Калейдоскоп формул для π

Григорий Мерзон (merzon@mccme.ru)

«...я считал, что есть две математики — алгебраическая и геометрическая, и что геометрическая математика принципиально “трансцендентна” для алгебраической. Возьмите, например, формулу длины окружности — там есть “геометрическое” число π. Или, скажем, синус — он определяется чисто геометрически.

Когда я обнаружил, что синус можно записать алгебраически в виде ряда, барьер обрушился, математика стала единой.»

— И. М. Гельфанд

1. Формула Виета. Одна из первых алгебраических формул для π — это открытое в 16 веке Виетом бесконечное произведение

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots$$

Это равенство не очень сложно доказать. Применяя несколько раз формулу $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, получаем, что $\sin x = 2^n \sin\frac{x}{2^n} \cdot (\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n})$. Но при малых t имеет место приближенное равенство[1] $\sin t \approx t$. Поэтому $2^n \sin(x/2^n) \approx x$ (при $n \to \infty$) и мы получаем разложение синуса в бесконечное произведение

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \cdot \ldots$$

Чтобы получить формулу Виета, остается подставить $x = \pi/2$ (и найти косинусы в правой части, пользуясь формулой половинного угла).

Геометрически формула Виета связана с приближением окружности правильными 2^k-угольниками.

[1] Говоря точнее, отношение $\frac{\sin t}{t}$ стремится к 1 при $t \to 0$.

2. Формула Лейбница. Во второй половине 17 века Лейбниц нашел замечательно простое представление π в виде (бесконечной) суммы рациональных слагаемых,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

С точки зрения современного студента, это самая понятная из собранных здесь формул: она получается, если подставить $x = 1$ в разложение арктангенса в степенной ряд

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

но об этом мы говорить не будем.

Суммы типа той, что стоят в правой части формулы Лейбница, часто возникают в теории чисел. В частности, если знать, какие числа представимы в виде сумм двух квадратов[2], то можно доказать, что сумма $L = 4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots)$ вычисляет *среднее* (по N) *количество решений* уравнения $x^2 + y^2 = N$ в целых числах. Это объясняет, почему в ответе возникает число π: с одной стороны, количество целых точек в круге большого радиуса (т. е. число решений неравенства $x^2 + y^2 \leqslant R^2$) примерно равно $L \cdot R^2$, а с другой стороны, количество целых точек в большом круге примерно равно его площади, πR^2.

3. Формула Эйлера. В 1734 году Эйлер решил не поддававшуюся разным математикам уже без малого 100 лет проблему и нашел сумму обратных квадратов:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

[2] См., например, статью В. Сендеров, А. Спивак, «Суммы двух квадратов и целые гауссовы числа», Квант, 1999, № 3.

Рассуждение Эйлера связано с разложением функции $\frac{\sin x}{x}$ в некоторое бесконечное произведение — см., например, книгу «Что такое математика?» Куранта и Роббинса.

С тех пор был найден не один десяток различных доказательств этой формулы. В статье А. М. и И. М. Ягломов[3] предложено доказательство, опирающееся только на тригонометрические формулы. По его мотивам J. Wästlund придумал недавно еще более доступное рассуждение, где тригонометрия заменена элементарной геометрией, а π возникает буквально как отношение длины окружности к диаметру. Оно замечательно объясняется в ролике[4] `https://youtu.be/d-o3eB9sfls`.

Как уже говорилось, суммы подобного вида часто возникают в теории чисел. В частности, из формулы Эйлера следует, что «вероятность того, что случайная дробь несократима, равна $6/\pi^2$»[5].

4. Формула Валлиса. Из разложения Эйлера синуса в бесконечное произведение сразу следует, что

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots}$$

Впрочем, Джон Валлис нашел эту формулу уже в середине 17 века, почти за 100 лет до формулы Эйлера.

J. Wästlund нашел и доказательство (в духе «геометрического суммирования»), непосредственно связывающее произведение Валлиса с площадью круга — см. его статью[6] или лекцию «Why Pi» Д. Кнута.

[3]«Элементарный вывод формул Валлиса, Лейбница и Эйлера для числа π» (УМН, 1953).

[4]Grant Sanderson aka 3Blue1Brown. «Why is pi here? And why is it squared? A geometric answer to the Basel problem».

[5]А точнее, если выбрать два случайных числа k и l от 1 до N, то вероятность того, что дробь k/l несократима, стремится с ростом N к $6/\pi^2$.

[6]«An Elementary Proof of the Wallis Product Formula for pi» (Amer. Math. Monthly, Dec. 2007).

Формула Валлиса помогает доказать приближенную формулу для факториала[7],

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

которая является источником появления числа π и в комбинаторных задачах.

5. Рамануджан и быстрые алгоритмы. Формулы выше не слишком хорошо подходят для *вычисления* π. Например, сумма первых 500 членов формулы Лейбница дает *лишь два* верных знака после запятой.

Впрочем, ситуация радикально улучшается, если кроме разложения арктангенса в ряд пользоваться тождествами типа $\pi/4 = \operatorname{arctg} 1/2 + \operatorname{arctg} 1/3$ и $\pi/4 = 4 \operatorname{arctg} 1/5 - \operatorname{arctg} 1/239$. Именно так уже в начале 18 века π было вычислено с точностью до 100 знаков после запятой[8].

А в начале 20 века Рамануджан нашел ряд формул, обобщения которых сходятся настолько быстро, что позволяют вычислить трилионы знаков π на персональном компьютере. Вот одна из таких формул:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_k (-1)^k \frac{(6k)!}{(3k)!(k!)^3} c_k,$$

где

$$c_k = \frac{163 \cdot 3344418k + 13591409}{640320^{3(k+1/2)}}.$$

Скажем про нее только, что если предыдущие формулы были связаны с тригонометрическими функциями, то эта — с *модулярными формами*, а 163 и 640320^3 — те же числа, что возникают в удивительном (погрешность менее 10^{-12}!) равенстве

$$e^{\pi\sqrt{163}} \approx 640320^3 + 744.$$

[7]И об этом, и о доказательстве формулы Валлиса можно прочитать в статье А. Егорова «Интеграл и оценки сумм», Квант, 2015, № 4.

[8]Об истории вычисления π см. также статью А.Савина «Число π», Квант, 1996, № 6.