем чередование по всем нечётным числам, не только простым. Но ответ получается гарантированно правильный только для простых.

Маша. То есть... э... ты говоришь, что простые числа вида $4k+1$ представляются в виде суммы двух квадратов, а вида $4k+3$ нет?

Дима. М... ну да, наверное это я и говорю. Вот, например, 2021... тьфу, это не простое число... Вот, $2017 = 44^2 + 9^2$. А составные числа как-нибудь из простых соберём.

Задача 4. Докажите, что если M – сумма двух квадратов и N – сумма двух квадратов, то MN – тоже сумма двух квадратов. (*Указание:* полезно вспомнить про косые квадраты... хотя можно решить задачу и алгебраически.)

Маша. Что в задаче по теории чисел появились простые числа – наверное, не так уж удивительно... но только как же такую гипотезу доказывать?..

Дима. Никаких идей. Я пока лучше с суммами трёх и четырёх квадратов поэкспериментирую – где там твоя программа?

Задача 5. Придумайте правдоподобную гипотезу о том, какие числа представимы в виде суммы четырёх квадратов (возможно, вам поможет компьютерный эксперимент).

То, что каждое простое число вида $4k+1$ представимо в виде суммы двух квадратов, – это знаменитая Рождественская теорема Ферма. С Рождества 1640 года (когда Ферма объявил, что доказал эту теорему) был найден не один десяток разных доказательств. Замечательное элементарное доказательство А. Спивака с «крылатыми квадратами» можно будет прочитать в одном из следующих номеров журнала.

Художник Алексей Вайнер