Григорий Мерзон,
Александр Перепечко
(по мотивам Питера Камерона)

КАК ИЗ МОНЕТКИ СДЕЛАТЬ КУБИК, или ЛЮБОЙ ЖРЕБИЙ ЗА ДВА БРОСКА

– Кинуть четырёхгранный кубик, и если выпала единица… – бормотал себе под нос Квантик.

– Что ты делаешь? – заинтересовался Ноутик.

– Нашёл настольную игру, а в ней нужно каждый ход кидать четырёхгранный кубик, – пояснил Квантик. – И где я такой достану?

– А пара монеток не подойдёт? У них четыре равновероятных исхода. Если выпало две решки – вот тебе и единица!

– Только одна нашлась. Ну ничего, по два раза буду кидать, – утешился Квантик.

– Если при первом броске выпал орёл, второй раз можно не кидать, – подсказал Ноутик. – На ход будет то один бросок, то два – в среднем полтора! Довольно удобно. А можно с тобой?

– Ага! Та-ак… При игре вдвоём киньте шестигранный кубик, – вновь углубился в правила Квантик. – Боюсь, у меня и такого нет. Но нам нужно лишь проверять, не выпала ли на кубике единица. Может, тоже обойдёмся монеткой?

Можно ли монеткой заменить игральный кубик?

Итак, перед Квантиком встала такая задача:

Монетка при подкидывании выпадает орлом или решкой с одинаковой вероятностью $\frac{1}{2}$. *Можно ли с её помощью получить жребий, выпадающий с вероятностью* $\frac{1}{6}$*?*

Нетрудно получить жребий, который выпадает с вероятностью, *близкой* к $\frac{1}{6}$. Например, если подкинуть монетку 5 раз, то возможны $2^5=32$ различных исхода. Объявим 5 из них «успехом» (то есть жребий выпал), а остальные 27 – «неудачей» (жребий не выпал). Тогда вероятность успеха будет $\frac{5}{32}$, что лишь чуть меньше $\frac{1}{6}$. Но кажется, что получить вероятность *ровно* $\frac{1}{6}$ при помощи монеты невозможно: ведь для любого выбранного числа успешных бросков вероятность успеха будет равна дроби со знаменателем – степенью двойки.

На самом деле, как уже рассказывал Квантик[1], у таких «невозможных» задач вполне есть решение.

Подкинем монетку трижды – возможны $2\cdot2\cdot2=8$ исходов. Объявим один из них успехом, пять – неудачей, а в оставшихся двух случаях объявим жребий пока не разыгранным и повторим процедуру. Хоть необходимое число бросков заранее не ограничено, рано или поздно жребий будет разыгран, и вероятность успеха будет ровно в 5 раз меньше вероятности неудачи, то есть равна $\frac{1}{6}$.

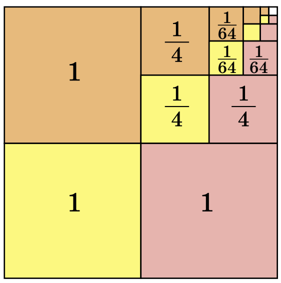
Сколько времени занимает бесконечный процесс?

Хотелось бы, конечно, разыграть жребий побыстрее! Если не будет везти, Квантик может кидать монетку очень долго. А сколько раз ему придётся кидать монетку *в среднем*?

Первая процедура из трёхкратного подбрасывания монетки будет проведена всегда, то есть с вероятностью 1. Вторая – только если жребий не был разыгран в первой процедуре, то есть с вероятностью $\frac{1}{4}$. Третья – только если жребий не был разыгран в первых двух процедурах, то есть с вероятностью $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, и т. д.

Поэтому, чтобы найти среднее число процедур (как ещё говорят, *математическое ожидание*[2]), нужно вычислить бесконечную сумму $1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots$

