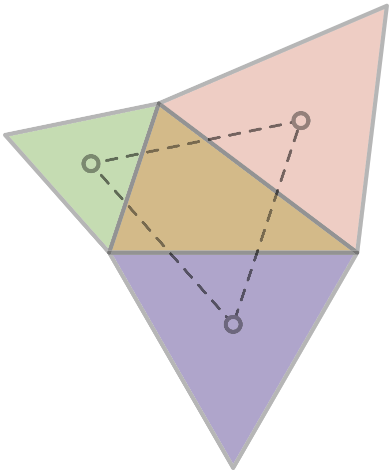
Григорий Мерзон

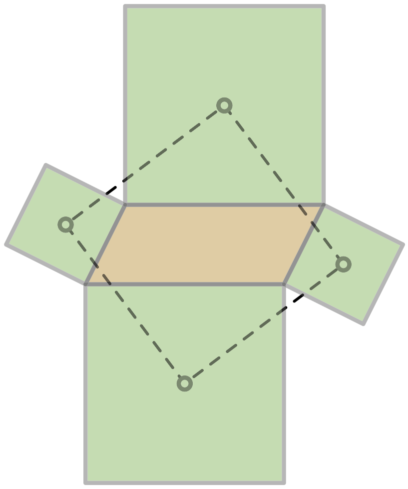
ТЕОРЕМА НАПОЛЕОНА,
ЗАМОЩЕНИЯ ПЛОСКОСТИ И ПАРАЛЛЕЛЬНИКИ

1. В одном из первых номеров журнала «Квантик» рассказывалось[1] про две замечательные теоремы.

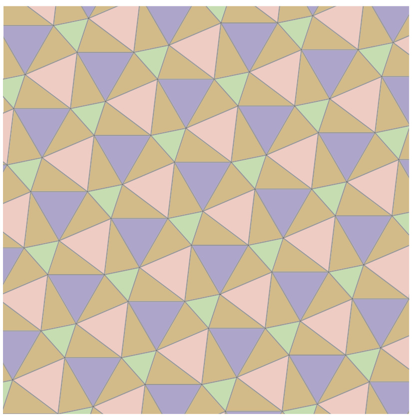
Теорема Наполеона. *Центры равносторонних треугольников, построенных вовне на сторонах произвольного треугольника, образуют равносторонний треугольник.*

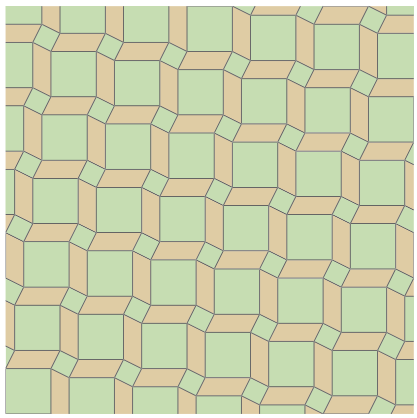
Теорема Тебо. *Центры квадратов, построенных вовне на сторонах произвольного параллелограмма, образуют квадрат.*





Оказывается, с этими теоремами связаны два замечательных замощения плоскости.



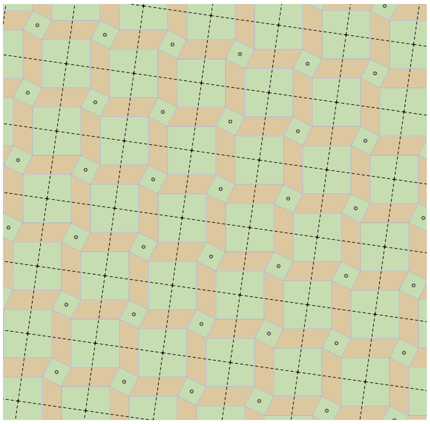


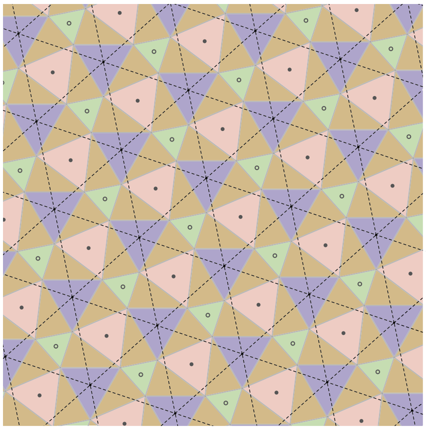
Если долго смотреть на эти замощения, то и теоремы станут очень понятными![2]

[1] А. Полянский, Г. Фельдман. Наполеон и геометрия («Квантик» № 5 за 2012 год).

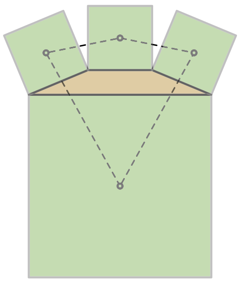
[2] Про другие доказательства при помощи замощений см. ещё статью: Г. Мерзон. Как разрезать верблюда? («Квантик» № 5 за 2020 год).

Посмотрим, например, на правую картинку внизу с. 20. Центры больших квадратов образуют квадратную сетку – то есть можно считать, что картинка нарисована на клетчатой бумаге и центры больших квадратов лежат в её узлах. А центры маленьких квадратов тогда лежат в центрах клеточек. Поэтому теорема Тебо верна.





Впрочем, если такое рассуждение вы расскажете своему учителю геометрии, то у него наверняка возникнут вопросы, о которых действительно полезно подумать. Ну а пока продолжим смотреть на картинки.



