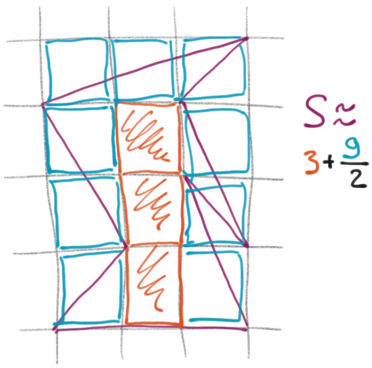
Площади многоугольников и тающий лёд

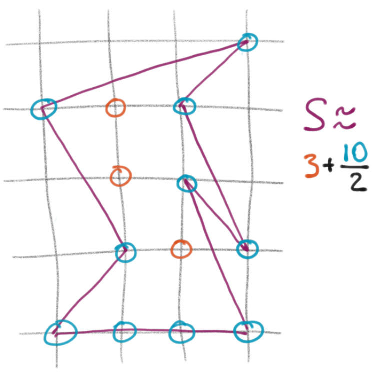
Григорий Мерзон (merzon@mccme.ru)

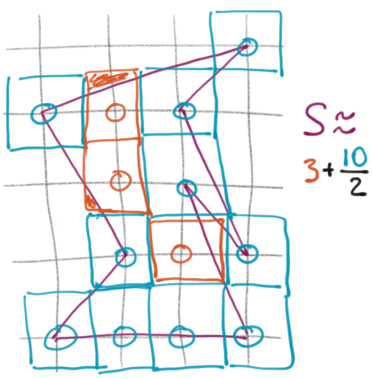
1. Формула Пика

Как найти площадь многоугольника на клетчатой бумаге? Можно подсчитать число клеток, которыеполностью накрытых фигурой, и ещё как-то учесть клетки, накрытые фигурой частично — скажем, прибавить половину от числа этих клеток. И сказать, что площадь фигуры (в клеточках) *приблизительно* равна полученной сумме.



А можно вместо клеток полностью или частично занятых многоугольником считать *узлы сетки* строго внутри многоугольника или на его границе.





Действительно, вокруг каждого узла сетки можно нарисовать по единичному квадратику. И если узел лежит на границе многоугольника, то этот квадратик накрыт многоугольником только частично. А если узел лежит внутри, то обычно и квадратик накрыт многоугольником полностью... впрочем, иногда всё же не полностью — но мы и считаем площадь только приближённо.

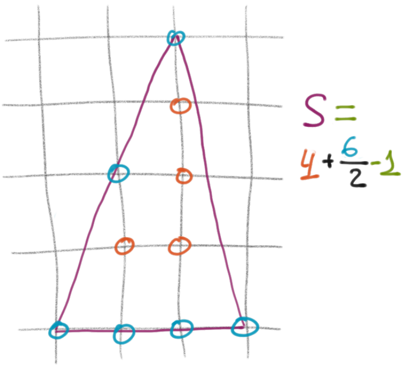
Но чудесным образом последний рецепт всегда дает *почти* правильный ответ! А именно, верно следующее.

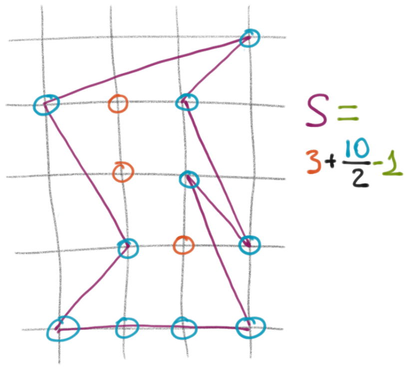
Формула Пика. *Площадь S многоугольника с вершинами в узлах сетки можно найти по формуле*

$$S = i + \frac{b}{2} - 1,$$

где i — число узлов сетки *(строго) внутри многоугольника, b — число узлов сетки на его границе.*

Подчеркнём, что это уже не приближённая, а *точная* формула!