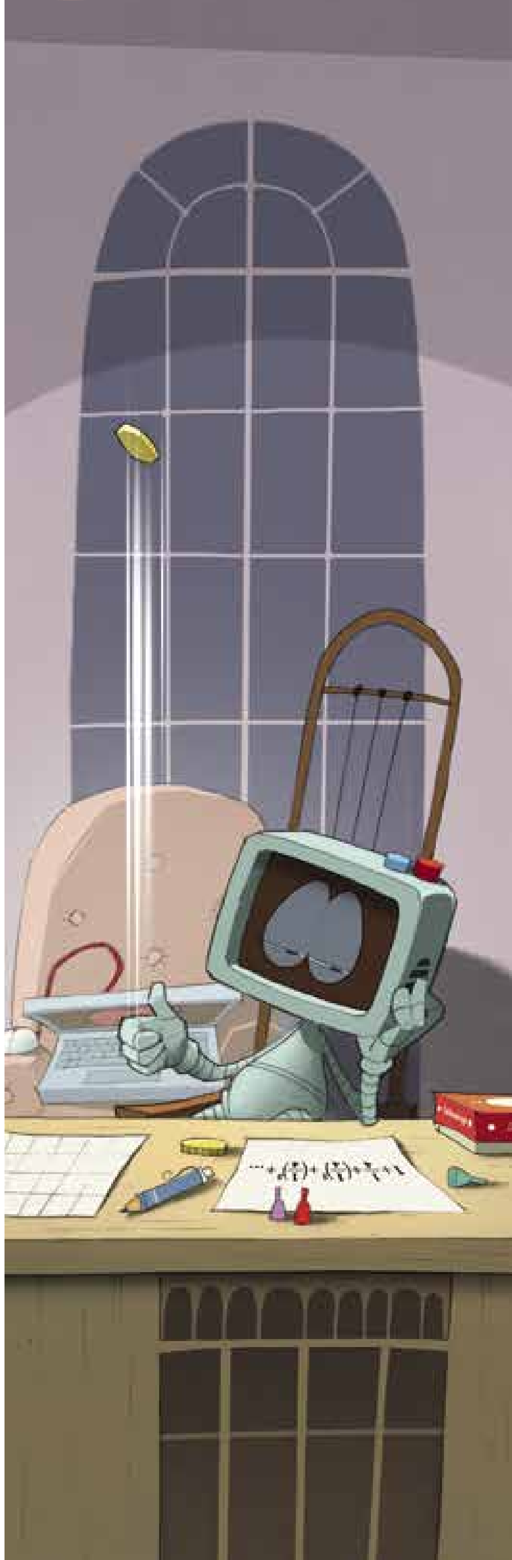
Это можно сделать *с помощью картинки*[3] ниже: разными цветами там закрашены три части квадрата 2×2, площадь каждой части равна нашей сумме.



Итак, среднее число процедур равно 4/3, а в каждой процедуре – три подбрасывания, то есть в среднем Квантику потребуется $\frac{4}{3}\cdot3=4$ подбрасывания монеты.

А нельзя ли побыстрее?

Разыгрывая жребий, мы объявляли успехом 1 исход из 8. Можно сказать, мы начинали с того, что приближали $\frac{1}{6}$ числом $\frac{1}{8}$. Но поскольку $\frac{1}{6}\neq\frac{1}{8}$, у нас



[1] См. статью Г. Мерзона «1/3, или Две невозможные задачи с решениями», Квантик № 6, 2019.

[2] См. статьи И. Высоцкого и И. Акулича «Новые приключения Стаса», Квантик № 3 – 5, 2016.

[3] См. также статью «Картинки вычисляют бесконечные суммы», Квантик № 1, 2020.

оставались «лишние» исходы (а именно, 2 исхода из 8), после которых мы повторяли процедуру.

Если приблизить $\frac{1}{6}$ поточнее (скажем, дробью $\frac{5}{32}$), жребий будет реже оставаться неразыгранным. Правда, сама процедура начнёт занимать больше времени. Сходу и не скажешь, будет ли это эффективнее.

Попробуйте найти среднее число бросков, если кидать монетку по 5 *раз* (*объявляя* 5 *исходов успехами,* 25 – *неудачами, а ещё в двух случаях перекидывая монетку заново*). *Оказывается, бросков будет ещё больше.*

Не будем отчаиваться, а посмотрим внимательнее на исходный алгоритм. Из восьми исходов трёхкратного подбрасывания мы объявили один – успехом, а пять – неудачей. Но ведь у нас есть выбор, *каким именно* исходам приписывать успех и неудачу – и этой свободой можно воспользоваться.

Будем кодировать исходы тройками ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР, где О – орёл, а Р – решка. Объявим первый исход (ООО) успехом, а 5 последних – неудачей. Ясно, что если первым выпала решка (а это происходит в половине случаев), дальше монету уже можно не кидать! Тогда одна процедура требует не 3 броска, а в среднем $\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1=2$ броска, и весь алгоритм займёт в среднем $2\cdot\frac{4}{3}=2\frac{2}{3}$ броска. Уже лучше!

Двух бросков всегда достаточно!

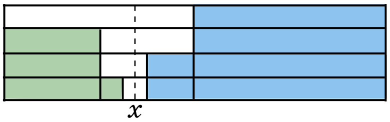
А что делать, если хочется сымитировать жребий с какой-то другой вероятностью успеха x (например, для $x=\frac{3}{19}$)? Насколько больше потребуется времени, чтобы его разыграть?

Кажется, что чем «сложнее» знаменатель, тем больше нужно бросаний. С другой стороны, увеличивается и простор для оптимизаций.

Удивительно, но всего за два бросания монеты (в среднем) можно сымитировать жребий *с любой* вероятностью успеха! Для этого разовьём идею экономии бросков из предыдущего раздела, а нужный алгоритм опишем... геометрически.