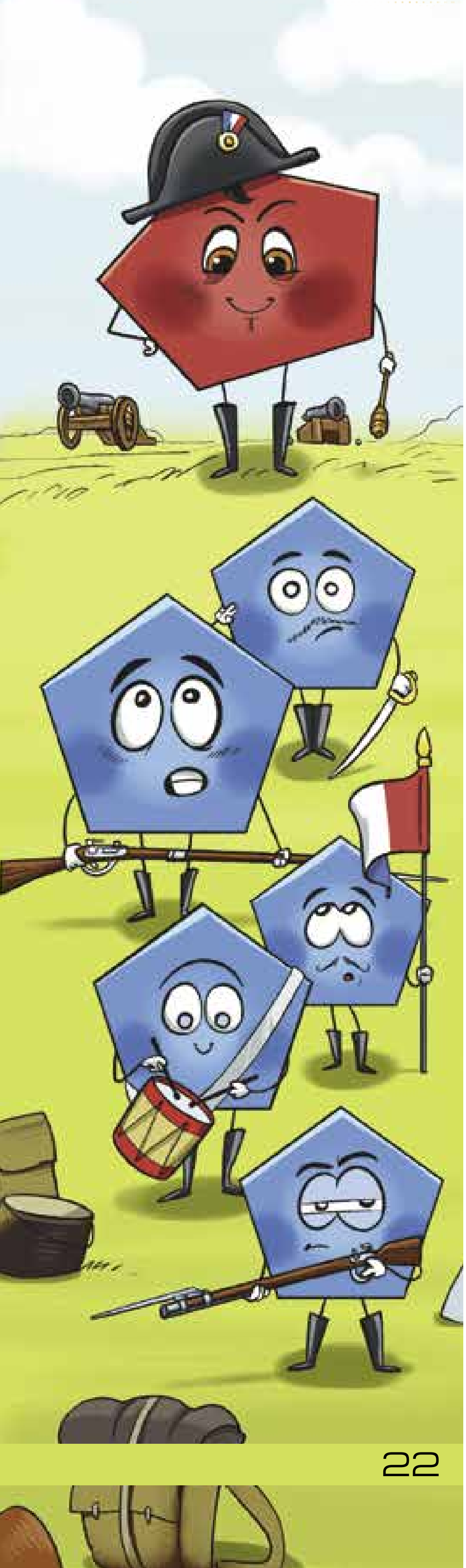
Точно так же на левой картинке внизу с. 20 можно увидеть теорему Наполеона.[3] Только треугольники теперь лежат в вершинах не квадратной, а треугольной сетки.

2. Не правда ли, формулировки двух теорем довольно похожи и вызывают надежду, что это начало целой серии теорем?

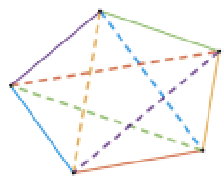
Но если в теореме Наполеона речь идёт о *произвольном* треугольнике, то в теореме Тебо уже нельзя брать произвольные четырёхугольники (в этом легко убедиться, нарисовав, например, очень сплюснутую трапецию), годятся только параллелограммы.

А что нужно потребовать, скажем, от пятиугольника, чтобы для него выполнялась теорема, аналогичная теореме Наполеона?

[3] Подробнее про это написано в статье: В. Н. Дубровский. Геометрия на паркете («Квант» № 2 за 2014 год). Там же рассказывается и про другие доказательства при помощи замощений.

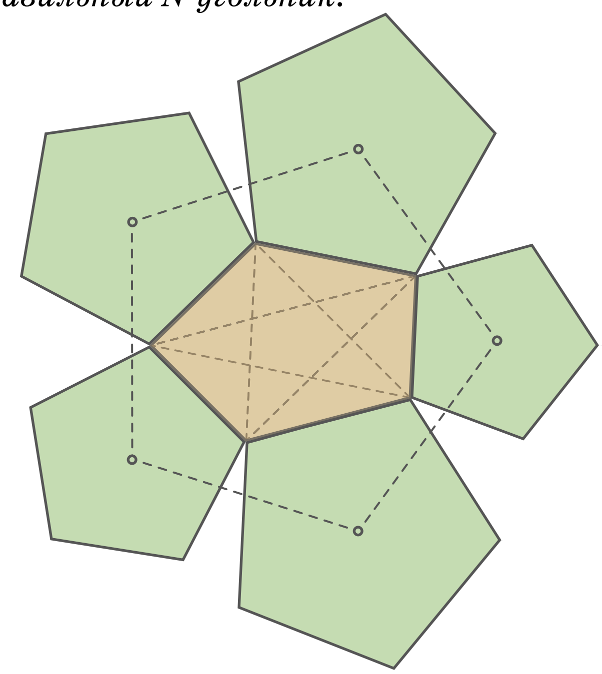


Тут помогает понятие параллельника, недавно обсуждавшееся в «Квантике». [4] *Параллельник* (или, выражаясь более научно, *аффинно-правильный многоугольник*) – это многоугольник, в котором параллельны друг другу те же стороны и диагонали, как если бы он был правильным. Например, четырёхугольный параллельник – это параллелограмм, а пятиугольный параллельник – такой пятиугольник, в котором каждая диагональ параллельна соответствующей (противоположной) стороне.



Теперь можно сказать, что обе приведённые теоремы – частные случаи такого утверждения.

Обобщённая теорема Наполеона. *Центры правильных N-угольников, построенных вовне на сторонах произвольного N-угольного параллельника, образуют правильный N-угольник.*



Но у этой теоремы нет наглядного доказательства при помощи замощений. Зато есть замечательно короткое доказательство при помощи комплексных чисел – но это уже совсем другая история.

[4] Ф. Нилов. Параллельники, полупараллельники и равные площади («Квантик» №11 за 2020 год). Там на сторонах N-угольных параллельников строят не правильные N-угольники, а квадраты – и тоже получается интересно.

Художник Мария Усеинова