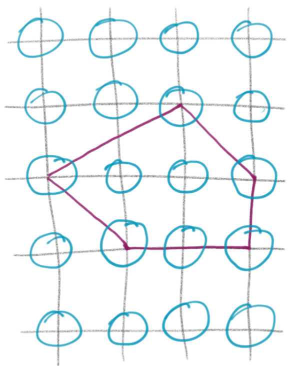


Интересно, что хотя стороны многоугольников обычно своершенно не целые, формула Пика гарантирует, что площадь всегда получится целой или полуцелой.

2. Тающий лёд

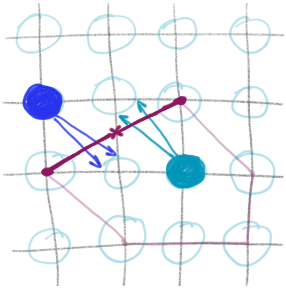
Формула Пика известна с 19 века и с тех пор у неё появилось много доказательств, но большинство из них не такие уж простые. Мы обсудим предложенный в 1997 году швейцарским математиком Кристианом Блаттером мысленный эсперимент с тающим льдом, который сразу объясняет формулу Пика.

Поставим на каждый узел сетки по одинаковому цилиндрическому столбику изо льда. Каждый столбик очень тонкий и весит 1 грамм.

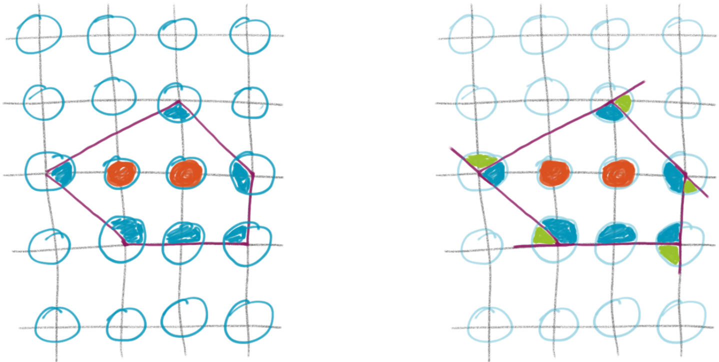


Растопим весь лёд. Вся клетчатая плоскость будет равномерно залита водой и в каждой клетке будет по 1 грамму воды. То есть количество воды в нашем многоугольнике (в граммах) будет равно его площади (в клетках).

С другой стороны, задумаемся, откуда эта вода попала в наш многоугольник. Посмотрим на какую-нибудь конкретную сторону многоугольника. Если через неё внутрь многоугольника втекла вода из какого-то столбика, то точно столько же воды из *симметричного столбика* (симметричного, относительного середины этой стороны) через неё из многоугольника вытекло.



То есть внутри многоугольника *ровно столько воды, сколько в нём было льда!* А сколько в нём было льда? Каждый из узлов сетки (строго) внутри многоугольника даёт вклад по 1 грамму, всего получается i граммов. Узлы на сторонах обычно дают по $1/2$ грамма, но только если это не вершина, для вершины этот вес меньше — так что и общий вес узлов на границе получается не $b/2$ граммов, а меньше.



Насколько меньше? Продлим немного каждую сторону, обходя многоугольник вдоль сторон по часовой стрелке. На рисунке зелёная часть дополняет каждую из синих частей до половины круга. Но зелёные части в сумме дают ровно один круг! Ведь обходя многоугольник по контуру, мы в каждой вершине поворачиваемся на угол, соответствующий зелёной части, пока не вернёмся в исходную точку, сделав как раз полный оборот.

То есть суммарный вес льда внутри многоугольника равен $i + b/2 - 1$ и мы получили формулу Пика!

Упражнение. *В рассуждении выше мы рисовали* выпуклый многоугольник. *А изменится ли что-то если многоугольник станет невыпуклым? А если начать рассматривать «многоугольники с дырками»?*