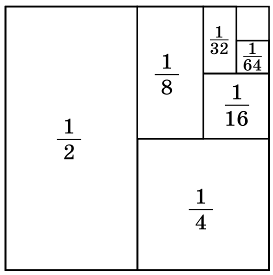
Отметим на отрезке [0;1] точку x. Будем кидать монету, и если выпадает О, будем оставлять от отрезка только левую половину, если выпадает Р –

правую, и дальше повторять процедуру (см. рисунок). Подбросив монету N раз, мы придём к одному из 2^N возможных отрезков. Этот отрезок окажется левее x с вероятностью, близкой к x (и тем ближе, чем больше N). Но мы опять можем экономить броски!



Как только у нас остался отрезок, целиком лежащий левее x — мы останавливаемся и считаем, что выпал успех (ведь уже точно получится отрезок левее x), а если остался отрезок целиком правее x, – останавливаемся и считаем, что выпала неудача. Ну а пока оставшийся отрезок содержит x – продолжаем бросать монету.

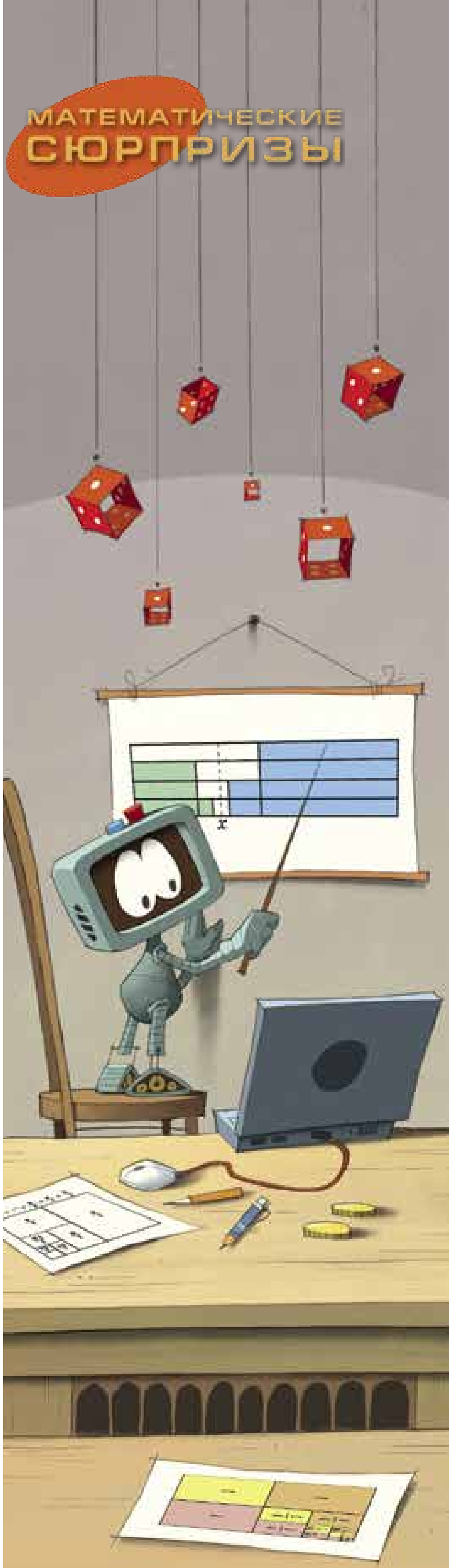
Сколько бросков мы сделаем в среднем? После очередного подбрасывания монеты процесс заканчивается, если мы выбрали тот из отрезков, на котором не лежит точка x. Это обычно происходит с вероятностью $\frac{1}{2}$ (кроме случая, когда x лежит ровно на границе отрезков – тогда всё точно закончится после этого подбрасывания). Итак, первый бросок потребуется с вероятностью 1, второй – с вероятностью $\frac{1}{2}$, третий – с вероятностью $\frac{1}{4}$, и т. д. А всего в среднем потребуется $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$ подбрасывания монеты (если x попадает на границу одного из отрезков, то даже меньше).



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$$

Для знатоков. Можно описать тот же алгоритм и алгебраически. Запишем x в виде бесконечной дроби в *двоичной системе счисления*. Будем кидать монету, пока впервые не выпадет решка. И если решка выпала на той позиции, где в записи x стоит 1, будем считать, что жребий выпал, если 0 – не выпал.

Например, для $x=\frac{1}{6}$ получается разложение 0,001010101... – то есть мы кидаем монету пока первый раз не встретится решка, и если на соответствующей позиции в разложении x оказалась 1 (то есть бросков было нечётное число, не равное 1), объявляем жребий выпавшим.



Художник Алексей Вайнер